

À propos du Bac S 2003

Chers lecteurs,

Comme vous le savez, le sujet « métropole » de juin 2003 du bac S a soulevé l'indignation des candidats, et des professeurs des classes de terminale. En rupture brutale avec les usages antérieurs, il était en effet trop difficile, trop long et ne correspondait pas à ce que doit être un sujet d'examen.

L'APMEP a consacré un numéro spécial de son BGV à ce sujet.

De plus, nous avons choisi de publier, en partant du thème d'un exercice et du problème de cette épreuve, d'autres rédactions possibles qui nous ont paru intéressantes. Ces énoncés visent les mêmes contenus mathématiques que les énoncés donnés lors de cette épreuve, et se placent pour la plupart dans le cadre des textes réglementaires et des usages en vigueur jusqu'en juin 03.

Vous trouverez donc ci-dessous, en espérant susciter réflexion et débat :

- d'une part l'énoncé officiel de l'exercice 2 (pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques), qui portait sur la géométrie dans l'espace et trois énoncés sur le même thème émanant de Jean-Pierre Richeton et de Josette Feurly-Reynaud. L'un des énoncés de Jean-Pierre Richeton est délibérément plus ouvert et plus novateur, dans la perspective de ce que défend l'APMEP (voir plus loin).
- d'autre part l'énoncé officiel du problème d'analyse et deux énoncés sur le même thème émanant de Catherine Dufossé et Odette Belissard.

Rappelons que l'APMEP souhaite une évolution des épreuves du baccalauréat, à la condition expresse que les changements soient annoncés deux ans à l'avance.

L'APMEP souhaite substituer le plus souvent, au long problème constitué de questions enchaînées et assez mécaniques, généralement d'analyse, quelques problèmes courts, indépendants, plus globaux tant au niveau des concepts mobilisés qu'à celui des démarches utilisées pour les résoudre. Dans chacun d'eux la compétence dominante, qui fera principalement l'objet de l'évaluation, doit être clairement annoncée.

Il s'agira, selon les problèmes, de :

- valoriser l'autonomie, la prise d'initiative et la réflexion du candidat en prenant en compte, dans la correction, les démarches utilisées, dûment motivées et explicitées, et les essais argumentés, même s'ils n'ont pas abouti.
- vérifier des connaissances de base mises en situation relevant, par exemple, d'une mise en œuvre immédiate du cours.
- juger plus particulièrement de la qualité d'exposition, de la précision des justifications et de la cohérence de la démarche.

Un texte de Nicole Vogel, intitulé *Non-Sens*, relatif aux bacs ES et S paraîtra dans le prochain Bulletin.

Exercice 2

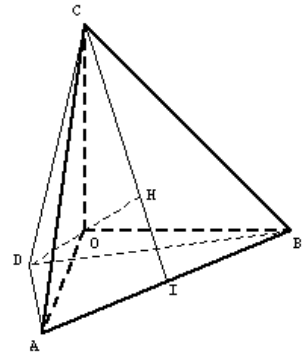
Le sujet original

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soient a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB , OAC et OBC sont des triangles rectangles en O .
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC , H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC , et D le point de l'espace défini par $\vec{HO} = \vec{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC .
3. Calcul de OH .
 - a. Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC .
 - b. Exprimer OH en fonction de V et de S , en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre $ABCD$

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \frac{1}{a}\vec{OA}, \frac{1}{a}\vec{OB}, \frac{1}{a}\vec{OC} \right)$.

- a. Démontrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right)$.
- b. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
- c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) , puis calculer ses coordonnées.

Version proposée par Josette Feurly - Reynaud

OABC est un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC, OBC, sont trois triangles rectangles en O.
- OA = OB = OC.

Le dessin fourni en annexe sera complété au fur et à mesure de l'avancement du problème, et rendu avec la copie.

(Je propose que seul le tétraèdre OABC soit représenté, avec une disposition qui permette ultérieurement de bien distinguer les points O et K, les droites (CK) et (CO), les droites (AK) et (AO), et de placer le repère dans la disposition habituelle).

1) On nomme K le point du plan ABC qui est le point de concours des trois médiatrices du triangle ABC. Montrer que K est aussi l'isobarycentre de A, B, C.

2) On choisit la distance OA comme unité de longueur, et on munit l'espace du repère

$\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, qui est alors orthonormé.

- a) Déterminer les coordonnées de K.
- b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{OK}}$ est normal au plan ABC.
- c) Calculer la distance de O au plan ABC.

3) On rappelle que, dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est défini de deux façons équivalentes :

- c'est le plan orthogonal au segment et passant par son milieu
- c'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à égale distance des deux extrémités du segment.

- a) Montrer que le plan médiateur P du segment [AB] est le plan COK. Déterminer le plan médiateur Q du segment [BC].
- b) Déterminer l'ensemble E des points de l'espace situés à égale distance des trois points A, B, C.

4) Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{\text{OD}} = \overrightarrow{\text{KO}}$, et soit Ω l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.

- a) Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].
- b) Montrer que Ω est le centre d'une sphère S contenant les quatre sommets du tétraèdre ABCD (S se nomme sphère circonscrite au tétraèdre).

5) Les unités d'aire et de volume étant celles attachées au repère, calculer :

- l'aire du triangle ABC ;
- la mesure de la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD ;
- le volume du tétraèdre ABCD ;
- le volume de la sphère S.

Commentaires à propos de mes choix

Au plan général :

- Le parti que j’ai pris, c’est de n’imposer le travail par l’analytique que lorsque les démonstrations s’en trouvent vraiment plus simples. Cette rédaction permet presque toujours aux élèves de faire des choix sur la méthode.
- Le repère naturel me paraît vraiment être celui que j’ai choisi, et non celui de l’examen.
- L’énoncé met peu en avant les équations de plan, ou systèmes d’équations paramétriques d’une droite. Si l’on veut mettre les élèves en condition d’être testés là-dessus, il faudrait dans la question 2 demander explicitement une équation cartésienne du plan ABC, et/ou un système d’équations paramétriques de (OK), ce qui est très possible. Il faudrait néanmoins alors pour la cohérence de la suite conserver le b) et le c). Le problème deviendrait alors trop long, et ce choix devrait s’accompagner de la suppression de la question 5. C’est une possibilité que je ne rejette pas.
- Ainsi rédigé, c’est un problème relativement fermé, mais en gardant le même sujet, j’avoue que je n’ai pas vu comment faire mieux de ce point de vue...

Question par question

Question 1 :

Facile, il suffit de montrer que ABC est équilatéral. Cette rédaction évite pour la suite l’insuffisance constatée dans les copies à propos des explications sur le calcul des coordonnées de K. Choisir au départ les médiatrices met aussi l’accent sur les égalités de distance, fondamentales pour la suite du problème.

Question 2 :

- a) : il découle immédiatement de ce qui précède.
- b) : il faut connaître la condition d’orthogonalité d’une droite et d’un plan, en utilisant deux droites sécantes du plan, et le calcul de deux produits scalaires. Cette question ne devrait pas bloquer les élèves, même si l’outil produit scalaire n’est pas donné explicitement dans la question, car c’est un classique du programme. Une autre possibilité aurait été de demander de montrer que la droite (OK) est orthogonale à ABC, ce qui pousse moins à un calcul de produit scalaire (voire de demander une équation cartésienne de ABC). Il n’est d’ailleurs pas exclu que certains élèves cherchent une équation du plan ABC
- c) : C’est la distance OK, formule du programme.

Question 3 :

C’est un choix raisonnable que de redonner les deux définitions en principe connues par les élèves. Il me semble inutile dans une épreuve de pénaliser les élèves « impressionnables », qui se diraient tout de suite « je n’ai jamais vu ça, je ne sais plus faire... ».

Aussi bien pour le a) que pour le b), l’option géométrie pure et ensemble de points est bien meilleure, car plus rapide que les calculs analytiques, qui restent possibles :

- pour le a) grâce à la recherche du plan médiateur par son équation et à la vérification que O, C, K sont dans ce plan ;
- pour le b) par la transcription des deux conditions $MA = MB$ et $MB = MC$. Mais il faut alors savoir interpréter les deux contraintes obtenues ($x = y$ et $y = z$) pour retrouver la droite (OK) comme intersections de deux plans ... ce qui n'est pas gagné !

Question 4 :

a) : L'analytique marche très bien et donne rapidement les coordonnées de D, puis de Ω . Mais on peut aussi utiliser la propriété d'associativité du barycentre, et définir Ω comme barycentre de (K,3) et (D,1), ce qui conduit à placer Ω sur le segment [KD], puis sur le segment [OD]. La formulation de cette question permet aussi un contrôle du résultat, si l'élève a su répondre au 2a), et une poursuite du travail s'il y a des erreurs dans les calculs.

b) : on peut s'en sortir par quatre calculs de distance, ou seulement deux si l'on pense à utiliser l'appartenance de Ω à l'ensemble E, qui est la droite (OK).

Question 5 :

Les calculs demandés s'appuient sur le lien géométrie plane – géométrie de l'espace, et sur des calculs déjà faits (distance de D à K double de celle de O à K, distance AB, rayon de la sphère).

Il reste la question des formules, pas forcément connues...

Mais c'est en fin de devoir !

Aucun(e) d'entre nous ne propose des problèmes

- ni en classe, ni à la maison,
- ni en petits groupes, ni en club,
- ni en rallyes, ...

Aucun(e) d'entre nous n'a quelque idée sur ce qu'il voudrait voir proposer aux examens.

AUCUN, BIEN SÛR, PUISQUE LES RÉPONSES À NOS APPELS POUR UN DOSSIER SUR LES PROBLÈMES

sont quasi inexistantes !

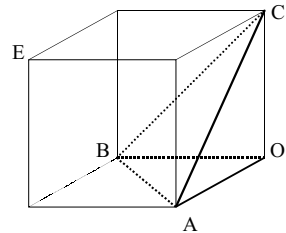
SINON, ÇA SE SAURAIT !

Version « classique »
(avec mise en œuvre immédiate du cours)
proposée par Jean-Pierre Richeton

Recommandation importante : il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (justification, rigueur, soin, etc.) dans l'appréciation de la copie.

La figure ci-contre représente un tétraèdre OABC dont les sommets appartiennent à un cube de côté pris pour unité.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC et J celui de la hauteur issue de B.



- 1° a) Décrire les faces de ce tétraèdre et en déduire la position du point I sur [AB] et celle du point J sur [AC]. Que représente le plan (COI) pour le segment [AB] ?
 - b) Sur la figure donnée en annexe, construire précisément les points I et J, puis placer le point d'intersection K des droites (CI) et (BJ).
 - c) Que représente le point K pour le triangle ABC ?
- 2° On se place dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
 - a) Déterminer les coordonnées de K et en déduire que le point K appartient à la diagonale [OE] (préciser la position de K sur [OE]).
 - b) Montrer que le vecteur \overrightarrow{OK} est normal au plan (ABC) et en déduire la distance du point O au plan (ABC).
- 3° Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O et soit Ω le centre de la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD.
 - a) Montrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont la même longueur).
 - b) Montrer que la droite (OK) est l'intersection des plans médiateurs de [AB] et de [AC] et en déduire que Ω appartient à la droite (OK).
 - c) Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].

Commentaires :

J'ai tenté de donner un minimum de sens à ce que l'on fait faire aux élèves. Certains élèves trouveront peut-être intéressant que les résultats « remarquables » qu'on leur fait démontrer prennent leur place dans un cube

Enfin je me suis tenu, pour cette version, aux objectifs fixés. Seules les deux dernières questions sont moins guidées, mais on peut très bien envisager de guider davantage si nécessaire selon vous.

« En gros », ce qui est attendu...

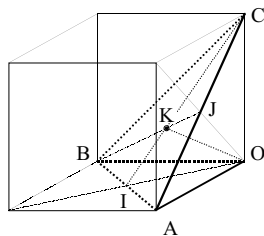
1° a) Les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles isocèles en O avec $OA = OB = OC = 1$. D'après le théorème de Pythagore, les hypoténuses valent $\sqrt{2}$. Donc $AC = AB = BC = \sqrt{2}$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

(OI), étant hauteur issue de C dans le triangle ACB équilatéral, est également médiatrice de [AB], d'où I est le milieu de [AB]. De même J est le milieu de [AC].

La droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes (CI) et (OI) du plan (COI) : elle est donc orthogonale à ce plan. Le plan (COI) passant par le milieu I du segment [AB] est donc le plan médiateur de ce segment.

b) figure ci-contre.

c) Le point K étant l'orthocentre d'un triangle équilatéral en est aussi le centre de gravité (isobarycentre) et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, du cercle inscrit, ...



2° a) On a : $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$. Comme K est l'isobarycentre de A, B, C, K a pour coordonnées $\left(\frac{1+0+0}{3}; \frac{0+1+0}{3}; \frac{0+0+1}{3}\right)$...

Ou encore : I milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, d'où \vec{IC} a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ et donc (IC) a pour vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(1; 1; -2)$.

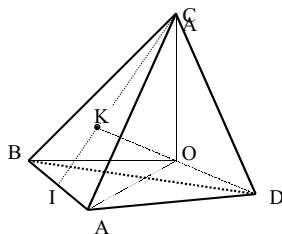
De $\vec{OK} \cdot \vec{IC} = 0$ et (IC) $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$, on déduit $\frac{1}{2}x_K + \frac{1}{2}y_K - z_K = 0$, soit

$$-\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k + 1 - 2k = 0, \text{ ce qui amène } k = \frac{1}{3} \dots \text{ et donc } K \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

\vec{OE} a pour coordonnées $(1; 1; 1)$, d'où

$$\vec{OK} = \frac{1}{3}\vec{OE} \dots$$

b) \vec{AC} a pour coordonnées $(-1; 0; 1)$, d'où :
 $\vec{OK} \cdot \vec{AC} = 0$ et donc \vec{OK} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABC...



On en déduit que OK représente la distance du point O au plan ABC :

$$OK = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- 3) a) Comme $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{KO}$, on en déduit que D a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, d'où :

$$AD = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}.$$

De même on trouve $BD = CD = \sqrt{2}$, d'où : $AB = BC = AC = AD = BD = CD = \sqrt{2}$. Le tétraèdre ABCD est donc bien régulier.

- b) Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est équidistant de A, B, C et D.

Or $OA = OB = OC = 1$ et $KA = KB = KC$ (car K est le centre du cercle circonscrit à ABC d'après la question 1° c)) donc :

– les points O et K sont équidistants de A et B et appartiennent donc au plan médiateur de [AB],

– de même, les points O et K sont équidistants de A et C et appartiennent donc au plan médiateur de [AC].

Ainsi l'intersection des plans médiateurs de [AB] et de [AC] est la droite (OK) qui est donc l'ensemble des points équidistants de A, B et C, d'où Ω qui est équidistant de A, B, C appartient à (OK).

- c) Comme $\Omega \in (OK)$, les coordonnées de Ω sont de la forme : $\Omega(t; t; t)$ car une

représentation paramétrique de la droite (OK) est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
, en prenant

$3 \times \overrightarrow{OK}$ pour vecteur directeur de (OK).

Comme de plus $\Omega D^2 = \Omega A^2$, on a :

$$\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{1}{3}\right)^2 = (t-1)^2 + t^2 + t^2.$$

Soit : $3t^2 + 2t + \frac{1}{3} = 3t^2 - 2t + 1$ d'où : $4t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et donc $t = \frac{1}{6}$.

Ω ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$, cela démontre que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$, c'est-à-dire que Ω est le milieu de [OK].

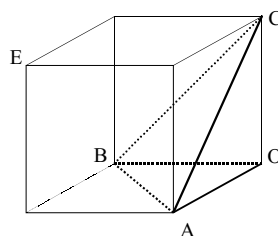
Version « avec prise d'initiative » proposée par Jean-Pierre Richeton

Recommandation importante : il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (justification, rigueur, soin, etc.) dans l'appréciation de la copie.

La figure ci-contre représente un tétraèdre OABC dont les sommets appartiennent à un cube de côté pris pour unité.

On appellera :

- I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC,
- J celui de la hauteur issue de B,
- K le point d'intersection des droites (CI) et (BJ),
- D le point symétrique de K par rapport à O.



Démontrez que le centre Ω de la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD appartient à (OK), puis que le tétraèdre ABCD est régulier.

Après avoir calculé la distance OK, vous préciserez également la position de Ω sur (OK).

Différentes stratégies envisageables :

Quelle que soit la stratégie adoptée, il y a fort à parier que les élèves prendront l'initiative de compléter la figure par les points I, J et K et ensuite D.

↳ Une utilisation pertinente de la perspective cavalière pour cela sera relevée comme élément positif donnant droit à l'attribution de points....

Se placer dans un repère

Il est alors assez naturel de choisir le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ qui est orthonormé.

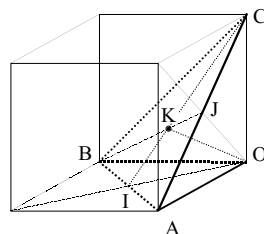
Je ne détaille pas car c'est en gros la stratégie proposée dans la version « classique »...

Raisonnement à partir de figures en vraie grandeur :

Ce à quoi on peut s'attendre à trouver comme pistes explorées partiellement ou non :

- Les triangles OAB, OAC et OBC sont rectangles isocèles en O avec $OA = OB = OC = 1$, d'où

$AC = AB = BC = \sqrt{2}$ (↳ figure de référence : « diagonale d'un carré »...). Le triangle ABC est



donc équilatéral.

- (OI) étant la hauteur issue de C dans le triangle équilatéral ACB est donc également médiatrice de [AB] d'où I est le milieu de [AB]. De même J est le milieu de [AC].
- Le point K étant l'orthocentre d'un triangle équilatéral en est aussi le centre de gravité (isobarycentre) et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC, du cercle inscrit, ...

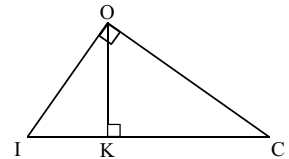
- (OC) est orthogonale au plan (AOB) et donc le triangle COI est rectangle en O.

Or le triangle AOB étant rectangle isocèle en O tel que $AB = \sqrt{2}$ on a donc

$$OI = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots$$

Représentons le triangle COI rectangle en O :

$OC = 1$, $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $IC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (soit en utilisant le théorème de Pythagore, soit en utilisant le résultat de référence concernant la hauteur d'un triangle

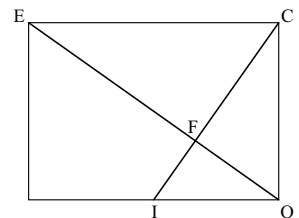


équilatéral, à savoir ici : $AB \times \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Puis en utilisant la trigonométrie (on est en présence de plusieurs triangles rectangles...) ou le fait que les triangles OKI et COI sont de « même forme »

(programme de Seconde...) : $\frac{OK}{CO} = \frac{OI}{CI}$ et donc :

$$OK = \frac{OI \times CO}{CI} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



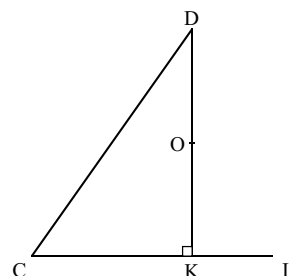
Remarque : il y aussi l'intersection du cube avec le plan (OCI) qui donne un rectangle comme ci-contre représenté en « vraie grandeur » et qui peut amener des éléments de solutions...

Il n'est pas très difficile de justifier que les droites (EO) et (CI) sont perpendiculaires et donc que le point F n'est autre que le point K...

- Le point K étant « aux deux tiers » à partir du sommet C sur la médiane [CI] ... dans le plan (COI),

on a la configuration ci-contre, avec : $KD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et

$$CK = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$



$$\text{d'où : } CD = \sqrt{\frac{12}{9} + \frac{6}{9}} = \sqrt{2} \dots$$

Mais ensuite cela « coince » quelque peu pour poursuivre dans cette voie sans avoir recours à un repère... C'est pourquoi j'ai proposé de démontrer en premier que le centre Ω de la sphère S circonscrite au tétraèdre $ABCD$ appartient à (OK) , car après cela permet d'en déduire que D , qui appartient aussi à (OK) , est équidistant de A , B et C et donc de démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est bien régulier...

- La démonstration déjà développée dans la version « classique » pour situer Ω sur (OK) reste bien entendu envisageable ici, à savoir :

Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ est équidistant de A , B , C et D .

Or $OA = OB = OC = 1$ et $KA = KB = KC$ (car K est le centre du cercle circonscrit à ABC donc :

- les points O et K sont équidistants de A et B et appartiennent donc au plan médiateur de $[AB]$,
- de même, les points O et K sont équidistants de A et C et appartiennent donc au plan médiateur de $[AC]$.

Ainsi l'intersection des plans médiateurs de $[AB]$ et de $[AC]$ est la droite (OK) qui est donc l'ensemble des points équidistants de A , B et C , d'où Ω qui est équidistant de A , B , C appartient à (OK) .

Enfin...

Piste « barycentre », exploitée partiellement ou non...

Le point Ω étant l'isobarycentre de A , B , C , D ⁽¹⁾, on en déduit que Ω se trouve à l'intersection des quatre droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée ainsi qu'aux trois droites joignant les milieux de deux arêtes opposées (exercice classique souvent traité en classe au moment des barycentres)...

Cela permet d'en déduire par exemple que Ω est le barycentre du système

$$\{(K,3),(D,1)\} \text{ d'où : } \overrightarrow{D\Omega} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DK}, \text{ or } \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} \text{ (voir ci-dessus...)},$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\overrightarrow{D\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{D\Omega} \dots$$

« Bref », il y a de quoi faire et prendre des initiatives sur un tel sujet...

(1) Résultat connu ? On peut ici, pour un exercice « avec prise d'initiative » accepter qu'un élève sache que l'isobarycentre d'un tétraèdre régulier est le centre de sa sphère circonscrite. Mais cela peut se débattre ... en ne donnant le maximum des points qu'aux élèves qui mentionnent clairement cette propriété et de mettre une décote pour les autres car le doute reste permis qu'ils aient confondu isobarycentre et point équidistant des sommets...

Le problème de Terminale S

Le sujet original

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A).
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$ (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

$$g'(t) = ag(t) \left(1 - \frac{g(t)}{M} \right) \quad (\text{E})$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation

(E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' + ay = \frac{a}{M} \quad (\text{E}')$$

b. Résoudre (E').

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).

Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \frac{2g}{M}\right)g'$. Étudier le signe de g'' . En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus. Exprimer t_0 en fonction de a et C .

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 , en fonction de M et C .

Partie C

- Le tableau présenté en annexe I a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0 ; 1)$ et $(0,5 ; 2)$. En déduire les valeurs de N_0 , T et a .
- Sachant que $g(0) = N_0$ et que $M = 100 N_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

- Tracer, sur la feuille donnée en Annexe II, la courbe Γ représentative de g , l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0 .
- Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

En annexe était donné un tableau de valeurs donnant le nombre de bactéries et un graphique de l'évolution de la fonction f .

Problème : Version 1 proposée par Catherine Dufossé

On étudie une population de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$. Ce problème a pour objet l'étude de trois modèles d'évolution de cette population. Dans tout le problème, la population initiale sera de 1 million d'individus, et on exprimera le temps en heures, et la population de bactéries en millions d'individus.

Partie A

Un modèle discret.

On suppose que la population double toutes les demi-heures.

- 1) Combien y-a-t-il de bactéries au bout d'une heure ? au bout de deux heures?
 - 2) Soit $P(n)$ le nombre d'individus au bout de n heures. Donner l'expression de $P(n)$ en fonction de n .
 - 3) Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 100 millions d'individus ?
- Quelle est la limite de la suite $(P(n))$?

Partie B

Un premier modèle continu

On s'intéresse à la population de bactéries à l'instant t . Pour faciliter le traitement mathématique, on la représente par une fonction continue et dérivable $f(t)$ (ceci malgré le fait qu'en toute rigueur, elle devrait être forcément un nombre décimal n'ayant pas plus de 6 décimales, puisqu'il y a un nombre entier de bactéries).

On prend pour hypothèse dans ce premier modèle continu qu'à chaque instant l'accroissement de la population par unité de temps, $f'(t)$, est proportionnel à la population. Cela revient à dire qu'il existe un coefficient a strictement positif et invariant au cours du temps tel que $f'(t) = af(t)$

1. a) Résoudre l'équation différentielle $y' = ay$, et en déduire l'expression de $f(t)$, en prenant en compte la population initiale.
b) On suppose que la population double toutes les demi-heures. En déduire la valeur de a .
2. On suppose désormais que la population à l'instant t est : $f(t) = e^{t \ln 4} = 4^t$.
 - a) Dans ce modèle, combien y-a-t-il de bactéries au bout de 10 minutes, au bout de 1h 40 ? Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$?
 - b) Si l'instant initial était midi, à quelle heure, à la minute près, la population atteindrait-elle 100 millions ?
 - c) Comparer $f(n)$ et $P(n)$; qu'apporte cette deuxième modélisation par rapport à la première ? (On peut comparer les questions posées dans A et dans B pour évaluer les « performances » de chaque modélisation.)

Partie C

Un modèle continu moins simpliste : l'équation logistique

L'expérience montre que le nombre de bactéries ne peut pas croître sans limite comme dans le modèle précédent. Pour améliorer le modèle, on introduit un terme négatif dans l'équation différentielle qui va avoir pour effet de diminuer la vitesse du phénomène. Ce modèle a été imaginé par Verhulst en 1838.

Dans ce paragraphe, la population à l'instant t est notée $g(t)$; elle est supposée définie sur l'ensemble des réels positifs ou nuls, dérivable et strictement positive, et elle est solution de l'équation différentielle :

$$y' = y \ln 4 - ky^2$$

où k est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales.

1. Résolution de cette équation différentielle :

a) Prouver, pour toute fonction g dérivable et strictement positive, l'équivalence suivante:

$$\left(\forall t, g'(t) = g(t) \ln 4 - k(g(t))^2 \right) \Leftrightarrow \left(\forall t, \left(\frac{1}{g} \right)'(t) = -\frac{1}{g(t)} \ln 4 + k \right)$$

b) Résoudre l'équation différentielle $y' = -y \ln 4 + k$.

c) Dédire de a) et b) une expression de $g(t)$ en prenant en compte la condition initiale : $g(0) = 1$.

d) On suppose dans cette question que : $g(t) = \frac{\ln 4}{(\ln 4 - k)e^{-t \ln 4} + k}$.

Des mesures expérimentales montrent que la population finit par se stabiliser à 100 millions d'individus. On traduit cette stabilisation par la condition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g = 100.$$

Quelle est la valeur de k pour que cette condition soit remplie?

2. Comportement de ce modèle.

On suppose désormais que $g(t) = \frac{100}{1 + 99e^{t \ln 4}} = \frac{100}{1 + 99 \cdot 4^t}$.

a) Vérifier que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = y \ln 4 - \frac{\ln 4}{100} y^2$$

et qu'elle vérifie les deux conditions $g(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g = 100$.

b) Comparer les nombres 100 et $g(t)$.

c) Établir le tableau de variation complet de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Tracer dans un repère adapté aux données la représentation graphique (Γ) de g .

d) Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation : $g(t) = 50$.

On note la solution d .

e) Calculer $g''(t)$ et étudier son signe : pour cela, il sera plus simple de dériver g' à partir de l'équation différentielle (E) que de faire un calcul direct.

Établir le tableau de variation de g' . On prouvera ainsi que g' décroît à partir de l'instant d . Que nous apprend cette propriété mathématique dans la description de l'évolution de la population de bactéries fournie par ce modèle ?

Quelques commentaires :

- J'introduis un troisième modèle qui est un outil plus ancien et donc plus familier pour les élèves. L'objectif est d'introduire une réflexion sur « discret/continu ». Je trouve en effet assez violent qu'on parle de « nombre d'individus » sous forme de fonction continue sans le moindre mot d'explication. Prenons le temps d'expliquer les choses et considérons les élèves comme des interlocuteurs raisonnables.
- Je me dispense des paramètres inutiles. Je ne garde que ceux qui sont utiles dans le mécanisme de modélisation, et je les fais calculer les uns après les autres de façon à ne pas accabler les élèves sous l'avalanche de lettres de l'énoncé initial. Cela n'enlève rien à la compréhension des mécanismes, cela me semble au contraire préciser la fonction de chacun des paramètres, et apporter beaucoup plus de clarté à l'énoncé. Ainsi, je fixe dès le début la population initiale à 1, et je fais très vite calculer ce mystérieux a qui court tout le long du problème sans avoir jamais été officiellement calculé.
- Je fais utiliser les modèles. Il faut montrer à quoi ils peuvent servir ! Il est intéressant de faire toucher du doigt leurs avantages et leurs inconvénients. D'où la dernière question de la partie B qui aborde encore la question « discret/continu », à quoi devrait conduire le simple libellé des questions du A et du B.
- Je change de paramètres et je justifie davantage l'équation différentielle, je clarifie le changement de variable, en utilisant une seule variable, g , (au lieu de y , g , h) qui apparaît clairement comme une fonction par la notation $g(t)$. Les élèves débutent sur ces questions, soyons prudents. « Il suffit de diviser par g^2 », disait Jean-Christophe Yoccoz lors de la dernière séance de la CREM. C'est bien ce que j'ai essayé de mettre un peu plus en évidence pour l'élève de Terminale. J'ai demandé directement une équivalence, les questions successives de l'énoncé initial me semblent apporter de la confusion, et cela permet de restreindre ce sujet difficile à une seule question. Exprimée en ces termes, elle me semble beaucoup mieux abordable.
- Je fais résoudre l'équation différentielle, tout le monde s'est demandé (élèves compris) pourquoi sa solution n'était pas demandée dans l'énoncé initial. J'apprends à mes élèves à conclure quand ils ont terminé un calcul ; ici encore, c'est une règle de bonne conduite à appliquer aussi le jour du bac.
- La valeur de M donnée dans l'énoncé initial en fonction de la population initiale paraît très artificielle, et ne paraît liée que fortuitement au calcul de la limite de g , très facile. J'ai relié tout cela de façon plus naturelle.
- J'ai donné plus de place à l'étude classique de la fonction g , et je l'ai séparée plus clairement du paragraphe sur l'équation différentielle. Cette partie doit permettre

aux élèves perdus de retrouver un terrain familier où ils pourront sauver leur situation.

- J'ai transporté en fin de problème la question de la variation de la vitesse, j'ai conseillé sans l'imposer l'utilisation de l'équation différentielle. Ce sera ici la question difficile de fin de problème.
- J'ai supprimé la question du « nombre moyen ». Elle est particulièrement mal venue, car l'intégrale est difficile à calculer sans indication : il faut transformer la fraction pour obtenir une forme u'/u , et je trouve que c'est un travail d'expert un peu au-dessus du niveau visé. Il faut viser en priorité, en Terminale, à faire reconnaître une forme u'/u , avec ajustement éventuel de constantes : il est raisonnable de s'en tenir là un jour d'examen. Surtout, ce calcul avantage beaucoup trop les élèves qui possèdent une calculatrice formelle. Le seul qui a trouvé la solution dans mes 60 copies avait manifestement une TI89 ou 92, vu la forme de la primitive utilisée, et les calculs faux avant la réponse finale exacte. Enfin, les élèves ont peu fréquenté cette notion de valeur moyenne qui n'est qu'un détail du programme, et ils ont bien davantage utilisé les intégrales pour calculer des aires, vision privilégiée par le nouveau programme.
- J'ai supprimé le tableau de valeurs qui n'apporte que confusion dans l'énoncé initial, car son statut n'est pas clair (il n'est dit nulle part que ce sont des valeurs expérimentales, et la précision des mesures n'est pas précisée. Elles ne font que gêner la représentation graphique, car elles sont trop proches de la courbe représentative de g pour en être visiblement distinguées). Je fais appel à des résultats expérimentaux pour justifier les modélisations, mais je choisis de travailler dans les modèles. L'énoncé est déjà bien assez complexe !

Ainsi rédigé, ce problème me semble nettement plus à la portée d'un élève de Terminale. J'ai tenté de prouver à quel point une lecture rapide ne peut suffire à comprendre les difficultés du sujet : il y faut un travail détaillé de professionnel bien au fait du contexte. Chacun sait qu'un détail d'énoncé peut modifier du tout au tout la réussite sur un exercice. Cette version constitue un devoir intéressant en cours de formation.

Le reproche de ne pas aborder assez de notions du programme demeure, et il aurait été préférable d'attendre la nouvelle maquette du bac pour aborder ce thème d'étude : on peut parfaitement, en effet, donner ce problème en Terminale S dès le mois d'Octobre lorsqu'on commence l'analyse par les équations différentielles et la fonction exponentielle, comme l'indiquent les nouvelles instructions. C'est la preuve qu'il est trop centré sur le chapitre des équations différentielles et qu'il ne porte que sur une très courte partie du programme d'analyse de l'année. Il serait donc important de le compléter par un autre exercice portant sur les suites ou sur l'intégration, quitte à en réécrire une version raccourcie.

La version 2 ci-dessous serait mieux adaptée à un sujet d'examen : plus concise, elle se termine par un calcul d'intégrale, et ne traite plus du changement de variable dans l'équation logistique, sujet peu adapté à un problème d'examen à ce niveau.

Problème : Version 2 proposée par Catherine Dufossé & Odette Bélissard

Ce problème a pour objet d'étudier trois modèles d'évolution, au cours du temps, d'une population de bactéries introduite dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$. Dans tout le problème, la population initiale sera de 1 million d'individus, et on exprimera le temps t en heures.

Partie A : étude d'un modèle discret.

On suppose que la population double toutes les demi-heures.

1. Combien y-a-t-il de bactéries au bout de 1 heure ? au bout de 2 heures ?
2. Soit $P(n)$ le nombre de bactéries, exprimé en millions d'individus, au bout de n heures. Donner l'expression de $P(n)$ en fonction de n .
3. Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 100 millions d'individus ?
Quelle est la limite de la suite $(P(n))$?

Partie B : un premier modèle continu.

On notera $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t ($t > 0$), $f(t)$ étant exprimé en millions d'individus.

On supposera que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Dans les instants qui suivent l'ensemencement des bactéries, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries $f'(t)$ est proportionnelle au nombre de bactéries $f(t)$ en présence.

Ainsi il existe une constante a ($a > 0$) tel que $f'(t) = a f(t)$.

1. Résoudre cette équation différentielle ($y' = a y$) et en déduire l'expression de $f(t)$ en tenant compte de la population initiale : $f(0) = 1$.
2. En supposant que la population de bactéries double toutes les demi-heures, en déduire la valeur de a .
3. On suppose désormais que la population de bactéries à l'instant t est :

$$f(t) = e^{t \ln 4} = 4^t.$$

- a. Dans ce modèle, combien y a-t-il de bactéries au bout de 10 min ? au bout de 1 h 40 ? Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$?
- b. Au bout de combien de temps atteindra-t-on une population de 100 millions de bactéries ?
- c. Comparer $f(n)$ et $P(n)$; qu'apporte cette deuxième modélisation par rapport à la première ?

Partie C : modèle de Verhulst : équation logistique.

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période.

En tenant compte de ces observations, Verhulst en 1838 a proposé le modèle suivant :

On appellera $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions de bactéries), la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$y' = y \ln 4 - k y^2 \quad (\text{E})$$

où k désigne une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales.

1. Ajustement du modèle :

- a. Montrer que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{\ln 4}{(\ln 4 - k)e^{-t \ln 4} + k}$$

vérifie (E) et la condition initiale : $g(0) = 1$.

- b. Des mesures expérimentales montrent que la population finit par se stabiliser à 100 millions de bactéries. Trouver la valeur de k pour que la limite de $g(t)$ en $+\infty$ soit 100.

2. Comportement de ce modèle :

- a. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $0 < g(t) < 100$.
- b. Étudier le sens de variation de g et donner son tableau de variation complet sur $[0 ; +\infty[$.
- c. Tracer, sur la feuille donnée en annexe (où figure $y = f(t)$ du deuxième modèle) la courbe représentative (Γ) de g .
- d. Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'équation $g(t) = 50$. On notera t_0 cette solution.
- e. Calculer $g''(t)$ et étudier son signe (on pourra pour cela dériver g' à partir de l'équation différentielle (E)). Établir le tableau de variation de g' et en déduire que g' décroît à partir de t_0 . Comment interpréter cette propriété quant à l'évolution de la population de bactéries fournie par ce modèle ?

3. Détermination du nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 (t_0 étant définie au 2. d.)

- a. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $g(t) = \frac{100e^{t \ln 4}}{99 + e^{t \ln 4}}$.
- b. En déduire une primitive G de g sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- c. Calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0 , celui-ci étant fourni par la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; t_0]$.