Enseigner la démonstration en mathématiques, c'est quoi ? pourquoi ? pour qui ? comment ?

Éléments de réponses à partir de l'étude des programmes des premières années de l'enseignement secondaire en France et en Bade-Würtemberg

Richard Cabassut(*)

Nous allons essayer de répondre au questionnement de l'APMEP sur l'enseignement des mathématiques en étudiant la place de la démonstration dans les premières années de l'enseignement secondaire. Pour aborder cette étude nous allons comparer les programmes d'enseignement en France et dans la région du Bade-Würtemberg en Allemagne, pour permettre de mieux éclairer les similitudes et les différences, et de rompre notamment avec l'apparence naturelle des pratiques alors qu'elles sont bien souvent le résultat de choix culturels précis non naturels.

1. Brève comparaison des systèmes scolaires secondaires

1.1. Tableau comparatif

<table>
<tr><td>Age</td><td colspan="4">classes du Bade-Würtemberg</td><td colspan="2" rowspan="2">classes françaises</td></tr>
<tr><td>18-19</td><td>13</td><td></td><td rowspan="4">(Fachabitur)
Fach-
Gymnasium</td><td rowspan="7">(Abitur)
Gymnasium

28,2%</td></tr>
<tr><td>17-18</td><td>12</td><td rowspan="3">éducation
professionnelle</td><td rowspan="3">(Baccalauréat)
Lycée
général et technique | professionnel</td><td>Terminale</td></tr>
<tr><td>16-17</td><td>11</td><td>Première</td></tr>
<tr><td>15-16</td><td>10</td><td>Seconde</td></tr>
<tr><td>14-15</td><td>9</td><td rowspan="3">Hauptschule
33,8%</td><td rowspan="3">Realschule
31,5%</td><td rowspan="4">Collège</td><td>Troisième</td></tr>
<tr><td>13-14</td><td>8</td><td>Quatrième</td></tr>
<tr><td>12-13</td><td>7</td><td>Cinquième</td></tr>
<tr><td>11-12</td><td>6</td><td rowspan="2">classes
d'orientation</td><td rowspan="2">classes
d'orientation</td><td rowspan="2">classes
d'orientation</td><td>Sixième</td></tr>
<tr><td>10-11</td><td>5</td><td rowspan="5">École élémentaire</td><td>CM2</td></tr>
<tr><td>9-10</td><td>4</td><td colspan="3" rowspan="4">Grundschule</td><td>CM1</td></tr>
<tr><td>8-9</td><td>3</td><td>CE2</td></tr>
<tr><td>7-8</td><td>2</td><td>CE1</td></tr>
<tr><td>6-7</td><td>1</td><td>CP</td></tr>
<tr><td>3-6</td><td></td><td colspan="3">Kindergarten (cette structure ne fait pas partie du système éducatif officiel)</td><td>École maternelle</td><td></td></tr>
</table>

(*) richard.cabassut@alsace.iufm.fr

1.2. Écoles secondaires différenciées dans le Bade-Würtemberg

Alors que la France propose aux élèves issus de l'école primaire de poursuivre leur scolarité secondaire dans le collège unique, le Bade-Würtemberg propose, après la classe 4 de fin d'école primaire, de différencier l'orientation majoritairement vers trois écoles différentes : la Hauptschule, la Realschule et le Gymnasium. En 1999 la répartition des élèves en classe 8 (13-14 ans) dans le Baden-Würtemberg était la suivante : 33,8% en Hauptschulen, 31,5% en Realschulen, 28,2% en Gymnasium et 6% dans d'autres écoles. Rappelons que cette répartition peut être complètement différente dans une autre région en raison notamment de son histoire politique.
La Hauptschule correspond à un premier cycle d'école secondaire avec des enseignements en allemand (langue maternelle), en mathématique, en sciences naturelles, en sciences sociales et dans une langue étrangère ainsi que des enseignements d'initiation à la vie professionnelle. L'examen(1) de fin de scolarité de la Hauptschule, en classe 9 ou 10, permet d'entreprendre une formation en alternance en entreprise et en école professionnelle. Le Gymnasium, correspondant en France au bloc collège suivi du lycée, prépare en 8 ou 9(2) ans au baccalauréat (Abitur) qui est le diplôme d'accès à l'université. La Realschule est une école intermédiaire entre la Hauptschule et le Gymnasium : elle prépare en 6 ans (de la classe 5 à la classe 10) à un examen (Mittlere Reife) de fin d'étude permettant l'accès à des filières plus valorisées que dans la Hauptschule, comme des écoles professionnelles spécialisées, des lycées techniques ou des passerelles permettant de rejoindre la voie du Gymnasium.

1.3. Collège unique en France

La très grande majorité des élèves français fréquente le collège unique à la sortie du primaire jusqu'à la classe de troisième. La répartition des élèves de 14 ans(3) en 2000-2001 était : 4,5% dans l'enseignement adapté(4), 5,5% en sixième ou cinquième, 30,1% en quatrième, 56,1% en troisième(5), 2,8% en seconde générale ou technologique, et 0,3% en enseignement professionnel court(6) et 0,4% de jeunes restants. On observe donc que la grande majorité (91,7%) est scolarisée en collège. Par contre à 17 ans(7), pour la même année scolaire 2000-2001, la répartition montre que seuls 0,7% restent scolarisés en collège : 1,1% en enseignement adapté, 0,1% en quatrième, 0,6% en troisième, 3,7% en seconde générale ou technologique, 17,8% en

(1) Hauptschulabschluss.
(2) Le Bade-Würtemberg connaît une réforme de la durée de scolarité en Gymnasium ramenée de 9 ans à 8 ans à partir du baccalauréat de 2008-2009.
(3) 14 ans révolus au 1er janvier 2001.
(4) réservé aux élèves qui ont des difficultés à suivre la scolarité dans le collège unique.
(5) Y compris les quatrièmes et troisièmes technologiques qui proposent à des élèves en difficulté dans l'enseignement général une alternative avec une ouverture à l'enseignement technologique industriel ou tertiaire. En 2001-2002, l'effectif des troisièmes technologiques représentait 4,4% de l'effectif de 3ème. Source : [Ministère 2002, p. 87].
(6) en lycée professionnel (LP) ou lycée polyvalent de l'éducation nationale et de l'agriculture (LPA).
(7) 17 ans révolus au 1er janvier 2001.

première générale et technologique, 29,2% en terminale générale et technologique, 24,8% en enseignement professionnel court LP-LPA, 9,5% en enseignement professionnel court CFA, 0,5% en enseignement professionnel long CFA, 2,2% en post-bac et 8% de jeunes restants. On peut observer que seulement 50,7% des jeunes de 17 ans sont scolarisés en lycée d'enseignement général ou technologique.

2. La démonstration, c'est quoi ? Étude des programmes

2.1. Raisonnement plausible et preuves pragmatiques dans la Hauptschule et dans la Realschule

Dans les programmes de la **Hauptschule** de 1994, qui sont les programmes actuellement en vigueur, les missions de l'enseignement des mathématiques ne font aucune référence explicite à la démonstration. On remarque simplement que « l'étude des mathématiques est particulièrement bien adaptée pour renforcer la capacité d'abstraction et pour entraîner la pensée logique » [Ministerium Lehrplanheft 2, 1994, p. 22, traduction. R.C.]. Parmi les idées directrices communes à toutes les disciplines de classe 9, on précise que les élèves « dans les discussions et les situations de conversations apprennent à **justifier [begründen]** leur propre point de vue » [p. 263]. C'est seulement pour les cours supplémentaires et pour la classe 10 volontaire(8) que « les élèves seront amenés de manière croissante à la pensée abstraite formelle » [p. 23].
Dans les contenus des programmes on propose différents modes de validation : procédures inductives ; manipulation expérimentale, mesure et réflexion plausible pour entraîner l'argumentation ; découpages et recompositions de figures isométriques ; constructions à la règle et au compas ; traitements et preuves expérimentaux ; considérations de plausibilité. On reconnaît là des invitations aux « **preuves pragmatiques** »(9) « fondées sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques » [Balacheff 1999 ; p. 201] et aux raisonnements inductif ou plausible.

Dans les programmes de la **Realschule** de 1994, qui sont les programmes actuellement en vigueur, les objectifs communs à toutes les classes précisent : les élèves « apprennent à **argumenter [argumentieren]** rationnellement ; reconnaître, définir, formuler, justifier, analyser des conditions et vérifier des propositions font partie de ce point [...]. **Vérification [Überprüfen]** et jugement critique des résultats, des démarches de pensée et des calculs. [...] Dans les prochaines années scolaires doit s'ensuivre avec prudence une transition vers une pensée abstraite formelle. Ce développement est efficacement soutenu si on recourt continuellement de manière

(8) Ces structures sont facultatives et réservées surtout aux élèves qui souhaitent poursuivre leur scolarité après la fin de la Hauptschule.
(9) La notion de « preuve pragmatique » introduite par Balacheff est distincte de la notion de preuve ou démonstration mathématique reposant sur le seul raisonnement déductif ; certains ont tendance à limiter le mot preuve ou démonstration au seul domaine mathématique en utilisant le mot argumentation dans les autres domaines : ce point de vue n'est pas unanime ; on remarquera enfin que si les programmes français hésitent à introduire du raisonnement plausible dans la démonstration, les programmes allemands n'ont pas ce scrupule.

appropriée à la façon de voir [Anschauung] concrète et à la représentation imagée » [Ministerium Lehrplanheft 3, 1994, p. 23, traduction R.C.]. On propose de renforcer la pensée intuitive [intuitives Denken, p. 22].
Dans les contenus des programmes, on propose, comme pour la Hauptschule, un recours aux preuves pragmatiques : propriétés basées sur la façon de voir, recours au dessin ; découpages et recompositions de figures, considérations de plausibilité.
Pour ces deux écoles, Hauptschule et Realschule, la démonstration n'est pas décrite dans les programmes comme objet d'enseignement.

2.2. La démonstration, objet d'enseignement du Gymnasium

Dans les programmes de Gymnasium de 1994 [Ministerium Lehrplanheft 4/1994, traduction R.C.], qui sont les programmes actuellement en vigueur, la démonstration apparaît clairement comme objet d'enseignement.
D'une part, dans les objectifs généraux valables pour les classes 5 à 13, on peut lire : « La conclusion et la démonstration mathématique ont une signification spéciale. Là on doit placer au premier plan moins l'exactitude formelle et le caractère complet que le contenu d'un théorème ou d'une idée de démonstration. Les considérations de plausibilité montrent aux élèves souvent davantage qu'une démonstration scientifiquement irréprochable. Malgré tout on doit placer clairement à un endroit adapté la construction systématique et déductive de la Mathématique […]. Au cycle inférieur […] les nouvelles connaissances doivent être acquises d'abord par des procédures inductives et d'évocation visuelle [induktive und anschauliche Verfahren]. Le passage à une intervention plus déductive doit avoir lieu progressivement et en fonction de l'âge » [p. 28]. Plusieurs fonctions de la démonstration sont évoquées : persuasion (persuader que la conclusion est vraie), explication (du contenu d'un théorème, d'une idée de démonstration), systématisation (construction systématique et déductive des mathématiques).
D'autre part apparaissent deux unités de programmes consacrées explicitement à la démonstration [Lehrplaneinheit].
L'unité 2 de classe 8 « Isométrie [Kongruenz] et Figures » [p. 283] précise : « Les élèves filles et garçons apprennent à connaître la notion d'isométrie [Kongruenz] comme principe géométrique de classification et l'appliquent pour déduire les propriétés géométriques des triangles. Ils entraînent avec les problèmes de construction leur habileté dans la résolution de problèmes et développent des idées de résolutions autonomes. Ils apprennent à connaître toujours davantage *les formes rigoureuses de justifications mathématiques jusqu'à la démonstration* et font ainsi l'expérience de l'interaction entre la conclusion logique et la compréhension perceptive de relations géométriques comme mobile de la pensée mathématique [...] Notions techniques de démonstration comme définition, hypothèse, conclusion, démonstration, théorème et théorème réciproque, généralisation d'un théorème, proposition universelle et sa négation, démonstrations directes et indirectes sont à partir de la classe 8 à développer comme exemples adaptés ». À propos des quadrilatères, « on peut s'occuper en particulier de *théorème réciproque, de démonstrations tout comme de la dépendance logique des propositions* ». Enfin il est clairement signalé un lien avec la partie du programme de langue maternelle

« Allemand, domaine 1 : argumenter », ce qui évoque la fonction de communication de la démonstration.
L'unité 5 de classe 9(10) « Découverte et démonstration » [Entdecken und Beweisen, p. 381] indique « Dans le champ des problèmes intéressants, les élèves prennent conscience des méthodes mathématiques. Par l'expérimentation créative – individuelle ou en groupe –, ils découvrent de nouvelles propriétés, recherchent des *arguments pour les démontrer* et sont stimulés pour rechercher la portée des propositions par rapport aux possibles généralisations ou des cas particuliers. Rétrospectivement ils découvrent des heuristiques et des stratégies typiques de la résolution mathématique. Par la fréquentation de domaines complets de problèmes ils s'entraînent à aller droit au but et à maintenir le cap. Ainsi ils seront conduits à travailler de manière autonome des textes mathématiques [...] Expérimenter, conjecturer, *démontrer*, généraliser [...] Stratégie de résolution de problèmes et de *démonstration* ». Ici la fonction de découverte (heuristique) de la démonstration est clairement évoquée.

2.3. Du raisonnement déductif à la démonstration dans le collège français

La mise en place des programmes(11) actuellement en vigueur au collège a commencé en 1996 avec la classe de sixième et s'est achevée en 1999-2000 avec la classe de troisième.
Dès la sixième, le travail doit permettre à l'élève « de s'initier très progressivement au raisonnement déductif » [p. 19].
Le document d'accompagnement du programme de sixième comprend un long paragraphe intitulé « autour du raisonnement (déduction, argumentation, ...) » qui précise notamment :
« Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration. Dans une géométrie d'observation, les figures ne sont pas porteuses d'informations clairement annoncées et les observations résultent de la perception visuelle. Dans une géométrie déductive, c'est à partir d'informations explicitées (les hypothèses) et des propriétés apprises qu'il s'agit de prouver des conséquences qui n'étaient pas annoncées au départ. En classe de sixième, des activités géométriques appropriées peuvent préparer le raisonnement déductif, notamment en amenant les élèves à prendre en compte les mêmes informations sous diverses formes. Cette richesse est offerte par toutes les tâches combinant tracé, langage, mesure ou calcul. Les travaux

(10) On remarquera que cette unité n'apparaît que dans le Gymnasium à section scientifique [mathematisch-naturwissenschaftlicher Zug] alors que dans les lycées à section linguistique [sprachlicher Zug] cette unité n'apparaît pas. Cependant, dans la réforme de 1999 qui réunit les deux sections en une seule section commune, l'unité est étendue à tout le monde. Enfin dans la réforme de 2001 du Gymnasium en 8 ans au lieu de 9 ans, cette unité est « descendue » en classe 8 en adaptant les contenus à cette classe.
(11) Pour les programmes de sixième à quatrième : extraits de la brochure « Enseigner au collège Mathématiques. Programmes et accompagnement », Ministère de l' Éducation, CNDP 1998. Pour le programme de troisième : Bulletin officiel de l'éducation nationale, hors série n° 10, 15 octobre 1998, pages 106 à114.

“ géométrico-numériques ” peuvent en particulier constituer un terrain privilégié pour aborder le raisonnement sur des îlots déductifs bien circonscrits, notamment à propos de comparaisons de longueurs et d'aires » [p. 32].

On voit clairement que l'on se situe dans un passage entre une géométrie du constat (observation) et une géométrie déductive. On propose de procéder par « îlots déductifs », ce qui est à mettre en relation avec le concept d'« ordre local » présent dans les programmes allemands(12).

Dans le cycle central constitué des classes de cinquième et de quatrième, « les *études expérimentales* (calculs numériques, avec ou sans calculatrices, mesures, représentations à l'aide d'instruments de dessin, etc.) permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves *ne les confondent avec des démonstrations* : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, *on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré* » [p. 41].

L'accompagnement des programmes du cycle central (cinquième et quatrième) propose un long développement sur « Raisonnement et démonstration en géométrie » [p. 64-65].

« Pour tout le cycle central, il est de la responsabilité du professeur, en fonction de ses élèves de décider de l'opportunité de démontrer certains résultats du cours (leur statut, admis sur conjecture ou établi, doit cependant être clair) et d'organiser des étapes de recherche et de rédaction » [p. 64]. « Le recours, si besoin est, à plusieurs pas de démonstration amène à comprendre le changement de statut d'une assertion au fil d'une démonstration : un résultat intermédiaire est une conclusion dans un pas de démonstration et une hypothèse dans un pas ultérieur » [p. 65]. On réaffirme la gestion locale des démonstrations : il est possible d'admettre un résultat sans le démontrer. On insiste sur le statut et le changement de statut des énoncés dans l'enchaînement des pas de démonstration.

En quatrième, à propos des « triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes », « on pourra remarquer que, contrairement aux deux cas évoqués pour la classe de cinquième, l'évidence “ visuelle ” du résultat ne fait ici guère de doute ; la question qui se pose est donc celle de l'établir au moyen des résultats déjà acquis » [p.65]. Ici il y a un changement de contrat : l'évidence de la géométrie du constat doit être remplacée par la nécessité de la géométrie déductive. La fonction de **vérification** que le résultat est nécessairement vrai par déduction prend le pas sur la fonction de **persuasion** par le constat visuel.

En classe de troisième, les élèves « seront le plus souvent possible, en classe et en dehors de la classe, mis en situation *d'élaborer et de rédiger des démonstrations* » [p.106]. La fonction de **communication**, par la rédaction de la démonstration, est affirmée.

On notera que la fonction d'explication de la démonstration n'est pas clairement affirmée.

(12) Par exemple dans le programme de classe 8 de [Ministerium Lehrplanheft 4/1994, p. 283].

2.4. Démontrer ou valider, c'est quoi ?

Nous avons distingué dans les programmes deux grands types de raisonnement de validation :
– les raisonnements dont la conclusion est plausible/probable et qui sont basés sur le raisonnement inductif ou de plausibilité ; dans le cours de mathématiques les conjectures en sont un exemple ;
– les raisonnements déductifs dont la conclusion est nécessairement vraie.
Tietze [1997, p. 158 ; traduction R.C.] classifie les différents « arguments de plausibilité :
(a) preuve à travers des arguments, qui sans doute accroissent la plausibilité, mais qui ne présentent pas une justification suffisante : par exemple l'indication d'après des faits analogues ou semblables, déjà reconnus comme vrais, le dessin d'une image ou d'un graphique ;
(b) justification du fait qu'on déduit de déclarations à vérifier des déclarations exactes respectivement acceptées(13) ;
(c) vérification sur des cas isolés (induction incomplète) ».
Nous préférons le terme validation, moins marqué que le terme démonstration et donc moins sujet à une polémique sur la terminologie, pour désigner ces procédures de raisonnement déductifs et/ou plausibles, regroupant démonstration mathématique ou argumentation. Observons que les textes officiels français à propos de l'enseignement mathématiques peuvent utiliser la terminologie « démonstration graphique »(14), voire même la succulente expression « démonstration empirique »(15).

2.5. Pour qui valider ?

Les programmes de mathématiques du Bade-Würtemberg de Hauptschule et de Realschule, qui scolarisent des élèves plutôt en difficulté dans la formation générale et se destinant plutôt à des formations professionnelles, invitent à la pratique de l'argumentation et du raisonnement plausible mais ne prétendent pas enseigner la démonstration, même s'ils évoquent les preuves pragmatiques.
Le programme de Gymnasium et du collège français posent la démonstration en objet d'enseignement, sans renoncer pour autant à la pratique de l'argumentation et du raisonnement plausible.
Rappelons que cette conclusion est déduite de l'observation des programmes actuellement en vigueur : la situation a pu être différente dans le passé ou peut être différente dans d'autres Länder en Allemagne.

---

(13) On retrouve ici la conception concernant le raisonnement plausible qu'expose Georges Polya dans *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthier-Villars, Paris, 1958, et dont le schéma est le suivant : (si A alors B) est vraie et B est vrai donc A est davantage plausible.
(14) À propos de la démonstration en première S dans [Accompagnement des programmes, classes de premières, CNDP, 2001, p. 52].
(15) À propos de la démonstration en mathématiques dans [Bulletin officiel de l'éducation nationale (BOEN), hors série n° 2 du 30/8/2001, p. 9].

Comment est gérée l'hétérogénéité plus forte du collège français par rapport au Gymnasium allemand ? Une première réponse donnée par les programmes français est dans la gestion locale des situations de démonstrations, par la liberté donnée aux professeurs d'admettre ou de démontrer certains théorèmes et par la progressivité affirmée plusieurs fois de cet apprentissage de la démonstration. Une seconde réponse est la limitation des compétences exigibles qu'affichent les programmes français, laissant encore au professeur un espace de liberté entre l'exigible, le mobilisable et le disponible. Sans doute qu'une partie des compétences exigibles est reportée au lycée dont nous n'avons pas étudié ici les programmes. Une troisième réponse est la distance possible entre le programme officiel et le programme réel, c'est-à-dire le programme réellement pratiqué dans les classes. Observer cette distance dépasse largement le cadre de cet article.

3. Des fonctions d'une validation ou pourquoi et comment valider : exemple à partir de manuels scolaires

3.1. Un exemple français(16)

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

A. Expériences, mesures et calculs

1. *Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.*
Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban **(fig. 1)**.

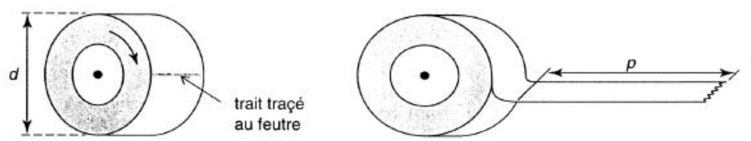


fig. 1 fig. 2

Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

2. *Mesurer la longueur p du ruban déroulé* **(fig. 2)**.
Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

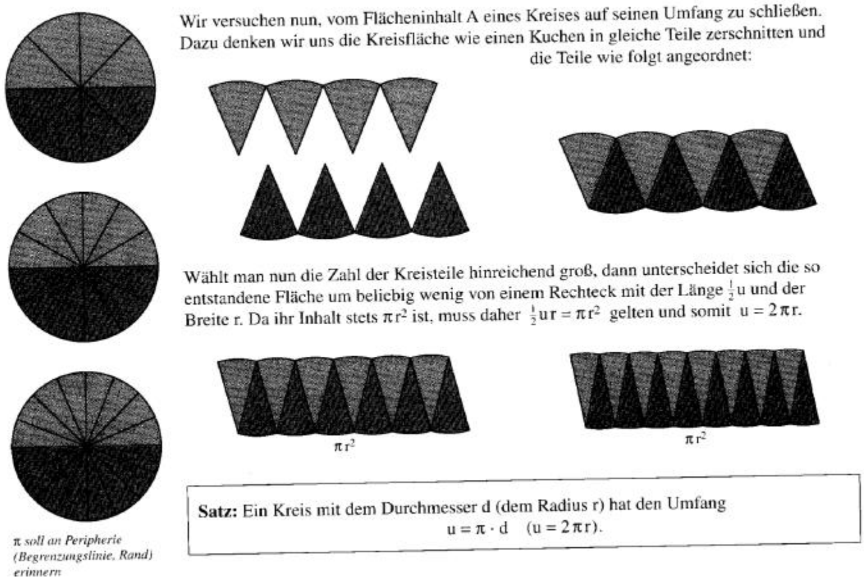
1. *Que constate-t-on dans ce tableau ?*
2. *Compléter la phrase :*

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. *Compléter la formule :* $\boxed{p = \pi \times \ldots}$ avec $\boxed{\pi \approx \ldots}$

(16) extrait du livre de mathématiques, classe de sixième (âge 11-12 ans), en France, édition Hatier, collection « le nouveau Pythagore », 1996, p. 208-209.

3.2. Un exemple allemand[17]



Wir versuchen nun, vom Flächeninhalt A eines Kreises auf seinen Umfang zu schließen. Dazu denken wir uns die Kreisfläche wie einen Kuchen in gleiche Teile zerschnitten und die Teile wie folgt angeordnet:

Wählt man nun die Zahl der Kreisteile hinreichend groß, dann unterscheidet sich die so entstandene Fläche um beliebig wenig von einem Rechteck mit der Länge $\frac{1}{2}u$ und der Breite r. Da ihr Inhalt stets πr^2 ist, muss daher $\frac{1}{2}ur = \pi r^2$ gelten und somit $u = 2\pi r$.

πr^2 πr^2

Satz: Ein Kreis mit dem Durchmesser d (dem Radius r) hat den Umfang
$u = \pi \cdot d \quad (u = 2\pi r)$.

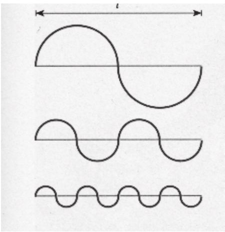
π soll an Peripherie (Begrenzungslinie, Rand) erinnern

Situation de la validation et indication de traduction :

Dans une précédente leçon de la classe 10, la validation de la formule de l'aire A d'un disque de rayon r indiquant que le rapport A sur r^2 est constant a été réalisée. On y montrait d'abord que le rapport des aires de deux polygones réguliers de même nombre n de côtés est égal au rapport des carrés des rayons des cercles où ces polygones sont inscrits. Puis, après illustration, on admettait le passage à la limite montrant que le rapport de l'aire d'un cercle au carré de son rayon est constant.
Le livre définit le nombre π comme étant ce rapport constant.
Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède, …)[18].
On établit ensuite le théorème ci-dessus sur le périmètre du cercle.
On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former une figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure ci-dessus.
« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur un demi-périmètre et de largeur un rayon ». Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que le périmètre du cercle vaut π fois le diamètre.

(17) extrait du livre de mathématiques, classe 10 (15-16 ans), en Bade-Würtemberg, édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p. 78), première édition 1996, programme encore appliqué en 2000.
(18) pages 75, 83, 84.

On signale cependant par la figure ci-dessous qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.



3.3. Des fonctions de la validation

L'exemple français(19) illustre une preuve pragmatique qui recourt à une action de la mesure validée visuellement et à un raisonnement inductif (généralisation à partir de quelques mesures). Elle est complétée par un argument d'autorité du livre (ou du professeur) qui demande d'admettre la formule du périmètre. Cette preuve pragmatique n'est pas une démonstration. Elle permet de conjecturer la formule (fonction heuristique) et de se persuader, après plusieurs vérifications, qu'elle est assez plausible (fonction de persuasion). Une démonstration n'est pas possible en l'absence de notions et théorèmes mathématiques le permettant, la seule technique mathématique utilisée est le calcul du quotient du périmètre par le diamètre.
Dans l'exemple du Bade-Würtemberg, qui est traité plus tard par rapport à la France, on utilise d'autres théorèmes mathématiques : formule de l'aire (acquise auparavant en utilisant les triangles semblables, les polygones, les similitudes), propriétés des aires (reconfiguration), formule de l'aire d'un rectangle. On utilise également un constat visuel (pour la reconfiguration) et un passage à la limite par induction. Cette preuve pragmatique permet d'expliquer le lien entre le périmètre et l'aire du disque (fonction d'explication), de préparer à l'enseignement des limites (fonction propédeutique assignée par les programmes). Bien entendu cette preuve n'est pas une démonstration mathématique.

4. Des contrats de la validation ou comment démontrer : exemple à partir de productions d'élèves

4.1. Présentation du contexte

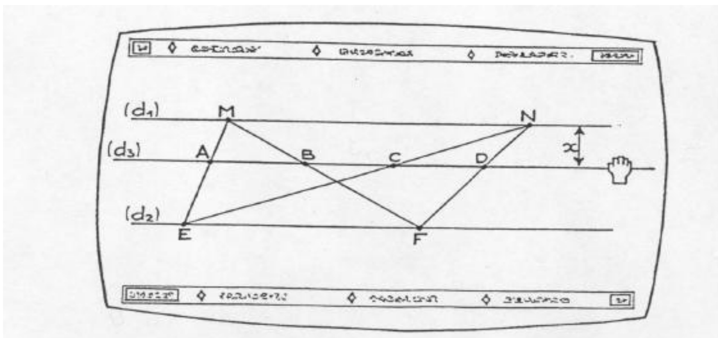
Nous allons présenter des productions d'élèves réalisées dans le cadre de la compétition Mathématiques sans frontières au cours de l'année 2000. Cette compétition présente les caractéristiques suivantes :
– compétition interclasses (troisième ou classe 10 : 10 exercices à résoudre en 1 h 30 et seconde ou classe 11 : 3 exercices supplémentaires),
– chaque classe rend une copie composée d'une seule feuille réponse par exercice : donc résolution en interaction sociale, en général regroupement d'élèves et relecture,

(19) Cet exemple ne prétend pas être représentatif des pratiques françaises : il est contestable pour certains collègues.

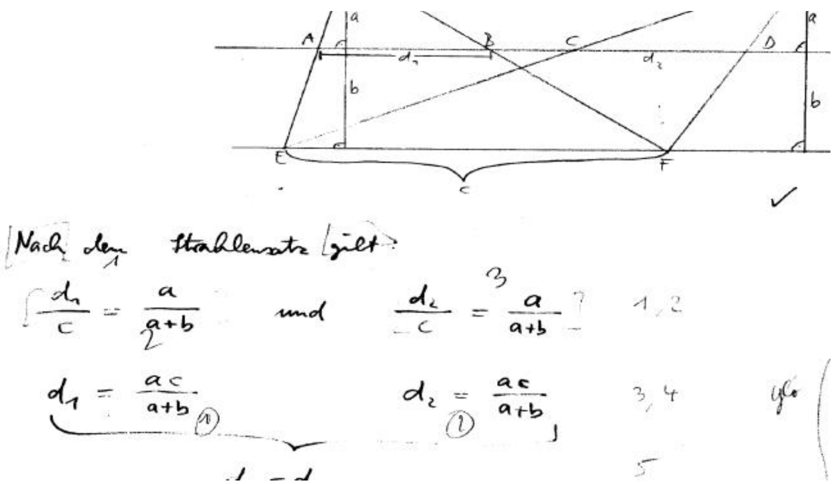
– en général autant de classes, autant de professeurs de classe,
– sujets choisis par une équipe internationale de professeurs,
– copies corrigées par au moins deux correcteurs autres que professeur de la classe,
– enjeu : pas de notes pour le bulletin, possibilité de prix (Tshirt, sac de sport, entrée patinoire, parc d'attraction, voyage Paris, ...).

4.2. Énoncé de l'exercice

Sur son écran d'ordinateur, Gérard a construit la figure ci-dessous. Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles et distantes de 1 décimètre. Il fait glisser la droite (d_3) entre (d_1) et (d_2) parallèlement à celles-ci. Il constate que les longueurs AB et CD affichées à l'écran sont égales, quelle que soit la position de (d_3), mais il s'agit de valeurs approchées. Démontrer que AB = CD quelle que soit la position de (d_3).



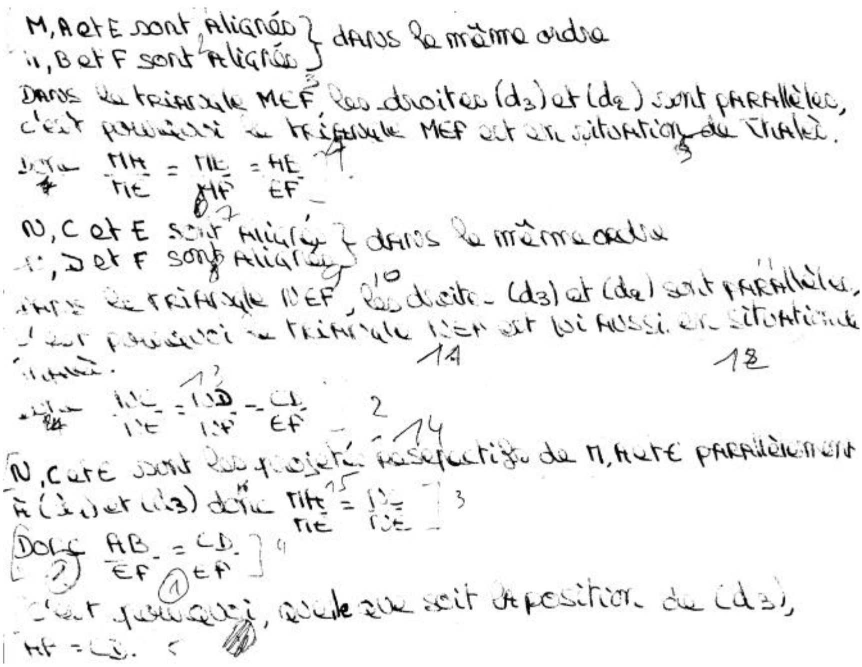
4.3. Copie allemande



Traduction : D'après le théorème de Thalès on a :

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \dfrac{d_1}{c} = \dfrac{a}{a+b} & \text{et} & \dfrac{d_2}{c} = \dfrac{a}{a+b} \\ d_1 = \dfrac{ac}{a+b} & & d_2 = \dfrac{ac}{a+b} \end{array}}_{d_1 = d_2}$$

4.4. Copie française



M, A et E sont alignés } dans le même ordre
N, B et F sont alignés }
Dans le triangle MEF, les droites (d_3) et (d_2) sont parallèles,
c'est pourquoi le triangle MEF est en situation de Thalès.
Donc $\frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MF} = \frac{AB}{EF}$
N, C et E sont alignés } dans le même ordre
N, D et F sont alignés }
Dans le triangle NEF, les droites (d_3) et (d_2) sont parallèles,
c'est pourquoi le triangle NEF est lui aussi en situation de Thalès.
Donc $\frac{NC}{NE} = \frac{ND}{NF} = \frac{CD}{EF}$
N, C et E sont les projetés respectifs de M, A et E parallèlement à (d_1) et (d_3) donc $\frac{MA}{ME} = \frac{NC}{NE}$
Donc $\frac{AB}{EF} = \frac{CD}{EF}$
C'est pourquoi, quelle que soit la position de (d_3), AB = CD.

4.5. Des contrats différents

Dans la copie allemande on observe une rédaction minimale, avec un discours exprimé en langue algébrique et avec un recours à un codage supplémentaire sur la figure.

Dans la copie française on observe une expansion de la rédaction : pour chaque cas, vérification des hypothèses du théorème de Thalès, citation du théorème, énoncé de la conclusion et marquage du statut (hypothèse, théorème, conclusion) des énoncés dans le discours. Le discours est exprimé en mêlant langue naturelle et notation algébrique.

Ces copies illustrent au niveau de la rédaction le « comment démontrer ». Chacune de ces copies est assez représentative[20] de la différence de contrats : le poids de l'écrit est beaucoup plus important et le recours à un codage supplémentaire de la figure moindre dans la rédaction des démonstrations des copies françaises par

(20) Une étude statistique approfondie du corpus de copies le montrerait.

rapport aux copies allemandes. On voit dans ce rapport à l'écrit et à la figure pointer le débat entre rigueur et efficacité. Ces deux productions d'élèves mobilisent les mêmes propriétés (théorème de Thalès et calcul algébrique), remplissent la même fonction d'**évaluation** mais diffèrent par les contrats de rédaction de la démonstration.

5. Pourquoi démontrer ou valider ?

Nous avons vu dans les extraits de programmes, de manuels scolaires et de copies d'élèves que différentes fonctions peuvent être assignées à la démonstration : vérifier que le résultat est nécessairement vrai, persuader qu'il est plausiblement vrai, expliquer les liens que le résultat exprime, systématiser la construction élémentaire des mathématiques, découvrir des méthodes et des résultats, communiquer (par exemple pour être évalué). Selon les fonctions privilégiées, on aura recours aux raisonnements plausible ou déductif, à des preuves pragmatiques ou intellectuelles, à des argumentations ou à des démonstrations, à des expressions différentes (orale, écrite, recours à l'action ou à une figure, …). Ce qui est important, c'est fixer clairement le contrat avec l'élève : suivant la fonction assignée à la validation, quels raisonnements, quelles preuves, quelles expressions sont autorisés et quel est le statut des énoncés travaillés (hypothèse, définition, théorème, conjecture, résultat admis ou démontré, …) ? Récemment on observe le développement d'enseignements impliquant plusieurs disciplines : en France, les itinéraires de découverte au collège, les travaux personnels encadrés au lycée ; en Allemagne, pour chaque classe, indications dans les programmes de thèmes impliquant plusieurs disciplines. La validation mathématique est alors confrontée à d'autres types de validations. Ce qui paraissait naturel peut être remis en question.
Lors de la récente réforme des lycées, la mission générale suivante de l'enseignement était réaffirmée(21) : « Les contenus à enseigner [...] doivent tous contribuer à l'acquisition d'un ensemble de savoirs et de notions fondamentales sans lesquels les élèves devenus adultes se trouveraient dans l'incapacité d'assumer pleinement leur rôle de citoyens responsables, éclairés, critiques et vigilants. L'acquisition des connaissances qui sont la base de toute formation intellectuelle doit permettre, dans toutes les disciplines, de développer le sens de l'effort, l'attitude de probité intellectuelle, de recherche honnête de la vérité, de respect de l'opinion d'autrui ». Plus que jamais, l'enseignement des mathématiques, et particulièrement l'enseignement de la démonstration, participe à cette mission de formation du citoyen.

6. Bibliographie

BALACHEFF Nicolas (1999), Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Presse Universitaire de France, Paris, p. 197-236, 1999.
CABASSUT Richard (2002), Pourquoi démontrer ? Un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications, in *Repères* nº 47, p. 17-39.

(21) *Un lycée pour le XXI^e siècle*, Ministère de l'Éducation nationale, Paris, 1999, page 4.

PEDEMONTE Bettina (2002), *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse Université Joseph Fourier, Grenoble.

PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie (1976), *Traité de l'argumentation, la nouvelle rhétorique*, Éditions de l'Université de Bruxelles.

POLYA Georges (1958), *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthier-Villars, Paris.

TOULMIN S.E. (1993), *Les usages de l'argumentation*, (traduction), Presses universaires de France, Paris.

TIETZE Uwe-Peter (2000), KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F., *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I*, Vieweg.