Aire et périmètre des rectangles

Frédéric Butz

La question qui motive ce qui suit est : un rectangle peut-il avoir n'importe quel couple (aire ; périmètre) ?
Beaucoup d'élèves ont en conception initiale que l'aire et le périmètre d'une figure sont liés. De nombreux travaux existent qui les conduisent à infirmer cette idée. Cependant, pour les rectangles, le lien n'est pas complètement absent.

On peut le voir dès la sixième, et enrichir cette étude tout au long du collège, voire ensuite.

En sixième, il s'agit d'une simple observation, qui peut motiver l'utilisation d'un tableur.
En quatrième, on pousse plus loin en utilisant le calcul littéral.
En seconde, on est amené à la résolution d'une équation de degré 2.

En sixième

Avant de faire varier le périmètre et l'aire, j'ai proposé le problème suivant issu du livre de la classe (Pythagore) :
Tracez plusieurs rectangles différents qui ont tous le même périmètre : 32 cm.

Les élèves s'orientent naturellement vers des côtés entiers, et, lorsque la classe a pu fournir plusieurs couples (longueur ; largeur), nous avons systématisé la recherche en décomposant le demi-périmètre en la somme de deux entiers. Il apparaît alors que la connaissance de la longueur détermine celle de la largeur : tous ces rectangles de même périmètre sont caractérisés par leur seule longueur. De plus, cela permet de résoudre le problème en utilisant des mesures décimales.
On calcule ensuite les aires de ces rectangles pour s'apercevoir qu'ils n'ont pas tous la même, ce qui contribue à infirmer la conception initiale. Les carrés apparaissent comme ceux des rectangles qui ont la plus grande aire.
Puis je leur demande de représenter graphiquement (à la main) l'aire en fonction de la longueur (un arc de parabole), puis l'aire en fonction du périmètre (un segment vertical). On observe le même phénomène depuis deux points de vue.

La question suivante est :
Que devient le graphique de l'aire en fonction du périmètre si je change de périmètre ?

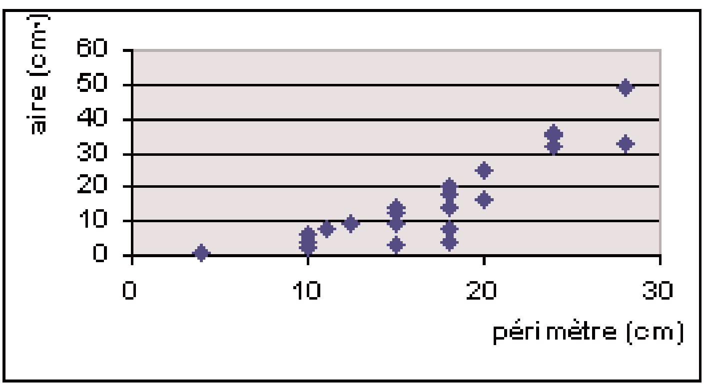
Si, comme les miens, nombre de vos élèves sont un peu lents en calcul, choisissez bien cette variable didactique afin que les élèves trouvent facilement le demi-périmètre et l'aire maximale : il ne faut pas que le calcul soit un frein à la réflexion. C'est pourquoi, lors des premiers exemples, je choisis comme périmètre un multiple de 4.

On peut alors utiliser le tableur pour représenter un grand nombre de cas.
On dresse un tableau comme le suivant avec une vingtaine de colonnes :

Longueur			
Largeur			
Périmètre (cm)			
Aire (cm^2)			

Il est important, pour la lisibilité du graphique, d'avoir suffisamment de valeurs bien choisies. En particulier, utilisez des couples (largeur ; longueur) qui fournissent le même périmètre.
Deux options au moins sont possibles.
La première et la plus simple consiste à donner la longueur et la largeur au tableur qui calcule l'aire et le périmètre. Cela nécessite d'avoir un stock d'exemples dans lequel on peut puiser. Cela fait faire du calcul numérique aux élèves.
La deuxième consiste à donner la longueur et le périmètre au tableur qui calcule la largeur et l'aire. C'est du calcul littéral presque pas déguisé.
On pourra être confronté à un choix de longueur et de périmètre qui amène à une largeur négative. Il faut alors travailler sur le sens du calcul et se poser la pertinence du choix.

L'utilisation du tableur est précédée par une préparation sur papier afin que les élèves défrichent le travail à faire avant de s'y lancer : comment nomme-t-on les cellules, comment écrit-on une formule, comment faire un copier-coller ?
Quant au tracé du graphique, j'ai simplement indiqué la touche « assistant graphique » et l'option « nuage de points », sans détailler plus.
Pour aider on peut colorier les lignes avec des couleurs différentes si ce sont des données ou des résultats d'un calcul du tableur.
La première fois, j'ai demandé à un collègue aide-éducateur de me seconder dans la salle informatique.
Les élèves ont rencontré assez peu de difficultés à part les erreurs de manipulation sur les copier-coller et pour sélectionner les lignes.
Peu connaissent les symboles de multiplication et de division sur le clavier.
Finalement, on obtient un graphique qui ressemble à cela :



La question « est-ce qu'on relie les points ? » sera sûrement posée et il est important de prendre le temps de l'étudier : que se passe-t-il si on prend plus de points, … ?
L'ensemble des points possède une frontière.
Elle représente les carrés parmi les rectangles. La forme de cette frontière montre qu'il n'y pas proportionnalité entre l'aire et le périmètre pour les carrés.

Je n'ai pas abordé le problème du périmètre en fonction de l'aire car il présente une difficulté supplémentaire pour les élèves : il nécessite d'effectuer une division (de l'aire par la largeur choisie).

En quatrième

Voici un problème qui fait intervenir le calcul littéral, la racine carrée et les équations.

Notons c la longueur des côtés d'un carré, A son aire et P son périmètre.
1) Exprimez A et P en fonction de c.
2) On souhaite calculer l'aire en fonction du périmètre. Exprimez P^2 en fonction de c^2, puis P^2 en fonction de A et enfin A en fonction de P^2.
3) On souhaite calculer le périmètre en fonction de l'aire. Exprimez c en fonction de la racine carrée de A, puis P en fonction de la racine carrée de A.

Les élèves trouvent cette activité assez difficile.

En seconde

On utilisera le demi-périmètre (noté p) de préférence au périmètre pour soulager le copiste. On peut poser le problème ainsi corsé : un couple de réels positifs (A, p) étant donné, existe-t-il un rectangle dont l'aire est A et le demi-périmètre est p ?
On veut donc savoir si le système d'inconnues l et L :

$$\begin{cases} l + \mathrm{L} = p, \\ l \times \mathrm{L} = \mathrm{A} \end{cases}$$

admet des solutions.
On arrive alors à l'équation $x^2 - px + \mathrm{A} = 0$ que l'on discrimine par l'étude du signe de $p^2 - 4\mathrm{A}$.
Il s'agit d'un très classique problème « somme-produit ». L'usage des lettres p et A en lieu et place de s et p posera-t-elle des difficultés à certains élèves ?
On retrouve les carrés et leur parabole représentative lorsque le discriminant est nul, et les rectangles lorsqu'il est positif.
De plus, l'expression canonique des solutions fournit les longueurs des côtés du rectangle en fonction de A et p.

Et ensuite…

Même si cela nous éloigne beaucoup de l'amorce géométrique du problème, il reste le cas des discriminants négatifs. En représentant les solutions complexes obtenues par des points du plan complexe, vous pourrez demander à vos étudiants de décrire l'ensemble obtenu.