De la torture mentale aux images fractales

Gérard Hamon(*)

Avant d’entrer dans le propos de la conférence que je propose, je veux prononcer deux brefs plaidoyers.

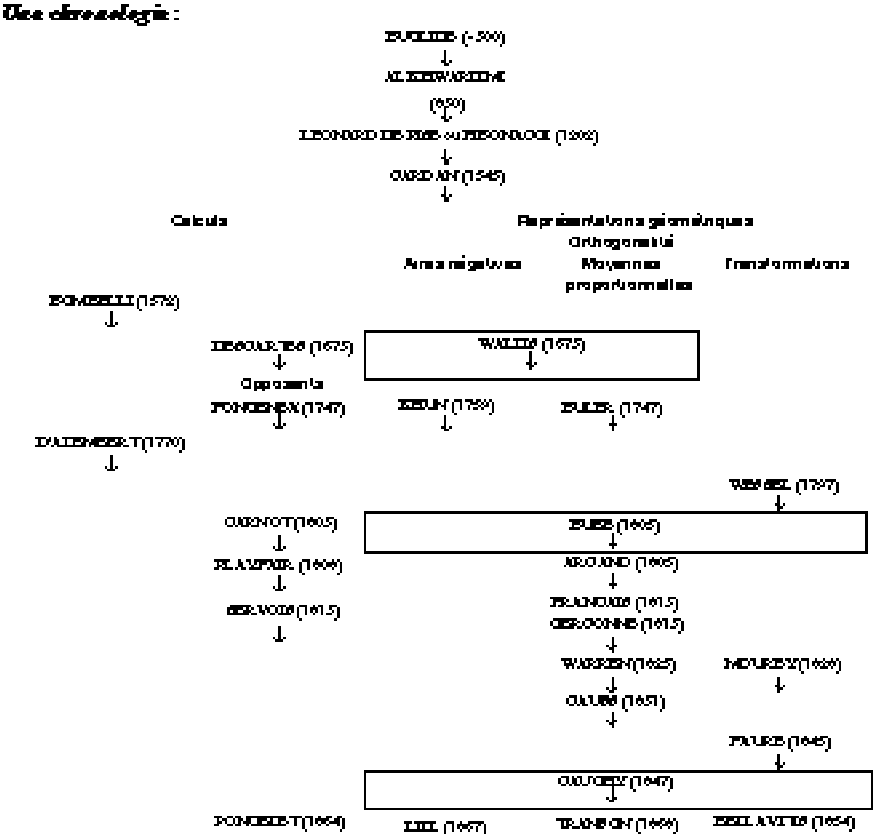
Le premier concerne l’histoire et l’épistémologie des mathématiques. Cela fait de nombreuses années que je suis membre de la commission Inter-Irem Épistémologie-Histoire des mathématiques et je veux dire quelques mots du pourquoi de cet engagement. À moins de considérer son enseignement comme un simple vecteur alimentaire, je ne pense pas que ce soit le cas d’aucun d’entre nous ici, j’estime qu’il est indispensable de connaître au moins partiellement l’histoire de sa discipline d’enseignement et d’avoir abordé des cheminements intellectuels et des difficultés rencontrées par les penseurs des époques précédentes. Cela contribue au sens de notre enseignement, à une meilleure compréhension des notions que nous nous efforçons de faire acquérir et, parfois, à une meilleure appréhension de quelques difficultés rencontrées aujourd’hui. Je dis parfois, car il me paraît évident que les problèmes que les mathématiciens anciens ont eu à résoudre n’ont pas de commune mesure ni par leur objet ni par leur contexte, avec les difficultés que peut éprouver un élève aujourd’hui. Tout ceci peut se faire en travaillant ce que des contemporains ont pu écrire sur l’histoire de ces questionnements, mais il est aussi utile, même si c’est parfois difficile, de revenir aux textes originaux car cela donne une autre dimension à notre réflexion. Enfin, il n’y pas de raison de l’ignorer, cela participe aussi à notre culture générale.

Le second concerne le domaine particulier auquel je me suis plus intéressé, les **nombres complexes**. Les complexes considérés à un niveau élémentaire réunissent longueur (module), direction et sens (argument) et donc vecteurs, ils sont associés aux transformations du plan : translations, rotations, homothéties, similitudes, déplacements et antidéplacements, … De plus ils nous parlent d’une structure : le corps des complexes. À un autre niveau se situent les fonctions de variable complexe et les images fractales sur lesquelles je terminerai. C’est donc là un objet mathématique d’une très grande richesse ouvrant efficacement des portes sur de très nombreux pans des mathématiques.

Pour comprendre les cheminements intellectuels qui ont mené aux outils mathématiques que nous manions aujourd’hui avec plus ou moins d’aisance, il est essentiel de situer les documents que nous étudions dans le contexte de connaissances et de questionnements de leur époque. J’ai situé les personnages aux écrits desquels je me suis intéressé dans un tableau. J’ai essayé d’y faire figurer la

(*) IREM de Rennes.

plupart de ceux qui à divers titres, que ce soit par le calcul, la recherche d'une interprétation géométrique ou par leurs dénégations, se sont intéressés aux imaginaires. La succession verticale ne signifie pas nécessairement une filiation intellectuelle. Je vais parler plus spécialement de la recherche d'une interprétation géométrique mais au préalable je me dois de faire remarquer le décalage dans le temps qu'il y a eu entre l'acceptation des imaginaires « outil de calcul » et l'acceptation des imaginaires « objet géométrique ».

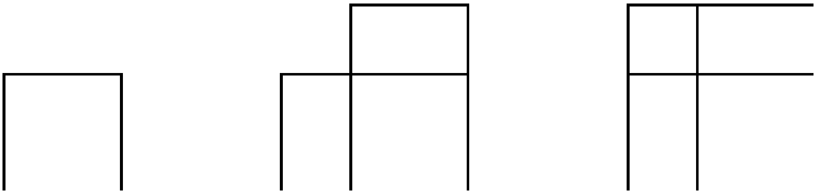


Il faut, pour saisir les difficultés qu'il y a eu à progresser, avoir bien en tête la situation des mathématiques au cours du XV^{e} siècle. En Europe, après des siècles d'activité scientifique de faible intensité, le retour des sciences se réalise par le canal des écrits scientifiques de langue arabe. Cela se fait par l'Espagne avec les traductions de l'arabe au latin des textes de source grecque et des productions de langue arabe ou par l'Italie avec l'ouvrage de Fibonacci[1], le *Liber Abaci*. C'est alors une lente redécouverte de textes oubliés, mais aussi la découverte de l'apport très important des sciences de langue arabe, elles-mêmes en contact avec les sciences de l'Asie. La géométrie euclidienne est alors la référence qui s'impose, c'est elle qui valide les démonstrations.

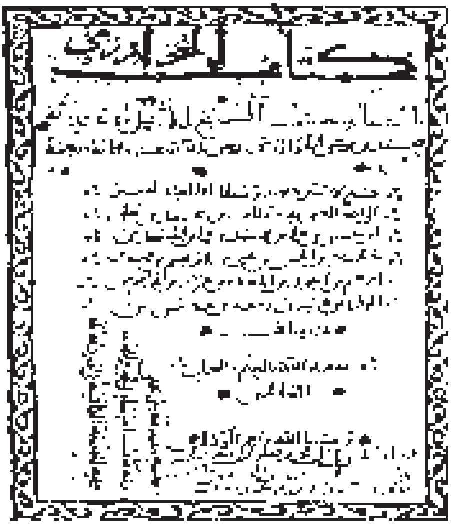
(1) Fibonacci ou Léonard de Pise, Pise vers 1170 – Pise après 1240.

Les irrationnels sont venus perturber la géométrie très tôt. Ces nombres, dits incommensurables, qui ne pouvaient être associés à la multiplication ou à la subdivision d'une unité ont eu une existence reconnue parce qu'ils répondaient à une construction géométrique simple : la géométrie dit que $\sqrt{2}$ existe parce que c'est la mesure de la diagonale du carré de côté unité, mais les rationnels disent qu'un tel nombre leur est étranger. La géométrie euclidienne était le fondement de tout travail en géométrie et tout ce qui pouvait la servir acquérait un statut d'existence.

Avec l'arrivée de l'algèbre une nouvelle perturbation prend naissance. Cet outil, d'abord développé pour répondre aux problèmes de successions dans le cadre du droit musulman, répond aussi aux problèmes de la géométrie. Une grande référence est Al-Khwārizmi[2] dont le traité *L'abrégé du calcul par l'algèbre et la muqābala* contient par exemple la résolution du problème suivant « *Un māl et dix égal à 39 dirhams* ». Le māl désigne l'inconnue au carré, dix désigne le nombre d'inconnues et 39 dirhams, un nombre. Le mot dirham a la même origine que la drachme grecque et, peut-être, que l'expression « 39 dirhams » conservée dans ces calculs est une réminiscence des problèmes à caractère monétaire qui ont été le moteur de l'algèbre. Il s'agit donc de l'équation $X^2 + 10X = 39$ et le raisonnement est le suivant :



X est le côté d'un carré de surface X^2, en bordant ce carré sur deux côtés par des rectangles de côtés X et 5, la moitié du nombre d'inconnues, on obtient un « gnomon » d'aire $X^2 + 10X$. Ce dernier, complété par un carré de côté 5 et donc d'aire 25, donne un carré de d'aire $39 + 25 = 64$. Le côté de ce carré vaut donc 8 qui est égal à $X + 5$ d'où $X = 3$.



Le raisonnement algébrique est alors lié à une représentation géométrique et il va en être longtemps ainsi. Mais l'Algèbre s'émancipant de la géométrie va produire des résultats « parasites » : les nombres négatifs et les imaginaires qui vont interroger en retour la géométrie. Il est à remarquer que ces deux ensembles de

(2) Mohamed Ibn Mousa Al Khwarizmi (Mohamed fils de Moïse, du Kwazem, état des bords de la mer d'Aral) ; dates supposées 780-850.

nombres ont des histoires parallèles. Acceptés par les uns, ignorés ou rejetés par les autres, il leur faudra plusieurs siècles pour être reconnus, le temps qu'on leur donne un statut géométrique. On le verra d'ailleurs plus loin, tous ceux qui s'embarqueront pour la représentation géométrique des imaginaires commenceront par parler des nombres négatifs. La reconnaissance de l'existence des ces derniers est incontournable pour l'acceptation des premiers.

Girolamo Cardano, l'initiateur

C'est donc avec Girolamo Cardan[3] (1501-1576) que débute mon propos. Savant de l'Italie du XVI^{e} siècle à la vie plutôt tumultueuse et aux compétences multiples, ce sont surtout la médecine et les mathématiques qui l'ont fait vivre. Toujours très célèbre aux XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, il est tombé dans l'oubli, nous laissant cependant encore dans notre vocabulaire le terme de mécanique automobile « cardan ».

Il est le premier à écrire dans un ouvrage imprimé, ce sont les tout débuts de l'imprimerie, la racine carrée d'un nombre négatif :

soit :

5 p : ℛm : 15

Il s'agit de son ouvrage de mathématiques le plus important, l'*Artis Magnœ sive de Regulis Algebraicis* publié en 1545, puis en 1570 et à nouveau en 1663. Cet ouvrage est une somme des connaissances mathématiques, y compris algébriques, de l'époque. Deux cents cinquante ans séparent Cardan de Léonard de Pise qui au début du XIII^{e} est le grand transmetteur par la voie italienne des mathématiques de langue arabe et en particulier de l'Algèbre (« Al jabr wa'l muchabala » : proportion et restauration).

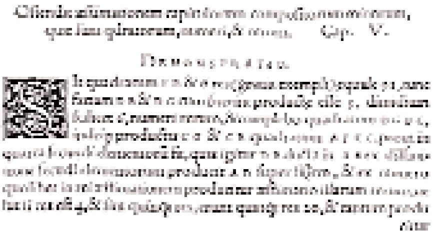
Durant tout ce laps de temps, les ouvrages manuscrits de maîtres de mathématiques, en particulier italiens, ont foisonné. Dans cet ouvrage, s'appuyant sur ses prédécesseurs, Cardan traite des équations algébriques dans la tradition euclidienne. Il a été formé à cette géométrie. Ainsi, dans son ouvrage *De Propria Vita* (rédigé de 1575 à 1576, année de sa mort, et publié à titre posthume en 1643) déclare-t-il : « Dès ma première enfance, vers neuf ans, mon père m'enseigna en famille les

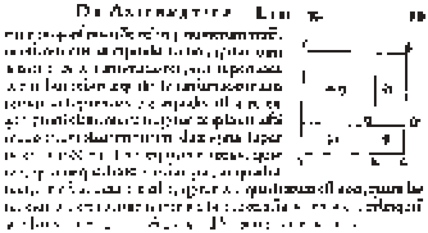
(3) Cardan Girolamo (Jérôme), Pavie 1501 – Rome 1576.

éléments de l'arithmétique comme des sortes d'Arcanes. Je ne sais où il avait puisé ces connaissances. Un peu plus tard, il m'apprit l'astrologie des Arabes et s'efforça de m'inculquer la mémoire artificielle pour laquelle je manquais d'aptitudes. Quand j'eus passé douze ans, il me fit connaître les six premiers livres d'Euclide, mais sans se donner de peine pour les questions que je pouvais comprendre par moi-même ».

Quant à l'algèbre il déclare dès le premier chapitre de l'*Artis Magnæ* : « Cet art tire son origine de Mahomet le fils de Moïse l'Arabe (Mohammed Ibn Moussa Al Khwarizmi), Léonard de Pise est une source digne de confiance pour cette déclaration ».

Voici la résolution du problème « Le carré FD et 6 choses égal 91 ». Nous dirions aujourd'hui $x^2 + 6x = 91$. La méthode apprise des mathématiques de langue arabe est connue, comme nous venons de le voir dans le « *Al Quitab Hisab al-muhtasar fi hisab al Jabr wa'l muqabala* » d'Al Khwarizmi : on borde la carré de diagonale FD par deux rectangles dont un côté a pour longueur celle du côté du carré FD donc une « chose » et l'autre côté la moitié du nombre de « choses » apparaissant dans l'équation, soit 3. La superficie totale de ces deux rectangles est donc 3 choses plus 3 choses qui font 6 choses, qui ajoutées au carré de côté une chose donnent le carré FD plus 6 choses et cela doit faire 91. En complétant par le carré (de diagonale) DC de superficie 9 cela nous donne le carré (de diagonale) FC de superficie 100, donc le côté vaut 10 qui est égal à la chose plus 3 d'où la valeur de la chose : 7.





C'est dans cet ouvrage qu'apparaît une initiative qui dépasse les pratiques antérieures. Reprenant un problème d'une formulation analogue aux précédents déjà traités, Cardan en amorce la résolution sur le mode classique. Mais les données qu'il s'est fixées ne permettant pas la construction, il passe alors outre. Et, changeant de registre, il continue sous une forme théorique qui le mène à de nouveaux nombres « sophistiqués », dit-il, des racines carrées de nombres négatifs. C'est de ce passage que vient une partie du titre de la conférence « dismissis incruciationibus », « *torture mentale* » ? Cette traduction est controversée, d'autres disent qu'il s'agit d'un jeu de mots : « *les produits en croix étant enlevés* ».


m: R m: 15, duc 5 p: R m: 15 in 5 m: R m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40. nam

Dans un autre ouvrage moins connu, *Ars Magna Arithmetica*, sans date de publication, mais sans doute postérieur à l'*Ars Magnæ*, il les qualifie « *d'obscure troisième sorte de chose* ».

Ce texte donne la « résolution de l’équation du second degré » définie par la donnée de la somme des racines 10 (« divise 10 en deux parties ») et par leur produit (« dont le produit est 30 ou 40 ») ; en notation actuelle, il s’agit de l’équation : $X^2 - 10X + 40 = 0$. Dans l’encadré Cardan rédige un calcul avec la racine d’un nombre négatif :

« Chapitre XXXVII :
Règle II.
Je donne un exemple : si on vous dit, partage 10 en deux parties dont le produit est 30 ou 40, il est évident que ce cas ou question est impossible. Néanmoins nous le résoudrons de cette manière : divisons 10 en deux parties égales faisant chacune 5 ; multiplié par lui-même cela donne 25. De 25 soustrait le produit lui-même : 40. Cela, comme je vous l’ai enseigné dans le chapitre sur les opérations dans le sixième livre, laisse un reste m : 15.
La racine de ceci ajoutée et puis soustraite de 5 donne les parties qui multipliées entre elles produisent 40.
Celles-ci, par conséquent, sont 5 p : ℛm : 15 et 5 m : ℛm : 15.

partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

Preuve.

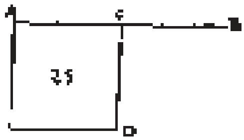
Qu’une vraie signification de cette loi peut être donnée clairement. Soit le segment AB, que nous dirons être 10, qui doit être divisé en deux parties dont le rectangle doit être 40.
Maintenant, comme 40 est le quadruple de 10, nous voulons obtenir quatre fois AB tout entière. Par conséquent construis le carré AD sur AC la moitié de AB. De AD soustrais quatre fois AB, sans porter d’attention particulière à ce nombre. S’il y a un reste, sa racine doit être ajoutée et retranchée de AC, la moitié de AB, te montrant alors les parties [en lesquelles AB devait être divisé]. Même lorsqu’un tel reste est négatif, on doit néanmoins imaginer ℛm : 15 comme étant la différence entre AD et le quadruple de AB, laquelle doit être ajoutée et soustraite de AC pour trouver ce qui était cherché, cela fait 5 p : ℛv : 25 m : 40 et 5 m : ℛv : 25 m : 40 c’est à dire 5 p : ℛm : 15 et 5 m : ℛm : 15(4).
Cette torture mentale achevée, en multipliant dire 5 p : ℛ m : 15 et 5 m : ℛm : 15 cela donne 25 m : m : 15 qui est p : 40. Par conséquent le produit est 40.

(4) Dans « 5 p : ℛv : 25 m : 40 », le v symbolise les parenthèses en notations modernes, ce qui donne $5+\sqrt{25-40}$.

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifestum est, quód casus seu quæstio est impossibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

Demonstratio

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quæ dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est autē 40 quadruplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absque numero, si igitur residuum, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamē huic quantitati, quæ uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 qd. est 40

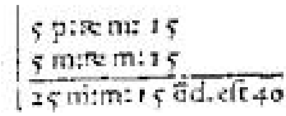
Quæstio IIII.

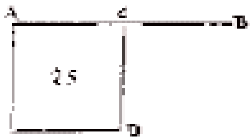
Fac de 6 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, hæc soluitur per primam, non per secundam regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit re-

R 2 siduum

Toutefois la nature de AD n'est pas la même que celle de 40 ou de AB parce qu'une surface est éloignée de la nature d'un nombre ou de celle d'une ligne quoique très proche de cette dernière. Ceci en vérité est sophistiqué, cette quantité est vraiment imaginaire car les opérations ne peuvent être réalisées avec elle comme avec un pur nombre négatif, ni comme avec les autres nombres. Nous ne pouvons pas plus la trouver en ajoutant le carré de la moitié du nombre [donné] au nombre du produit et, à partir de la racine carrée de cette somme en ajoutant ou retranchant la moitié de ce qui doit être divisé. Dans l'exemple où il faut partager 10 en deux parties dont le produit est 40, si tu ajoutais 40 à 25, carré de la moitié de 10 cela ferait 65, et si tu ajoutais et retranchais 5 à la racine carré de ce nombre, tu aurais de façon semblable les parties $\mathcal{R}$65 p : 5 et $\mathcal{R}$65 m : 5 mais ces nombres diffèrent de 10 et leur somme ne vaut pas 10 mais $\mathcal{R}$260. Et l'on pousse la subtilité arithmétique à une extrémité où, comme je l'ai dit, elle devient tellement subtile qu'elle est inutile »[5].

CARDAN laisse alors deux héritages, des calculs rédigés avec la racine carrée de nombres négatifs $\mathcal{R}$m : 15 ($\sqrt{-15}$) et une construction géométrique inachevée.





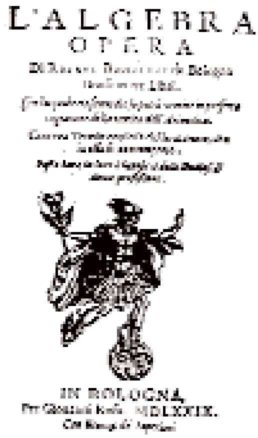
Il ouvre deux voies pour les nombres imaginaires, celle du calcul et celle de la représentation géométrique. Pour ceux qui vont calculer, le chemin sera vite parcouru, je vais en citer quelques-uns, parce qu'ils ne sont pas controversés sur les fondements. Les imaginaires permettent de répondre à l'affirmation, bien que ce ne soit encore qu'un sentiment, qu'une équation algébrique a autant de racines que son degré et, surtout, les imaginaires affichent leur efficience pour mener des calculs conduisant à des solutions non controversées. Pour ceux qui se lancent dans la représentation géométrique, le chemin va être beaucoup plus long parce que les controverses vont être nombreuses et surtout parce que les premières propositions n'éclaireront pas les calculs et relèveront avant tout d'une volonté d'illustration sans grande portée.

(5) Cardan, G. Ars Magnæ, 1545, Chap. XXXVII, f° 66r. Traduit du latin et de l'anglais par l'auteur.

Ceux qui calculent

Bombelli, le premier calcul

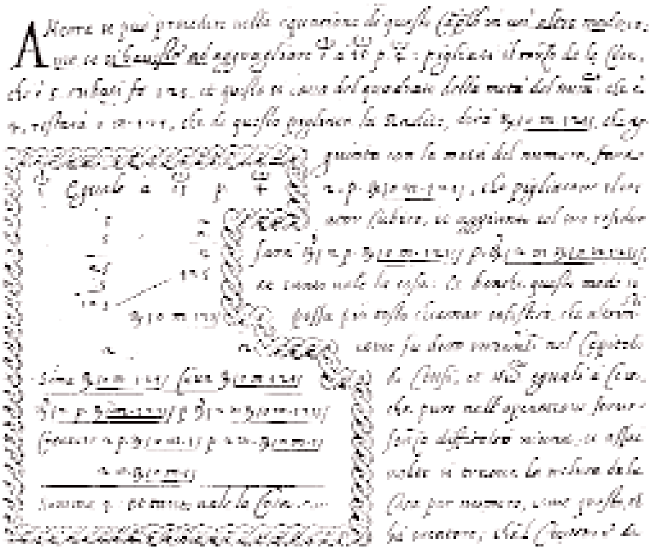
C'est ainsi que, si dès le milieu du XV^{e} siècle, Cardan s'est intéressé aux deux versants de la question, dès le dernier quart du même siècle, Rafael Bombelli(6) en fait un outil de calcul dont il prouve l'utilité pour la résolution des équations du troisième degré. Dans la première reproduction d'une page du manuscrit de *L'Algebra* qui suit, très connue, on lit la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ (égaliser $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{15}$ + 4) : on prend le tiers de la chose (coefficient de l'inconnue 15 divisé par 3) et on le cube ($5^3 = 125$) et ceci est ôté du carré de la moitié (2) du nombre (la constante 4) qui est 4, il restera 0 m. 121 et de ceci on prendra la racine carrée,



donnera $\mathcal{R}$[0 m. 121], qui ajouté à la moitié du nombre fera 2 . p. $\mathcal{R}$[0 m. 121], c'est-à-dire $2+\sqrt{-121}$ dont est prise la racine cubique (*le créateur du cube*), et ajouté à son conjugué fera $\mathcal{R}^3$ [2 . p. $\mathcal{R}$[0 m. 121]] p. $\mathcal{R}^3$ [2 . m. $\mathcal{R}$[0 m. 121]], soit $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, ce qui est en fait dans notre écriture $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.

Dans un autre passage, il a décrit sa méthode pour trouver les racines cubiques et, pour $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$, il a trouvé $2+\sqrt{-1}$. Dans la partie encadrée, il arrive à la conclusion, avec les calculs rédigés, à $2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$. Sur cet exemple simple (il en a rédigé bien d'autres), il démontre la réalité calculatoire des imaginaires qui sont utiles à la résolution de certaines équations du troisième degré. Les irrationnels avaient semé le trouble dans la géométrie euclidienne ; ici la géométrie n'est pas citée.

(6) Bombelli Rafael, Bologne 1526 – Bologne 1572.

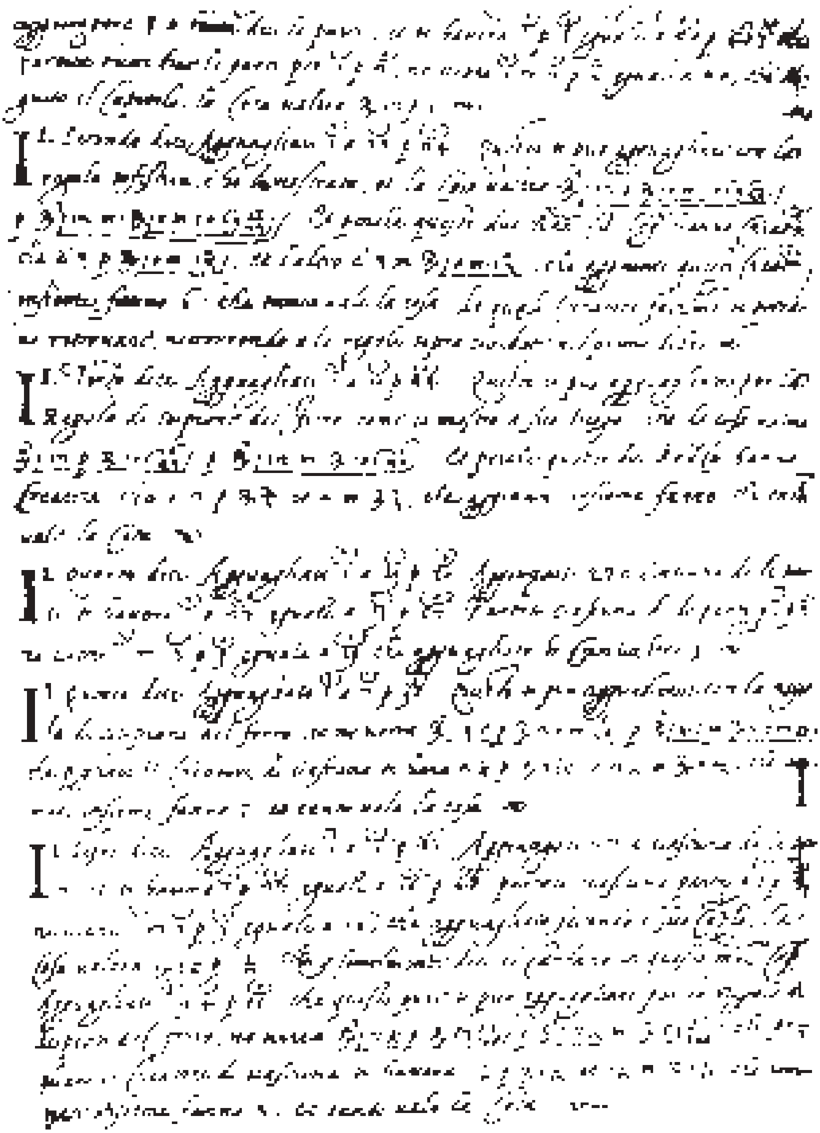


Bombelli ne sait pratiquement rien de ces « nombres » ; peut-on d’ailleurs déjà parler de nombre ? Et pourtant il les utilise dans les calculs, prenant à contre pied Stevin[7] qui déclarait « *Il y déjà tant de choses sûres sur lesquelles travailler qu’il n’y a aucun besoin de se fatiguer sur les choses incertaines* ».

Comme dans bien d’autres situations, une rigueur extrême aurait bloqué toute avancée, passer outre se révèle productif.

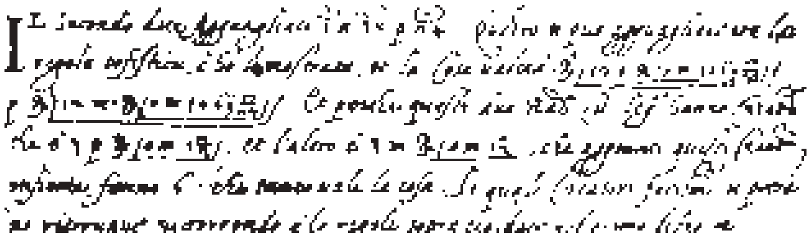
Si Bombelli a le souci de donner quelques règles de calcul élémentaires avec les « complexes », son vocabulaire « *piu di meno, meno di meno* », littéralement « plus de moins » et « moins de moins » qui pourrait être un raccourci de « *piu radice di meno, meno radice di meno* », « plus racine de moins », « moins racine de moins », restera cependant sans héritier. Je saisis l’occasion de donner une autre reproduction, moins connue, du manuscrit de Bombelli dans laquelle il rédige plusieurs résolutions d’équations du troisième degré. Une évolution est à remarquer entre le manuscrit et l’ouvrage imprimé, des différences notables tant dans les notations que dans le vocabulaire apparaissent. Pour confirmer la maîtrise du calcul sur les imaginaires qu’il a acquise, il résout la deuxième équation $x^3 = 32x + 24$ sans s’attarder en explications. On peut en outre remarquer qu’il ne s’intéresse pas aux deux autres racines qui sont négatives ($-3+\sqrt{3}$ et $-3-\sqrt{3}$).

(7) Stevin Simon, Bruges 1548 – La Haye 1620.



Et c’est parce qu’après sont mis de nombreux cas qui ne peuvent se résoudre que Cardan a donné plusieurs Règles pour résoudre de tels Cas imparfaits. Certes ce sont de très belles inventions (comme on le voit dans le vingt cinquième Cas de son Ars Magna) mais tous peuvent se résoudre par les règles données, comme je le montrerai un par un.

Le premier dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{20}$ + 32(8). Ceci peut se résoudre en ajoutant 8 à la fois aux deux parties et on aura $\overset{3}{1}$ + 8 égal à $\overset{1}{20}$ + 40 de sorte que les deux parties divisées par $\overset{1}{1}$ + 2, il en vient $\overset{2}{1}$ – $\overset{1}{2}$ + 4 égal à 20 et selon le Cas, la chose vaudra R.q.17 + 1(9).



Le second dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{32}$ + 24(10). Ceci peut se résoudre par la règle du plus que moins(11) que j'ai démontrée et la chose vaudra R.c.[12 plus de moins(12) R.q.1069 $\frac{17}{27}$](13) + R.c.[12 moins de moins(14) R.q.1069 $\frac{17}{27}$] et parce que les deux R.c. liées ont le côté(15) qui est 3 plus de moins R.q.1 $\frac{2}{3}$ et 3 moins de moins R.q.1 $\frac{2}{3}$, ajoutées ensemble elles font 6. Par conséquent la chose vaut 6. Ces côtés pourront facilement se retrouver en recourant aux règles ci-dessus données dans le livre premier.

---

(8) Le manuscrit donne $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{20}$ p $\overset{0}{32}$, équation $x^3 = 20x + 32$.

(9) Solution $1+\sqrt{17}$.

(10) Le manuscrit donne $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{32}$ p $\overset{0}{24}$, équation $x^3 = 32x + 24$.

(11) Le manuscrit dit « *Regola Sofistica* », Règle Sophistiquée.

(12) Le manuscrit dit « *Regola Sofistica* ».

(13) Avec l'abus d'utilisation du symbole racine cubique $\sqrt[3]{12+i\sqrt{1069\frac{17}{27}}}$.

(14) Le manuscrit dit « *Regola Sofistica* ».

(15) Dans le manuscrit Bombelli écrit « *Creatore* » pour « *lato* », côté, écrit dans l'ouvrage imprimé.

Le troisième dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{10}$ + 24. Ceci peut se résoudre par la Règle de taille du cube[(16)] (comme on le montrera en son lieu) de sorte que la chose vaudra R.c.[12 + R.q.106 $\frac{26}{7}$] + R.c.[12 – R.q.106 $\frac{26}{7}$] et parce que les deux racines ont pour côté 2 + R.q. $\frac{2}{3}$ et 2 – R.q $\frac{2}{3}$. qui ajoutés ensemble font 4, alors la chose vaut 4.

Le quatrième dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{19}$ + 30. 27 s'ajoutant à chacune des parties, on aura $\overset{3}{1}$ + 27 égal à $\overset{1}{19}$ + 57. Chacune des parties étant divisée par $\overset{1}{1}$ + 3, il en vient $\overset{2}{1}$ + $\overset{1}{3}$ + 9 égal à 19 qui résolu donnera la chose valant 5.

Le cinquième dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{7}$ + 90. Ceci peut se résoudre par la Règle de la taille[(17)] du Cube et il en viendra R.c.[45 + R.q.2012 $\frac{8}{27}$ + R.c.[45 – R.q.2012 $\frac{8}{27}$] dont le côté de chacun étant pris, on aura 2 $\frac{1}{2}$ + R.q.3 $\frac{11}{12}$ et 2 $\frac{1}{2}$ – R.q.3 $\frac{11}{12}$ qui joints ensemble font 5 et vaut la chose.

Le sixième dit égalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{16}$ + 21. 27 étant ajouté à chacune des parties on aura $\overset{3}{1}$ + 27 égal à $\overset{1}{16}$ + 48, chacune des parties divisée par $\overset{1}{1}$ + 3, il en vient $\overset{2}{1}$ + $\overset{1}{3}$ + 9 égal à 16 et ainsi résolu selon le Cas, la chose vaudra R.q.9 $\frac{1}{4}$ + 1 $\frac{1}{2}$, c'est ce que dit Cardan dans le même cas.

Egalise $\overset{3}{1}$ à $\overset{1}{4}$ + 15, même celui-ci peut se résoudre par la taille du Cube[(18)] et il en viendra R.c.[7 $\frac{1}{2}$ + R.q.53 $\frac{95}{108}$]+ R.c.[7 $\frac{1}{2}$ – R.q.53 $\frac{95}{108}$] de sorte que le côté de chacun pris, on aura 1 $\frac{1}{2}$ + R.q.1 $\frac{11}{12}$ et 1 $\frac{1}{2}$ – R.q.1 $\frac{11}{12}$ qui ajoutés ensemble font 3 et 3 vaut l'inconnue.

(16) Le manuscrit dit « *Regola di Scipione del Ferro* ».
(17) Le manuscrit dit « *Regola di Scipione del Ferro* ».
(18) Le manuscrit dit « *Regola di Scipione del Ferro* ».

D'Alembert, tentative de validation

Plus d'un siècle et demi plus tard, alors qu'on discute toujours sur l'interprétation géométrique des imaginaires, ces derniers interviennent dans des calculs toujours plus élaborés. Ainsi peut-on voir dans la « *Réflexion sur la cause générale des vents* », d'Alembert(19) les utiliser et rédiger une démonstration justifiant que tout nombre complexe à une puissance complexe est un nombre complexe, $[a+b\sqrt{-1}]^{g+h\sqrt{-1}} = \mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}$. S'il n'est pas de l'objectif ici de discuter de la validité de cette démonstration, nous devons remarquer une évolution : les nombres complexes ne sont pas l'objet de son ouvrage, mais d'Alembert ressent le besoin de valider les outils mathématiques qu'il utilise.

REFLEXIONS

$gA - hB$; $b = Ah + gB$; d'où l'on tire $A = \frac{bh + ag}{hh + gg}$; & $B = \frac{bg - ah}{hh + gg}$.

2°. Que $[a + b\sqrt{-1}]^{g + h\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$. Car faisant varier A & B, aussi-bien que a & b, & prenant les différentielles Logarithmiques, on a $(g + h)\sqrt{-1} \times \frac{da + db\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{dA + dB\sqrt{-1}}{A + B\sqrt{-1}}$; c'est-à-dire (*n.* 1. *art. préc.*)

$$\frac{AdA + BdB + (AdB - BdA)\sqrt{-1}}{AA + BB} = \frac{gada + gbdb - ahdb + hbda}{aa + bb} + \frac{(hada + hbdb + gadb - gbda) \times \sqrt{-1}}{aa + bb};$$

donc $AA + BB = [aa + bb]^g \times c^{-h\int \frac{adb - bda}{aa + bb}}$

& $\int \frac{AdB - BdA}{AA + BB} = h \log. \sqrt{[aa + bb]} + g\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$.

Or $\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$, & $\int \frac{AdB - BdA}{AA + BB}$ sont des expressions des angles dont les tangentes sont $\frac{b}{a}$ & $\frac{B}{A}$: donc B & A sont les Sinus & Cosinus d'un angle dont le rayon est $\sqrt{[\overline{aa + bb}^{\,g} \times c^{-h\int \frac{adb - bda}{aa + bb}}]}$, & dont la valeur est $h \log. \sqrt{[aa + bb]} + g\int \frac{adb - bda}{aa + bb}$.

(19) D'Alembert Jean Le Rond, Paris 1717 – Paris 1783.

De l'indifférence au rejet

René Descartes, l'indifférence

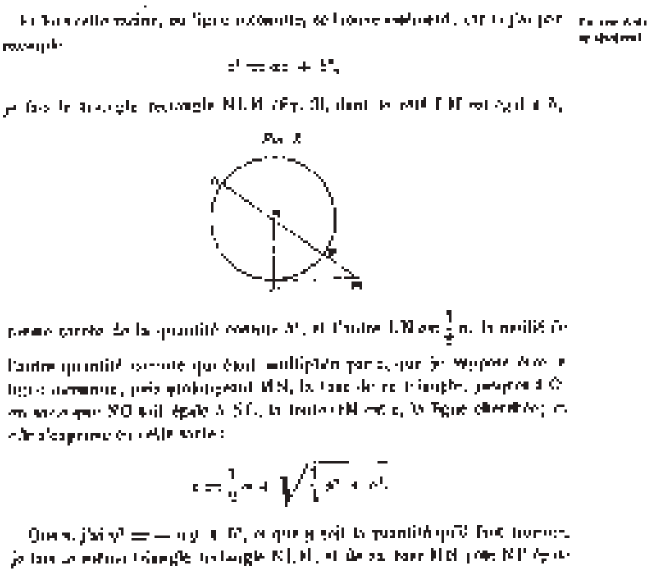
Il s'agissait des deux mathématiciens que je cite dans la première colonne. Dans la deuxième colonne qui débute avec Descartes[20] et se termine avec Poncelet[21], je cite plusieurs de ceux qui ont été réticents aux imaginaires.

Les imaginaires ne semblent pas avoir suscité l'intérêt de René Descartes. La lecture de *La Géométrie* donne l'impression qu'il s'agit d'une absence de prise en compte.

Bien qu'utilisant le terme algèbre, contrairement à ses « contemporains » et à ses prédécesseurs, il ne parle pas des fondateurs de langue arabe de l'algèbre et pas plus, à part Cardan et Scipio Del Ferro[22], de leurs successeurs italiens. Il parle des anciens et les seuls qu'il cite sont Euclide[23] , Appolonius[24] et Pappus[25], des auteurs de langue grecque. Le plus surprenant est que, se situant pourtant plus de cent ans après leur publication, il n'évoque nulle part *l'Algebra* de Bombelli alors qu'il traite des équations du troisième degré. Wallis[26], son contemporain, qui s'est lancé dans différents essais d'interprétation géométrique des imaginaires que nous allons examiner plus loin, évoque l'ouvrage de Bombelli dans un courrier à Roger Cotes[27]. Descartes ne peut donc être rangé dans la lignée des opposants, mais plutôt dans celle des ignorants car il ne semble pas avoir eu connaissance des travaux de ses contemporains ou avoir voulu les prendre en compte, que ce soit ceux de Wallis ou ceux de ses prédécesseurs comme Bombelli. S'il connaît le travail de Cardan, il ne dit mot sur l'interrogation laissée par ce dernier. Dans *La Géométrie*, Descartes décrit initialement la construction géométrique des opérations de l'arithmétique qui « n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines ». Il affirme vouloir se démarquer des anciens : « Où je vous prie de remarquer en passant que le scrupule que faisaient les anciens d'user les termes de l'arithmétique en la géométrie, qui ne pouvoit procéder que de ce qu'ils ne voyoient pas assez clairement leur rapport, usoient beaucoup d'obscurité et d'embarras en la façon dont ils s'exprimoient », la géométrie euclidienne reste le fondement de ses raisonnements ce qui naturellement exclut toute interrogation sur une représentation géométrique des imaginaires. Il s'ensuit

(20) Descartes René, La Haye-Touraine 1596 – Stockholm 1650.
(21) Poncelet Jean Victor, Metz 1788 – Paris 1867.
(22) Del Ferro Scipio, 1465 – 1526.
(23) Euclide, premières décennies du IIIe siècle avant notre ère.
(24) Appolonius de Perga, condisciples des étudiants d'Euclide à Alexandrie.
(25) Pappus, Alexandrie fin du IIIe siècle avant notre ère.
(26) Wallis John, Ashford 1616 – Oxford 1703.
(27) Cotes Roger, 1682 – 1716.

que nulle part n'apparaît dans *La Géométrie* l'écriture du symbole $\sqrt{\ }$ associé à une quantité négative pas plus d'ailleurs qu'une écriture symbolique des nombres négatifs. Les nombres négatifs posent cependant moins de problème car, en exposant son habileté à manipuler les équations, il montre qu'on peut transformer les « solutions fausses » (négatives) en solutions vraies (positives). « Et il est à remarquer qu'en augmentant les vraies racines d'une équation on diminue les fausses de la même quantité … ». Les solutions fausses, du fait de cette possibilité de les transformer, acquièrent une forme d'existence. Il résout géométriquement les équations de la forme $z^2 = az + b^2$, $y^2 = -ay + b^2$ et $z^2 = az - b^2$ et confirme bien sa pensée en déclarant qu'« il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible ». Plus loin, en explicitant ses méthodes de résolution des équations, il admet les racines « fausses » (négatives) et les désigne sans leur signe, ce qui évite d'écrire la chose impossible. De la sorte, l'équation $x^2 + 4x + 2 = 0$ a pour solutions les racines fausses $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ qui sont en fait $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ et $-\left(2-\sqrt{2}\right)$, nombre négatifs ; pour l'équation $x^2 + 4x + 7 = 0$, il déclare que les solutions sont imaginaires sans rien écrire.



NL, et le reste PM est y, la racine cherchée. De façon que j'ai

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Et tout de même si j'avais

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

PM serait x^2, et j'aurais

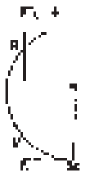
$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}},$$

et ainsi des autres.

Enfin, si j'ai

$$z^2 = az - b^2,$$

je fais NL (*fig. 4*) égale à $\frac{1}{2}a$, et LM égale à b, comme devant; puis, au lieu de joindre les points LN, je tire LQR parallèle à NM, et du centre N, par M, ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R, la ligne cherchée z est LQ, ou bien LR; car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir



$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

et

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N passe par le point M, ne coupe ni ne touche la ligne droite LQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.

Il le fait remarquer plus loin, il n'existe pas de transformation algébrique permettant de rendre les racines imaginaires en racine vraies, ce qui confirme leur inexistence.

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci, — Que les racines tant vraies que fausses peuvent être réelles ou imaginaires.

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.

Le paradoxe est que Descartes a su prolonger la géométrie euclidienne en s'appuyant sur la création d'un repère qui se rapproche de ce que nous nommons aujourd'hui repère … cartésien et qu'il avait là une ouverture pour la représentation géométrique des complexes. Ses prédécesseurs, ses contemporains et nombre de ses successeurs butaient sur leur incapacité à repérer le plan, se fermant ainsi une possibilité d'interprétation. Descartes qui montre dans *La Géométrie* son habileté à décrire les courbes, à lier algèbre et géométrie ne l'a pas plus senti, sans doute que la question n'était pas encore suffisamment dans l'air du temps.

Ainsi ayant

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0,$$

pourceque la racine de

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

est derechef 16, il faut écrire

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

et

$$x^2 + 4x + 7 = 0.$$

Car ici

$$+\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \text{ fait } 5, \text{ et } +\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \text{ fait } 7.$$

Et pourceque on ne trouve aucune racine, ni vraie ni fausse, en ces deux dernières équations, on connoît de là que les quatre de l'équation dont elles procèdent sont imaginaires, et que le problème pour lequel on l'a trouvée est plan de sa nature, mais qu'il ne sauroit en aucune façon être construit, à cause que les quantités données ne peuvent se joindre.

Jean-Victor Poncelet, le rejet

J'en viens au dernier opposant d'envergure, Jean-Victor Poncelet. Il s'agit là d'un personnage de la géométrie du premier quart du XIXe siècle qui, pour reprendre Chasles(28) dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie*, « … était bien inspiré car cette voie (les recherches de pure géométrie) l'a conduit à de brillantes découvertes … En 1822 il mit au jour le Traité des propriétés projectives des figures, qui marque un pas considérable pour la science ». Comme nombre de ceux que je cite dans mon tableau initial, la trajectoire de Poncelet est originale. Sorti de Polytechnique en 1810, il participe aux guerres impériales comme lieutenant du génie. Laissé pour mort sur le champ de bataille de Krasnoï près de Smolensk, à la suite de la défaite des troupes du maréchal Ney, il est emprisonné à Saratoff sur les bords de la Volga en 1813 et 1814. Il a 24 ans et, pendant ses deux

(28) Chasles Michel, Épernon 1793 – Paris 1880.

ans d'emprisonnement, il rédige, sans source documentaire disponible et uniquement à partir de ce qu'il se souvient des mathématiques, sept cahiers qui serviront de fondement à son traité. Par la suite, comme il le déclare dans sa préface, délaissant l'étude de la géométrie, il se consacre à l'enseignement des sciences mécaniques et industrielles n'ayant « d'autre but que de se rendre utile à la classe ouvrière et à la jeunesse de nos Écoles ; il voulait leur inspirer l'amour des vérités éternelles de la science, la haine de l'intrigue et des sophistiques subtilités d'un charlatanisme cupide … ». Ses nombreuses publications vont des *Cours aux ouvriers messins* à l'*Exposé historique des principales inventions concernant les machines outils* en passant par *Sur le nouveau système d'écluse à flotteur*. Ses travaux en géométrie reposent sur le principe de continuité qui consiste en ce que « si l'on conçoit qu'une figure donnée vienne à changer de situation par un mouvement progressif et continu des parties dont elle se compose, sans cependant violer la liaison et la dépendance primitivement établies entre elles, les relations ou propriétés métriques qui concernent la figure dans la situation première demeurent applicables, dans leur forme générale, à toutes les figures dérivées sans autre changement que celui des dénominations simples plus et moins qui peuvent s'intervertir entre elles dans les relations … », l'essentiel de son travail étant les propriétés projectives des figures dont le principe est résumé ci-dessous.

Les travaux de Poncelet en géométrie sont certes importants, mais on aurait pu penser que, quarante ans après l'écriture de son traité, il aurait accepté de remettre en question certaines de ses certitudes. Toujours est-il que, jusqu'en 1864, il semble avoir été imperméable aux travaux réalisés sur la représentation géométrique des complexes. Il est contemporain de Cauchy[29] et tout ce qu'il écrit laisse supposer une bonne connaissance de l'évolution des mathématiques. Ainsi connaît-il les travaux contemporains puisqu'il cite Cauchy, mais aussi Coriolis, Plücker et bien d'autres…, mais il maintient ses positions dans une note complémentaire. L'association de « $\sqrt{-1}$ » à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, la « perpendicularité » est le résultat d'analogies trompeuses quoique séduisantes, ce qui ne l'empêche pas lui-même de pratiquer l'analogie. Il déclare que la courbe représentative en coordonnées polaire de $\rho = a\mathrm{e}^{\theta}$ étant une spirale logarithmique, celle de $r = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\alpha}$ est celle d'une spirale logarithmique … imaginaire. « … le calcul algébrique n'est point à proprement parler une science, mais bien un art, un mécanisme assujetti à des règles, à des procédés invariables qui s'appliquent à nos premières conceptions géométriques, lorsqu'elles se bornent à formuler des rapports préexistants entre certaines grandeurs des figures, etc ? Ce mécanisme servant à découvrir d'autres rapports qui découlent des premiers, soulage la mémoire, abrège le travail de l'esprit, mais jamais il ne le dirige ; car dans son mystérieux symbolisme, il cache trop souvent, non pas simplement des erreurs matérielles, mais des contrevérités ou d'insignifiantes vacuités. »

(29) Cauchy Augustin, Paris 1789 – Sceaux 1857.

78. Il résulte de la nature même des propriétés projectives, telles que nous venons de les définir, que, voulant établir une semblable propriété sur une figure donnée, il suffira de démontrer qu'elle a lieu pour l'une quelconque de ses projections. Or, parmi toutes les projections possibles de cette figure, il peut en exister qui soient réduites à des circonstances plus simples, et sur lesquelles la démonstration ou la recherche qu'on se propose devienne d'une première facilité et n'exige qu'un léger coup d'œil, ou, tout au plus, la connaissance de quelques propriétés élémentaires de la Géométrie. Par exemple, la figure renfermant, en particulier, une section conique, pourra être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la section conique sera remplacée par une circonférence de cercle, et cette seule remarque suffira pour ramener les questions les plus générales des sections coniques à d'autres qui soient purement élémentaires.

On conçoit, d'après cela, de quelle importance peut être la doctrine des projections pour toutes les recherches géométriques, et combien les considérations qu'elle offre peuvent abréger et faciliter ces recherches. C'est ainsi que déjà, quelques géomètres de notre époque démontrent, d'une manière fort élégante, diverses propriétés nouvelles et curieuses de la Géométrie de la règle, qu'il serait aussi pénible que difficile de démontrer de toute autre manière.

A l'égard de l'équation symbolique

[illegible]

à laquelle M. Français arrive dans son Mémoire pour exprimer la valeur [illegible] je montre à la fin de la Note [illegible] qu'elle revient à supposer que toutes [illegible] perpendiculaires à un [illegible] [illegible] imaginaire [illegible] Or, il serait arrivé à des conséquences tout aussi [illegible] relativement à [illegible] ou à la valeur du signe [illegible] s'il eût substitué à priori la considération de l'hyperbole équilatère à celle du cercle, etc.

Est-ce sa profonde inimitié pour Cauchy qui avait à l'époque déjà bien synthétisé cette question qui le conforte dans cette position ? Cauchy était celui qui avait recalé ses mémoires proposés à l'Académie. « Or, j'insiste quoique bien à regret, M. Cauchy était peu apte à comprendre et goûter les doctrines de la géométrie, ce dont on se convaincra en lisant le mémoire sur la synthèse algébrique, où cet académicien reproduit un peu tardivement (1843) les méthodes de son ami et affidé scientifique M. Gergonne, qui consistent à traiter, sans calcul ni éliminations laborieuses, certaines questions de géométrie élémentaire, relatives aux contacts des cercles, des sphères etc. ». Il faut le reconnaître, Cauchy, potentat incontournable des mathématiques semble avoir souvent omis de considérer de nombreux travaux à leur juste valeur. Il a ainsi gardé « sous le coude » les travaux des jeunes Évariste Galois[30] et Niels Henrik Abel[31] qui se révélèrent bien plus tard, être fondamentaux. Quant à Poncelet, il persiste et signe :

> *Notes complémentaires relatives au symbole d'imaginarité $\sqrt{-1}$ et à la continuité en général.*
>
> Je réunis ici, sous un même titre, les résumés analytiques de deux écrits fort anciens, déjà rappelés à diverses occasions, et dont le premier concerne plus particulièrement la Géométrie de situation.
>
> 1. Les signes -1 et $\sqrt{-1}$, considérés isolément et abstraction faite de leurs attributs implicites ou explicites, ont une origine purement algébrique, conventionnelle et analogique ; ils ne sauraient dériver à priori d'aucune considération purement géométrique. Cela résulte des Notes du IIIe Cahier de ce volume, où je prouve que les relations à deux termes de la Géométrie rationnelle ne comportant explicitement aucun signe de position, il est impossible d'admettre les interprétations graphiques proposées, à diverses époques, pour ces signes, notamment : que le symbole $\sqrt{-1}$ est le signe algorithmique de *perpendicularité* ; en un mot, comme je l'ai dit, ces interprétations ne doivent être considérées que comme le résultat d'analogies trompeuses, quoique séduisantes, relatives à l'expression analytique des *cordes* ou *doubles ordonnées imaginaires* des coniques.

Il utilise le terme imaginaire en géométrie. Ainsi, si une droite rencontre une conique en deux points, il la nomme *corde* ou *sécante réelle* et les points, *points d'intersection réels*. Quand la droite n'est plus sécante, les points d'intersection deviennent *imaginaires*, une droite inconstructible étant dénommée *droite imaginaire*.

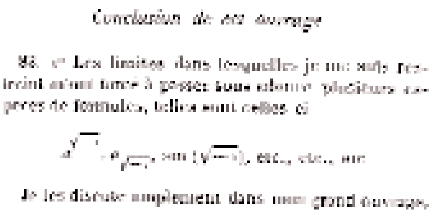
Il me paraît que ce principe de continuité qui permet de passer d'une figure à une autre avec de la sorte une forme de continuité dans les calculs ait été une des raisons qui l'ont amené à persister. Quand il passe si aisément de la spirale logarithmique à ce qu'il appelle spirale logarithmique imaginaire, il applique ce principe et, comme ses droites imaginaires, sa spirale n'existe que dans l'imagination. Il se laisse aveugler par deux écritures proches mais qui n'ont pas du tout le même sens.

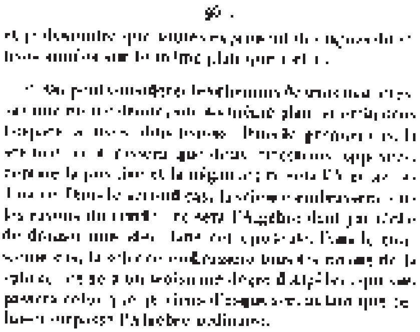
Ceux qui construisent

J'en viens maintenant à ceux qui se sont attelés à la construction d'une interprétation géométrique des imaginaires. Je les ai situés en trois groupes non exclusifs ; le premier a été sans issue : l'interprétation par des aires négatives ; les deux autres correspondent aux interprétations communément admises : l'orthogonalité et les transformations du plan. Je n'ai pas le temps de passer en revue tous leurs travaux, mais je vais d'abord faire quelques remarques générales sur les différents auteurs cités. Wallis, Euler[32], Gauss[33] et Cauchy sont toujours connus, les autres sont pour certains de quasi inconnus et plusieurs n'étaient pas

(30) Galois Évariste, Bourg la Reine 1811 – Paris 1832.
(31) Abel Niels Henrik, Ile de Finnay 1802 – Arendal 1829.
(32) Euler Léonard, Bâle 1707 – Saint Pétersbourg 1783.
(33) Gauss Carl Friedrich, Brunswick 1777 – Göttingen 1855.

mathématiciens « professionnels ». Buée[34], abbé organiste à Saint Martin de Tours, émigre en Angleterre le 10 août 1793 et ne produit qu'une seule communication mathématique publiée dans les actes de la Royal Society of London. Argand[35] est teneur de comptes à Paris et Wessel est arpenteur-cartographe du roi de Danemark. Pour ce qui a été publié sous le nom de Mourey, on n'a que peu d'idées sur qui cela peut être. Un mathématicien très connu ? Peut-être un groupe d'élèves de Polytechnique si je m'en réfère à notre collègue Henry Plane ? L'ouvrage *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* publié en 1828 est réédité en 1861, puis Mourey est cité par Lefébure de Fourcy dans ses *Leçons d'algèbre*. Laissant le cite dans sa traduction du *Traité des équipollences* de Bellavitis[35] en 1854 et Wood dans ses *Elements of coordinated geometry*. Je serai tenté de dire qu'il s'agit peut-être d'un précurseur du groupe Bourbaki qui a échoué. En effet ne déclare-t-il pas dans sa préface : « Pour développer complètement cette théorie, il faudrait refaire toutes les branches des mathématiques. Jusqu'ici je n'ai pu m'occuper, comme on le pense bien, que des principes fondamentaux, et cependant j'ai composé un manuscrit assez considérable. Mais, les circonstances ne me permettant pas de faire imprimer un ouvrage aussi volumineux, j'ai pris le parti de publier d'abord cet opuscule, qui n'en est qu'un faible abrégé » ? De fait l'opuscule introduit un vocabulaire nouveau et des notations nouvelles qui resteront sans postérité.



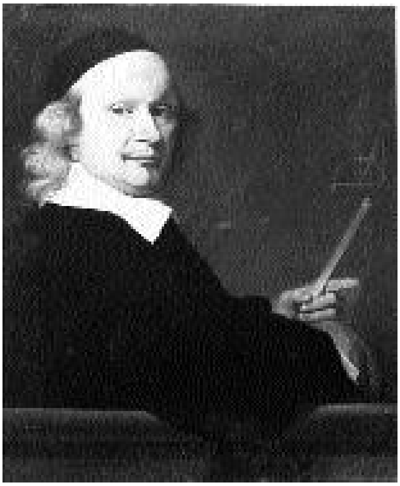


Une question a été plusieurs fois débattue : quel impact réel ont eu ces divers écrits sur la finalisation d'une représentation géométrique des complexes ? Pour l'un d'entre eux, celui de Wessel, il est évident qu'il n'a pas eu d'impact. S'il faut reconnaître sa grande qualité, l'interprétation géométrique y est explicitée aussi clairement qu'on pourrait le faire aujourd'hui, son expression en langue danoise en a fait un ouvrage totalement méconnu au moment où sa connaissance aurait été cruciale. Pour les autres, même avec quelques années de retard, ils ont été connus et cités. Ils ont donc eu une action sur la pensée mathématique et leurs parutions quasi simultanées m'inclinent à estimer que, contrairement à l'époque de Descartes, la question était suffisamment « mûre » pour arriver à être résolue.

(34) Buée Adrien-Quentin, fin XVIII^e – début XIX^e siècle.
(35) Argand Jean-Robert, Genève 1768 – Paris ? 1822.
(36) Bellavitis Giusto, Bassano 1803 – Tezze (Italie) 1880.

Je ne vais ici parler que de trois intervenants dans cette histoire, Wallis, Buée et Argand.

John Wallis, des tentatives tous azimuts



Wallis, contemporain de Newton, est professeur de géométrie à Oxford de 1649 à 1703. C'est un des fondateurs de la Royal Society équivalente à l'Académie des Sciences en France. Il publie en 1685 un traité *Traitise of Algebra, Both historical and practical*. Comme je l'ai annoncé, il commence par justifier l'existence des nombres négatifs en examinant les déplacements d'un homme sur une droite en avant et en arrière d'un point A. Il explique que lorsqu'on en vient à une application physique, une quantité moindre que rien indique une quantité réelle, comme avec le signe plus, mais dans un sens contraire. Cette relation entre le plus et le moins le conduit à vouloir interpréter les carrés négatifs en cherchant à définir des aires négatives sur le même mode. Comme pour les reculs, ce n'est qu'une question de langage, les aires négatives reviennent à des surfaces perdues, surfaces carrées dont le côté est donc imaginaire. L'induction n'est pas ici très performante parce que c'est une manière bien compliquée de dire les choses et surtout parce qu'on n'en voit pas bien l'utilité opératoire.

[illegible]

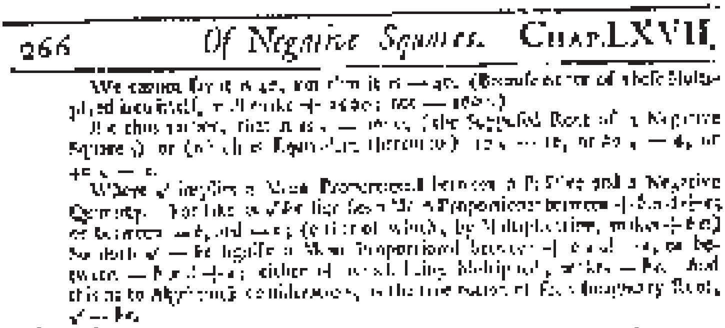
As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or + 10. (Because + 30 — 20 = 10.) Or, which is all one, 1600 Square Perches. (For the English Acre being Equal to a Plane of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160; 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting a Negative Root,) — 40.

But if then in a Third place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be — 10 Acres. (Because + 30 — 20 — 20 = — 10.) That is to say, The Gainer hath 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, There is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.

And hitherto, there is no new Difficulty arising; nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that √1600 is ambiguous; and may be + 40, or — 40. And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.

But now (supposing this Negative Plain, — 1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? And if so, What shall this Side be?

We


266 *Of Negative Squares.* CHAP. LXVII.

Des Carrés Négatifs et leurs Racines Imaginaires en Algèbre

Par exemple, supposons que dans un endroit, on gagne sur la mer 30 Acres, mais que dans un autre endroit on perde 20 Acres. Si maintenant il est demandé : combien d’Acres a-t-on gagnés en tout ?

La réponse est, 10 Acres ou + 10 (parce que 30 – 20 = 10). Ce qui fait 1 600 perches carrées (parce que l’Acre anglaise est égale à une surface de 40 perches de longueur, et de 4 de large, dont l’aire fait 160 ; 10 Acres feront 1 600 Perches Carrées). Représenté sous la forme d’un carré cela nous donne un côté de 40 Perches ou (en admettant la Racine Négative) –40.

Mais si en un troisième lieu, nous perdons 20 Acres de plus et que la même question est à nouveau posée : combien avons-nous gagné en tout ? La réponse doit être –10 Acres (parce que 30 – 20 – 20 = –10). Ce qui veut dire, le Gain est 10 Acres moins que rien qui est la même chose que de dire : il y a une perte de 10 Acres ou 1 600 Perches Carrées.

Et jusqu’ici il n’y a pas de nouvelle difficulté à apparaître ni autre impossibilité que celles que nous avons déjà rencontrées (en supposant une quantité négative ou quelque chose moins que rien). Excepté seulement que $\sqrt{1600}$ est ambigu ; et peut être + 40 ou – 40. Et que d’une telle ambiguïté il ressort que les équations quadratiques admettent deux racines.

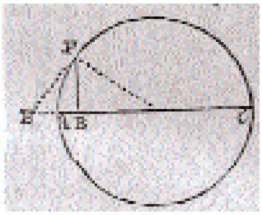
Mais maintenant (en supposant cette surface Négative, –1 600 Perches ayant la forme d’un Carré) ce Carré supposé ne pourrait-il avoir un côté ? et si c’est ainsi, quel doit être ce côté ?

Nous ne pouvons pas dire c’est 40 et pas plus –40 (parce que chacun d’eux multiplié par lui-même donnera +1 600 et non –1 600) mais que **c’est plutôt $\sqrt{-1600}$ (la Racine Supposée d’un Carré Négatif) ou (ce qui est encore équivalent)** 10 $\sqrt{-16}$ ou 20 $\sqrt{-4}$ ou 40 $\sqrt{-1}$.

Cette interprétation volontariste est un peu un passage en force. Ce qui a été concédé sur les nombres négatifs devrait l’être aussi ici par analogie. Sans éclaircir pourquoi ce qui est vrai sur une droite devient vrai sur un plan. Il est d’ailleurs à remarquer que l’interprétation des nombres négatifs est figurée graphiquement :

alors qu'aucune représentation n'est associée à l'interprétation des aires négatives. De plus cette interprétation n'a pas d'utilité opérationnelle pertinente. Il est obligé d'en passer par des aires gagnées ou perdues, donc des aires évaluées par des mesures usuelles pour pouvoir effectuer des calculs.

Sa deuxième approche est celle des moyennes proportionnelles : « $\sqrt{\ }$ implique une moyenne proportionnelle entre une Quantité Positive et une Quantité Négative. Donc de la même manière que $\sqrt{bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre +b et +c ou entre –b et –c (chacun d'entre eux donne par multiplication +bc), $\sqrt{-bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre +b et –c ou entre –b et +c, chacun d'entre eux étant multiplié donne –bc. Et ceci considéré algébriquement est la vraie nature des Racines Imaginaires ». Comme je le faisais remarquer plus avant, la question des quantités négatives est considérée comme réglée et cette notion calculatoire des moyennes proportionnelles qui a une interprétation géométrique quand il s'agit de longueurs va être étendue à des nombres négatifs.



La même chose représentée en Géométrie

Ce qui a **été déjà dit de $\sqrt{-1}$ en Algèbre** (en tant que moyenne proportionnelle entre une quantité Positive et une quantité Négative) **peut nous être représenté en Géométrie**.
Si par exemple en avant de A, je prends AB = + b ; et en avant de cela, BC = + c (faisant AC = + AB + BC = + b + c, le Diamètre d'un cercle) alors il s'agit du Sinus ou Moyenne proportionnelle BP = $\sqrt{bc}$.
Mais si en arrière de A, je prends AB = –b, et alors en avant de ce B, BC = + c (faisant AC = – AB + BC = – b + c, le Diamètre du cercle), alors il s'agit de la Tangente ou Moyenne Proportionnelle BP = $\sqrt{-bc}$.
Donc là où $\sqrt{bc}$ signifie un Sinus ; $\sqrt{-bc}$ signifie une tangente pour le même Arc du (même cercle) AP, du même point P au même Diamètre AC.

Il s'agit là aussi d'un « passage en force ». Il n'y a rien à redire à la première considération bien connue, les triangles rectangles ABP et CPB sont de même forme, d'où les rapports $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{BP}$ et donc $BP^2 = AB \times BC$, soit BP = $\sqrt{bc}$ d'après les données. Mais nous entrons dans la confusion pour la suite, pour que le cercle soit identique la valeur de c ne peut plus être la même et le nouveau segment BP ne correspond plus à la construction géométrique d'une moyenne. L'angle droit qui était en B dans la première construction est passé en P sans que cela soit analysé. Il s'agit là d'un prolongement *a priori* sans fondement identifié. Tous les chapitres suivants sont basés sur ce même principe : les situations imaginaires apparaissent quand les calculs effectués avec un angle droit considéré en un point donné sont prolongés à une situation où l'angle droit n'est plus au même point.

À défaut de rigueur, toutes ces tentatives ont le mérite d'essayer de trouver une issue par une interprétation géométrique qui s'inscrit dans des interprétations déjà fondées, mais, par là-même, ne conduisent pas à la bonne réponse qui demande de sortir des cadres préexistants.

Buée, opération arithmético-géométrique et rotation

L'abbé Buée a rédigé un « *Mémoire sur les quantités imaginaires* » qui est présenté à la Royal Society de Londres en 1805. Son mémoire commence par asseoir une interprétation de + et de – sur laquelle il n'y a rien à redire. Ensuite il perçoit que les nombres indiquent en géométrie plus qu'il n'y paraît, qu'ils peuvent être considérés comme une association longueur-direction.

« Considérés comme signes d'**opérations arithmétiques**, + et – sont les signes, l'un de l'**addition**, l'autre de la **soustraction**.

Considérés comme signes d'**opérations géométriques**, ils indiquent des **directions opposées**. … Lorsqu'on décrit une ligne d'une longueur déterminée dans une direction déterminée, on fait deux choses 1° on donne à cette ligne sa **longueur** ; 2° on lui donne sa **direction**. La première de ces opérations est purement **arithmétique**. La seconde est purement **géométrique**. Dans la première on fait abstraction de la direction. Dans la seconde on fait abstraction de la longueur. Lors donc qu'on réunit ces deux opérations, on fait réellement une opération **arithmético-géométrique**. »

Lui aussi illustre concrètement ces notions à l'aide de temps passé et de temps futur et aussi avec des propriétés et des dettes. Il en vient alors à l'objet principal de son mémoire $\sqrt{-1}$.

Du Signe $\sqrt{-1}$.

10. Je mets en titre, *Du signe* $\sqrt{-1}$, et non, *De la quantité ou De l'unité imaginaire*. $\sqrt{-1}$; parceque $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif.

Mais que veut dire ce signe ? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes + et —. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est ni additive, ni soustractive, ni égale à zéro. La

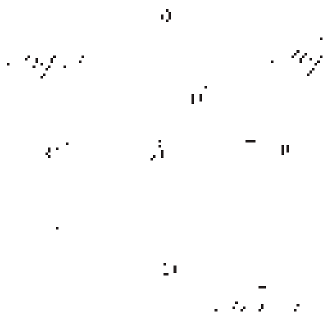
E 2

28 *M. Buée on imaginary Quantities.*

qualité marquée par $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qu'indique +, ni à celle qui est désignée par −. Qu'est-elle donc?

Pour le découvrir, supposons trois lignes égales AB, AC, AD, (Plate II. Fig. 1.) qui partent toutes du point A. Si je désigne la ligne AB par +1, la ligne AC sera −1, et la ligne AD, qui est une moyenne proportionelle entre AB et AC, sera nécessairement $\sqrt{-1^2}$, ou plus simplement, $\sqrt{-1}$. Ainsi $\sqrt{-1}$ est le signe de la PERPENDICULARITÉ, dont la propriété caractéristique est, *que tous les points de la perpendiculaire sont également éloignés de points placés à egales distances, de part et d'autre de son pié.* Le signe $\sqrt{-1}$ exprime tout cela, et il est le seul qui l'exprime.

Ce signe mis devant a (*a* signifiant une ligne ou une surface) *veut donc dire : qu'il faut donner à* a *une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donneroit, si l'on avoit simplement* + a *ou* − a.



Comme Wallis l'avait tenté, il s'essaye d'abord à une interprétation par des aires négatives un peu plus sophistiquée. Il y introduit la notion de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui est une bonne intuition car, effectivement, on peut associer à « $\sqrt{-1}$ » une rotation de cet angle. Reste que l'utilisation qu'il en fait ne le mène guère plus loin que Wallis. Il est évident que la phrase « Or A étant le point de départ il est clair que, si le carré ABCD est positif, le carré AB′C′D′ doit être négatif, et vice et versa » est une affirmation qui n'est pas fondée sur quoi que ce soit.

11. Voici une autre manière de parvenir au même résultat.

Soient AB, AD (Fig. 2.) deux côtés contigus du carré ABCD. Supposons AB $= \pm 1$, et par conséquent AD $= \pm 1$, et mettons en A le point de départ de la description des lignes AB et AD, ensorte que AB et AD portent le même signe $+$ ou $-$, et que le carré ABCD soit positif.

Maintenant faisons faire à ce carré ABCD un quart de révolution autour du point A pris comme centre. Après ce mouvement, le point B sera en B', le point C en C', et le point D en D'. Chacune des lignes AB, BC, CD, DA, prendra une situation perpendiculaire à celle qu'elle avoit, et, au lieu du carré ABCD, on aura le carré AB'C'D'. Or A étant le point de départ, il est clair que, si le carré ABCD est positif, le carré AB'C'D' doit être négatif, et *vice versâ*. Par

M. Buée on imaginary Quantities. 29

conséquent si ABCD $= + 1^2$ dont le côté AB ou BC ou CD ou DA est $= \pm 1$, on a AB'C'D' $= - 1^2$ dont le côté AB' perpendiculaire à AB, ou B'C' perpendiculaire à BC, ou C'D' perpendiculaire à CD, ou D'A perpendiculaire à DA est $= \pm \sqrt{-1}$. On voit donc que, si l'on donne à tous les côtés d'un carré des positions perpendiculaires à celles qu'ils ont, *sans cependant changer leurs positions respectives et en faisant le plus petit mouvement possible* (c'est-à-dire, en n'ajoutant pas le mouvement de translation à celui de rotation) on obtient le même résultat qu'en joignant le signe $\sqrt{-1}$ au signe de ces côtés.

Le souci de Buée comme de ses prédécesseurs est d'emporter la conviction par l'efficience de ses interprétations sur la géométrie et les calculs. Cela commence avec des sommes dues et non dues, des carrés qui ont une épaisseur et enfin des problèmes de marbriers qui se posent des questions sur des cubes pleins et des cubes vides et les résolvent d'une manière très compliquée. Tout ceci est peu convaincant. Par contre, plus loin, il revient sur son carré qui tourne et en arrive à une conclusion beaucoup plus intéressante. John Warren(37), pasteur à Graveley dans le Cambridgeshire qui n'était pas scientifique de profession, publie en 1829 un mémoire « *Considération sur les objections élevées contre la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives* » dans lequel il justifie la réalité des imaginaires par une approche dans le domaine de la physique par la composition de mouvements en dynamique. Il attire négativement l'attention sur cette partie du mémoire de Buée en disant qu'il ne peut comprendre la preuve que

(37) Warren John, Bangor (Angleterre) 1796 – Bangor 1853)

$\left(\sqrt{-1}\right)^n = n\sqrt{-1}$ qui associe imaginaires et rotation dans le plan. La confusion provient d'une extension inadéquate de notation, la première partie $\left(\sqrt{-1}\right)^n = n \cdot \mathrm{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ étant suffisamment explicite pour indiquer que la multiplication de $\sqrt{-1}$ n fois par lui-même correspondait à une succession de n rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\frac{e^{+nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = n\mathrm{T}(x)$. Donc $(\sqrt{-1})^n =$

$= \frac{e^{\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}}{2}$ (n étant un nombre entier impair) $=$

$= n \,.\, \mathrm{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = n(\sqrt{-1})$.

72 M. Buée on Imaginary Quantities.

58. Cette équation, toute singulière qu'elle peut paroître, n'est que l'expression algébrique du principe posé au commencement de ce mémoire, savoir, *que* $\sqrt{-1}$ *est le signe de la perpendicularité, abstraction faite de toute longueur de ligne.* En effet le premier membre $(\sqrt{-1})^n$ marque que *le signe* $\sqrt{-1}$ *de la perpendicularité* est répété n fois, c'est-à-dire, est attaché n fois à la même ligne 1. Le 2d. membre $n \,.\, \mathrm{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ marque que l'arc $\frac{\pi}{2}$ qui est *la mesure de la perpendicularité* est tracé n fois.

La bonne interprétation de Buée est d'ailleurs confirmée plus loin puisqu'il dépasse la seule notion d'orthogonalité en étendant la notion à d'autres angles de mesures rationnelles :

$(\sqrt{-1})^{\pm\frac{n}{m}} = \pm\frac{n}{m} \,.\, \mathrm{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ exprimeront l'inclinaison $\frac{\pi}{2m}$ répétée n fois dans le sens $+$ ou dans le sens $-$.

Robert Argand, une définition et des modes opératoires clairs

C'est à la suite d'un article de J.-F. Français[38], professeur à l'École Impériale d'Artillerie et du Génie, paru en 1813 dans les *Annales de Mathématiques pures et appliquées* dites aussi *Annales de Gergonne*, que Robert Argand déclare être l'auteur de l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* publié anonymement en 1806. Argand est né à Genève en 1768 et est décédé à Paris en 1822 où il était « teneur de livres ». C'est à peu près tout ce que nous connaissons de lui, nous n'avons aucune indication sur les études qu'il a pu suivre. Je l'ai déjà fait remarquer, Argand, comme les autres, débute avec les nombres négatifs et donne des illustrations avec des poids sur les plateaux d'une balance et des fortunes actives et passives exprimées en Francs, Révolution oblige. Plus habilement que ses prédécesseurs dans tous ses raisonnements il dissocie clairement grandeur et direction, « la seconde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1° l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument ; 2° l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent rapport qui est l'identité ou l'opposition. »

La suite est limpide et n'appelle pratiquement aucun commentaire.

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$
$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes

— 6 —

différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : +x :: +x : -1.$$

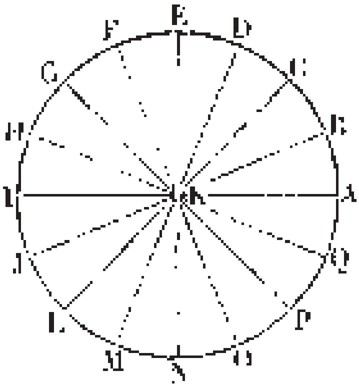
On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de o la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (*fig.* 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condi-

tion à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.



comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Par une marche analogue, on pourra insérer de nouvelles moyennes proportionnelles entre les quantités dont il vient d'être question. En effet, pour construire la moyenne proportionnelle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KE}$, il faudra tirer la ligne CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales, et la moyenne cherchée sera $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. La ligne GKP donnera également les moyennes entre $\overline{KE}$ et $\overline{KI}$ ou entre

$\overline{KA}$ et $\overline{KN}$. On obtiendra de même les quantités $\overline{KB}$, $\overline{KD}$, $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$ pour moyennes entre $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ et $\overline{KE}$, . . . , et ainsi de suite. On pourra pareillement insérer un plus grand nombre de moyennes proportionnelles entre deux quantités données, et le nombre des constructions qui pourront résoudre la question sera égal au nombre des rapports que présente la progression cherchée. S'il s'agit, par exemple, de construire deux moyennes, $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB},$$

il faut qu'on ait

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB},$$

le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases AK, PK, QK. Or on peut y

Fig. 2.

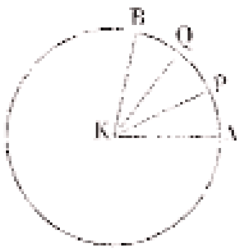


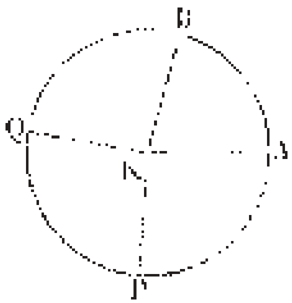
Fig. 2 *bis*.

parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales : 1° l'angle AKB ; 2° l'angle AKB, plus une

— 9 —

circonférence ; 3° l'angle AKB, plus deux circonférences.

Fig. 2 ter.



ce qui donnera les trois constructions représentées par les *fig.* 2, 2 *bis*, 2 *ter* (*).

Le tour de force pourrait-on dire est qu'Argand parvient à présenter son interprétation géométrique sans avoir recours à un repère du plan, mais avec l'aide d'un cercle « trigonométrique ». Il pousse même un peu plus loin son interprétation en se rapprochant de la notion de vecteur : « Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{\mathrm{KA}}$, $\overline{\mathrm{KB}}$, $\overline{\mathrm{KC}}$, …, il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique K ; mais que ces relations ont également lieu, si l'on suppose que chaque expression, comme $\overline{\mathrm{KA}}$, **désigne en général une grandeur égale à KA, et prise dans la même direction**… ». Il pressent aussi la différence de nature des opérations en introduisant une nouvelle notation évacuant l'écriture $\sqrt{-1}$.

quantités imaginaires, en écrivant, par exemple, $\sim a$ et $\top a$, au lieu de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, les signes $\sim$ et $\top$ étant positifs et négatifs réciproques.

Cette proposition n'aura pas de suite. Mais, plus important, il définit l'addition et la multiplication de ce qu'il appelle lignes dirigées. Pour l'addition, il s'agit quasiment d'une addition vectorielle :

En appliquant ce même principe aux lignes des autres ordres, on conclura que, les points K, P, R étant quelconques, on a toujours

$$\overline{\mathrm{KP}} + \overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{KR}} ;$$

et pour la multiplication :

> Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit : c'est encore une multiplication logarithmique. Il n'est pas nécessaire de montrer que cette règle a lieu pour un nombre quelconque de facteurs.
>
> Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\overline{KB}$, $n.\overline{KC}$, ..., m, n, ... étant des coefficients ou lignes primes positives ; et le produit sera
>
> $$(mn\ldots).(\overline{KB}.\overline{KC}\ldots) = (mn\ldots).\overline{KP}.$$
>
> Or le produit de la ligne prime positive $(mn\ldots)$ par le rayon $\overline{KP}$ n'est autre chose que cette même ligne tirée dans la direction de ce rayon.
>
> La division s'opérera par une marche inverse, qu'il serait superflu de détailler.

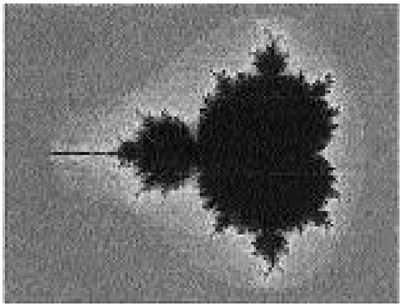
Avec cet écrit, même s'il lui faudra quelques années pour attirer l'attention et déclencher des discussions, on peut considérer qu'une représentation géométrique des complexes est enfin parvenue à émerger. Il restera à préciser leur utilisation dans d'autres domaines comme celui des transformations du plan que Buée avait entrouvert. L'initiation du développement des théories vectorielles avec Bellavitis (premiers travaux publiés en 1835) complétera l'utilisation générale qui peut être faite des imaginaires en géométrie. L'unification finale se faisant avec le développement des notions de structure largement entamé par Évariste Galois dans un texte de 1830.

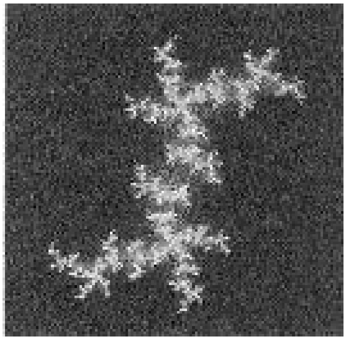
Nouvelle technologie et relance de la représentation

C'est l'étude de l'état des systèmes dynamiques qui a relancé la représentation géométrique des complexes. Mon propos est de dire seulement quelques mots sur la question. En France Fatou(38), Julia(39), Mandelbrot(40) et plus tard Adrien Douadi(41) sont de ceux qui ont travaillé sur la question. L'étude dynamique d'une application

(38) Fatou Pierre, Lorient 1878 – Pornichet 1929.
(39 Julia Gaston, Sidi Bel Abbès (Algérie) – Paris 1978.
(40) Mandelbrot Benoît, XX-XXIe siècle, Watson Research Center and Yale University NY (USA).
(41) Douadi Adrien, XX-XXIe siècle, professeur à Paris XI.

comporte la recherche de points fixes ou points d'équilibre ($x = f(x)$) et un point x_0 est dit attractif si tout point y_0 voisin de x_0 a une image $y_1 = f(y_0)$ plus proche de x_0 que ne l'est y_0. Un cycle est une famille finie (x_1, x_2, …, x_k) de points tels que $x_2 = f(x_1)$; $x_3 = f(x_2)$; … ; $x_{k+1} = f(x_k) = x_1$ et l'orbite d'un point quelconque x est la suite des points $x_n = f^n(x)$… L'étude dynamique des polynômes d'une variable complexe de forme simple $f_c : z \mapsto z^2 + c$ par n itérations mène à des polynômes de degré 2^n. L'ensemble de Julia est l'ensemble des points z tels que f_c^n ne tende pas vers l'infini. Une construction manuelle ne permettait d'obtenir qu'une vue très partielle de la représentation graphique. Ordinateurs et tables traçantes ont permis d'en avoir des représentations « rapides » et plus complètes. Le classement des points c tels que l'ensemble de Julia soit connexe conduit à l'ensemble de Mandelbrot. Pour confirmer la nécessité des ordinateurs, je cite Adrien Douadi : « Sur un micro ordinateur, un tel programme n'est pas long à écrire, mais il prend plusieurs heures (plusieurs jours ?) pour tourner. »





Ici nous arrivons au sujet de la conférence de Jean-François Colonna que je vous convie à voir ou revoir dans ces actes. Je voulais terminer par une fractale en construction et je me dois de vous faire part de ma difficulté à construire des images fractales en s'en tenant aux indications que nous rencontrons dans divers textes. Les coefficients et divers nombres indiqués m'ont amené à me poser la question des approximations qui interviennent nécessairement dans des calculs itératifs. Jean-François Colonna a répondu en grande partie à ces interrogations.

Depuis cette obscure troisième sorte de chose comme disait Cardan jusqu'à ces images obtenues par programmation d'ordinateur, il y a une distance de quatre siècles. Il me semble que l'acceptation de la représentation géométrique des imaginaires illustre l'histoire de multiples progrès en mathématiques. C'est la nécessité de changement de point de vue, la représentation des imaginaires ne pouvait se résumer à une simple extension de la représentation des positifs et des négatifs. C'est avoir le souci de la rigueur mais savoir aussi la relativiser quand elle devient un obstacle. Et c'est enfin admettre que la réponse aux difficultés d'interprétation et d'utilisation demande souvent un temps parfois long de « maturation » sans lequel, même en disposant des outils adéquats, la mise à jour des bonnes réponses n'est pas réalisable.

Bibliographie

D'Alembert
– Réflexion sur la cause générale des vents (1747).
Argand
– Essai sur la manière de représenter Les Quantités Imaginaires, réédition Albert Blanchard (1971).
Bombelli
– L'Algebra, édition intégrale, Feltrinelli (1966).
– L'Algebra, Fragments, traductions G. Hamon, Irem de Rennes (1996).
Buée
– Mémoire sur les Quantités Imaginaires, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, part 1, III, Bulmer and co (1806).
Cardan
– Artis Magnæ sive de regulis algebraicis (1545).
– The Great Art or The Rules of Algebra. Traduction et Édition T. R. Witmer, M.I.T. Press (1968).
– Ma Vie, collection UN SAVANT, UNE ÉPOQUE, Belin (1991).
Chasles
– Rapport sur les progrès de la géométrie, Imprimerie Nationale (1870).
Descartes
– La Géométrie, réédition A. Gabay (1991).
Douadi
– La dynamique du lapin, Vidéo. Écoutez voir (1996).
– Itération de polynômes complexes, Courrier du CNRS, supplément au n° 62, Image des mathématiques (1985).
Fibonacci
– Liber Abaci, scritti di Leonardo Pisano, Boncompagni Rome (1857).
Al Khwarizmi
– Les Mathématiques Arabes, A. Youschkevititch, traduction Cazenave et Jaouich, Vrin (1976).
– Matériaux pour l'étude de la tradition algébrique arabe, A. Djebbar, Université Paris Sud (1996).
Mandelbrot
– Les Objets Fractals, Flammarion (1989).
Mourey
– La Vraie Théorie des Quantités Négatives et des Quantités Prétendues Imaginaires, Reproduction Irem de Dijon (1992).
Poncelet
– Applications d'Analyse et de Géométrie T 2, Gauthier-Villars (1864).
Wallis
– Algebra, édition en anglais (1673).
Warren
– On the Geometrical Representation of Algebraic Quantities, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, XXVIII, Bulmer and co (juin 1829).

Ouvrages généraux
La Mémoire des Nombres, actes du X^{e} colloque inter-Irem d'Épistémologie et d'Histoire des Mathématiques, Irem Basse Normandie (1997).
Une Histoire Géométrique des Imaginaires, G. Hamon, Irem de Rennes (1997).
Images, imaginaires, Imagination, Irem, Ellipses (1998).
Les Chantiers du Chaos, Irem de Poitiers (1998).