

# Constructions géométriques

J.M. Arnaudiès et P. Delezoide

Cette présentation fait suite à un article paru dans le bulletin 446 de l'APMEP, qui présente un historique des constructions géométriques impossibles à la règle et au compas, mais réalisables par intersections de coniques. Elle complète l'article paru dans le bulletin 447 dont l'objectif était d'apporter des démonstrations précises de non constructibilité à la règle et au compas. Dans cette présentation-ci l'origine algébrique de la construction de l'heptagone régulier est expliquée de manière plus détaillée; on trouvera aussi des constructions analogues des 13 et 17-gones réguliers. Enfin nous terminons par une discussion de la complexité au sens de Lemoine d'une construction du 17-gone régulier.

## § 2 Aperçus algébriques

### 2.1 Caractérisation algébrique de la constructibilité à la règle et au compas

#### Introduction

On se place ici dans un plan affine euclidien. Il sera question principalement de constructibilité et de non constructibilité à la règle et au compas dans cette partie. Les termes "constructibilité" ou "constructible" sans précisions devront être pris en ce sens.

L'objectif de ce qui suit est en particulier de distinguer les angles qui sont triséables à la règle et au compas de ceux qui ne le sont pas. On peut considérer qu'un angle est la donnée du centre  $O$  d'un cercle et de deux points  $A$  et  $B$  sur le cercle; un tel angle peut être triséable à la règle et au compas à partir de  $O, A, B$  sans que  $B$  soit constructible à partir de  $O$  et de  $A$ . De manière générale, une figure géométrique peut être déterminée par un ensemble de points, les points initiaux, fixés arbitrairement, et on se pose la question de savoir si tel ou tel point déterminé par les points initiaux est constructible à la règle et au compas à partir de ces points initiaux.

Nous voulons caractériser les points constructibles à partir des points initiaux par les propriétés algébriques de leurs coordonnées; mais alors se pose le problème de savoir dans quel repère. Il est clair que le repère choisi doit être lié aux points initiaux. D'autre part il serait absurde de lier la constructibilité de tel ou tel point à des propriétés directement métriques; si un point est constructible à partir d'un ensemble de points initiaux, ils le sera tout autant si on multiplie toutes les distances par  $\sqrt[5]{2}$  ou par  $\pi$ . Nous verrons dans la suite quels repères utiliser.

## Constructibilité à la règle et au compas

### Définition 2.1

Soit  $D$  une partie du plan affine euclidien; une droite sera dite définie à partir de  $D$  si elle passe par deux points de  $D$  distincts. Un cercle sera dit défini à partir de  $D$  si son centre appartient à  $D$  et s'il passe par un point de  $D$ .

### Définition 2.2

Soit  $D$  un ensemble de points du plan; un ensemble  $D'$  est dit directement constructible à partir de  $D$  s'il existe deux figures distinctes  $F_1$  et  $F_2$  (cercles ou droites) définies à partir de  $D$  telles que  $D' \subset D \cup (F_1 \cap F_2)$ .

### Définition 2.3

Une suite finie  $(D_0, \dots, D_n)$  de parties du plan telle que pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $D_k \subset D_{k+1}$  et  $D_{k+1}$  est directement constructible à partir de  $D_k$ , sera appelée une construction géométrique.

### Définition 2.4

Soit  $D$  une partie du plan; un point  $M$  du plan sera dit  $D$ -constructible s'il existe une construction géométrique  $(D_0, \dots, D_n)$  telle que  $D_0 \subset D$  et  $M \in D_n$ . Une partie  $D'$  du plan sera dite  $D$ -constructible si tous ses éléments sont  $D$ -constructibles.

**Remarque :** Avec cette définition, il est clair que si  $D$  et  $D'$  sont deux parties du plan telles que  $D \subset D'$ , tout point  $D$ -constructible est aussi  $D'$ -constructible.

Afin de ne pas alourdir cet exposé, nous admettrons le théorème suivant, qui est d'ailleurs intuitif.

### Théorème 2.1

Soit  $D$  une partie du plan et  $D'$  une partie  $D$ -constructible, tout point  $D'$ -constructible est aussi  $D$ -constructible.

## Constructibilité par intersection de droites de cercles et de coniques

Rappelons que par 5 points du plan, dont trois quelconques ne sont pas alignés, passe une conique propre (c'est-à-dire qui n'est pas réunion de droites) et une seule. Les définitions relatives à la constructibilité par intersection de droites, cercles et coniques peuvent être calquées sur les définitions relatives à la constructibilité à la règle et au compas, à la différence près que dans la définition de la  $D$ -constructibilité directe, on s'autorise à utiliser, en plus des droites et des cercles définis à partir de  $D$ , les coniques propres passant par 5 points de  $D$ .

## Extensions quadratiques

### Proposition 2.1

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$  et  $d \in K$ ,  $d \geq 0$  et  $\sqrt{d} \notin K$ . L'ensemble des réels de la forme  $\lambda + \mu\sqrt{d}$ , où  $(\lambda, \mu) \in K^2$ , est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ . Ce corps est noté  $K(\sqrt{d})$ , c'est un  $K$ -espace vectoriel de dimension 2.

**Démonstration:**

L'ensemble  $K(\sqrt{d})$  est le sous- $K$ -espace vectoriel de  $\mathbb{R}$  engendré par 1 et  $\sqrt{d}$ ; il est de dimension 2. C'est un sous-anneau car  $1 = 1 + 0 \times \sqrt{d} \in K(\sqrt{d})$ , et pour tous  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  dans  $K$  :

$$(\lambda_1 + \mu_1 \sqrt{d})(\lambda_2 + \mu_2 \sqrt{d}) = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 d + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \sqrt{d} \in K(\sqrt{d}).$$

Soit  $x = \lambda + \mu \sqrt{d}$  non nul (avec  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $K$ ), ce qui équivaut à  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  et entraîne  $\lambda - \mu \sqrt{d} \neq 0$ ; on a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\lambda + \mu \sqrt{d}} = \frac{\lambda - \mu \sqrt{d}}{\lambda^2 - \mu^2 d} \in K(\sqrt{d})$$

L'ensemble  $K(\sqrt{d})$  est donc un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

### Définition 2.5

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$ , les corps  $K(\sqrt{d})$ , où  $d$  est un élément positif de  $K$  et  $\sqrt{d} \notin K$ , sont les extensions quadratiques réelles de  $K$ .

## Repères géométriques et tours d'extensions quadratiques

### Définition 2.6

Un repère du plan affine euclidien sera dit géométrique s'il est orthogonal et si ses vecteurs de base sont de même norme.

### Proposition 2.2

Soit  $\mathcal{R}$  un repère géométrique et  $A_1$  et  $A_2$  deux points distincts dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont dans un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{R}$ ; le cercle de centre  $A_1$  passant par  $A_2$  a une équation dont les coefficients sont dans  $K$ .

**Démonstration:**

Soient  $(a_1, b_1)$  les coordonnées de  $A_1$  et  $(a_2, b_2)$  celles de  $A_2$ . Notons  $\lambda$  le carré scalaire des vecteurs de la base. Une équation du cercle de centre  $A_1$  passant par  $A_2$  est  $\lambda(x - a_1)^2 + \lambda(y - b_1)^2 = \lambda(a_2 - a_1)^2 + \lambda(b_2 - b_1)^2$ , une équation équivalente est :

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y = a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2;$$

les coefficients de cette équation sont dans  $K$ .

### Lemme 2.1

Si les coordonnées des éléments de l'ensemble  $D$  dans un certain repère géométrique  $\mathcal{R}$  du plan sont dans un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{R}$ , et si  $D'$  est directement constructible à partir de  $D$ , alors il existe un corps  $K'$ , qui est  $K$  ou une extension quadratique réelle de  $K$ , contenant l'ensemble des coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des éléments de  $D'$ .

#### Démonstration:

Reprenons les notations de la définition 2.2; si les figures  $F_1$  et  $F_2$  sont deux droites définies à partir de  $D$ , il est clair qu'on peut prendre  $K' = K$ . Supposons que  $F_1$  soit une droite et  $F_2$  un cercle. Comme la droite  $F_1$  passe par deux éléments de  $D$ , elle a une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{aligned}x &= a + tu \\ y &= b + tv\end{aligned}$$

où  $a, b, u, v$  sont des éléments de  $K$ . En exprimant  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$  dans une équation à coefficients dans  $K$  du cercle  $F_2$ , on obtient une équation du second degré à coefficients dans  $K$ , de discriminant  $d \geq 0$ ,  $d \in K$ , dont les solutions sont les paramètres des points d'intersection. Si  $\sqrt{d} \in K$  les coordonnées des éléments de  $D'$  seront toutes dans  $K$  et sinon elles seront dans le corps  $K(\sqrt{d})$ , qui est une extension quadratique de  $K$ .

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux cercles définis par des éléments de  $D$ , on se ramène au cas précédent en considérant l'intersection de l'un des cercles avec l'axe radical des deux cercles, dont une équation est la différence des équations des cercles (de termes de degré 2 égaux à  $x^2 + y^2$ ), à coefficients dans  $K$ .

### Théorème 2.2

Si les coordonnées dans un repère géométrique  $\mathcal{R}$  des éléments d'un ensemble  $D$  sont dans un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{R}$ , pour tout point  $M$  constructible à partir de  $D$  il existe une tour d'extensions quadratiques réelles, c'est-à-dire une suite croissante  $K_0 \subset \dots \subset K_n$  de sous-corps de  $\mathbb{R}$  où, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $K_k$  est une extension quadratique de  $K_{k-1}$ , telle que  $K_0 = K$  et telle que les coordonnées de  $M$  appartiennent à  $K_n$ .

#### Démonstration:

Par définition de la constructibilité (à la règle et au compas), il existe une construction géométrique  $D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_n$  telle que  $D_0 \subset D$  et  $M \in D_n$ . D'après le lemme 2.1 on peut associer à ces parties une suite croissante de sous-corps de  $\mathbb{R}$ ,  $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ , telle que les coordonnées de  $M$  appartiennent à  $K_n$  et telle que pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  le corps  $K_k$  soit  $K_{k-1}$  ou une extension quadratique réelle de  $K_{k-1}$ ; en supprimant les extensions triviales on obtient une tour d'extensions quadratiques réelles vérifiant les conditions.

### Repères géométriques associés et réels constructibles

**Définition 2.7**

Soit  $D$  une partie du plan, le repère géométrique  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$  sera dit associé à  $D$  si  $O$  et  $I = O + \vec{u}$  appartiennent à  $D$ .

**Théorème 2.3**

Soit  $D$  une partie du plan ayant au moins deux éléments, on appelle corps associé à  $D$ , noté  $K_D$ , le sous-corps de  $\mathbb{R}$  engendré par les coordonnées des éléments de  $D$  dans un repère  $\mathcal{R}$  associé à  $D$ . Ce corps ne dépend pas du repère  $\mathcal{R}$ .

**Démonstration:**

Soient  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{O_1I_1}, \vec{v}_1)$  et  $\mathcal{R}_2 = (O_2, \overrightarrow{O_2I_2}, \vec{v}_2)$  deux repères géométriques associés à  $D$  et  $K_1, K_2$  les sous-corps de  $\mathbb{R}$  engendrés par les coordonnées des éléments de  $D$ , respectivement dans  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ . Comme les points  $O_2$  et  $I_2$  appartiennent à  $D$ , les coordonnées  $(a_2, b_2)$  de  $\overrightarrow{O_2I_2}$  dans  $\mathcal{R}_1$  sont dans le corps  $K_1$ . On voit facilement que comme  $\mathcal{R}_1$  est un repère géométrique, les coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$  du vecteur  $\vec{v}_2$ , qui est orthogonal à  $\overrightarrow{O_2I_2}$  et de même carré scalaire, sont nécessairement  $(-b_2, a_2)$  ou  $(b_2, -a_2)$ . Les coefficients de la matrice de passage  $P$  de la base  $(\overrightarrow{O_1I_1}, \vec{v}_1)$  vers la base  $(\overrightarrow{O_2I_2}, \vec{v}_2)$  sont donc dans le corps  $K_1$ . Les coefficients du vecteur colonne  $\Omega$  des coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$  de la nouvelle origine  $O_2$  sont aussi dans  $K_1$ . Pour tout point  $M \in D$ , si  $X_1$  est le vecteur colonne de ses coordonnées dans  $\mathcal{R}_1$ , le vecteur colonne de ses coordonnées dans  $\mathcal{R}_2$  est :

$$X_2 = P^{-1}(X_1 - \Omega) ;$$

cela prouve que les coordonnées dans  $\mathcal{R}_2$  de  $M$  appartiennent au corps  $K_1$ . Comme ceci est vrai pour tout point  $M \in D$  on en déduit  $K_2 \subset K_1$ ; on a bien sûr de même  $K_1 \subset K_2$ , d'où  $K_2 = K_1$ .

**Définition 2.8**

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$ , on dit qu'un réel  $x$  est  $K$ -constructible s'il existe une tour d'extensions quadratiques réelles  $K = K_0 \subset \dots \subset K_n$  telle que  $x \in K_n$ .

**Théorème 2.4**

Soit  $D$  un ensemble de points du plan et  $\mathcal{R}$  un repère géométrique associé à  $D$ ; l'ensemble des coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des points  $D$ -constructibles est un corps contenant  $K_D$ , c'est l'ensemble des réels  $K_D$ -constructibles. Ce corps ne dépend pas de  $\mathcal{R}$ , il sera noté  $K_D^{[2]}$ . Les points  $D$ -constructibles sont les points dont les deux coordonnées dans  $\mathcal{R}$  appartiennent à  $K_D^{[2]}$ .

**Démonstration:**

Fixons pour l'instant le repère géométrique  $\mathcal{R}$  associé à  $D$  et montrons que l'ensemble  $K'$  des coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des points  $D$ -constructibles est un sous-corps de  $\mathbb{R}$  contenant le corps  $K_D$  engendré par les coordonnées

dans  $\mathcal{R}$  des éléments de  $D$ . Nous utiliserons de nombreuses fois de manière implicite le théorème 2.1.

Posons  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ; il est clair que  $J$  est  $D$ -constructible. Soit  $M$  un point  $D$ -constructible dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont  $(x, y)$ ; les points de coordonnées  $(0, y), (y, 0), (x, 0)$  sont  $\{O, I, J, M\}$ -constructibles et comme  $\{O, I, J, M\}$  est  $D$ -constructible, ces points sont  $D$ -constructibles. L'ensemble  $K'$  est donc l'ensemble des réels  $x$  tels que le point de coordonnées  $(x, 0)$  dans  $\mathcal{R}$  soit  $D$ -constructible. Comme  $O \in D$  on en déduit  $0 \in K'$ ; si  $x_1$  et  $x_2$  sont dans  $K'$ , il est clair que le point  $(x_1 - x_2, 0)$  est  $D$ -constructible, donc  $x_1 - x_2 \in K'$ ;  $K'$  est donc un sous-groupe additif. Comme le point  $I$  de coordonnées  $(1, 0)$  est par hypothèse dans  $D$ , on en déduit  $1 \in K'$ ; le rapport de deux éléments ( $\neq 0$ ) de  $K'$  est dans  $K'$  (Thalès) donc  $K' \setminus \{0\}$  est stable par l'inverse et le produit. L'ensemble  $K'$  est donc un corps; les coordonnées des éléments de  $D$  appartiennent à  $K'$ , puisque  $D$  est  $D$ -constructible;  $K'$  contient donc le sous-corps engendré dans  $\mathbb{R}$  par les coordonnées des éléments de  $D$ , c'est-à-dire  $K_D \subset K'$ .

Montrons maintenant que  $K'$  est l'ensemble des réels  $K_D$ -constructibles. Soit  $x \in K'$ , c'est par définition une coordonnée dans  $\mathcal{R}$  d'un point  $D$ -constructible  $M$ ; comme les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des éléments de  $D$  appartiennent à  $K_D$ , d'après le théorème 2.2 et la définition 2.8, les coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  sont  $K_D$ -constructibles, donc en particulier  $x$  est  $K_D$ -constructible. Réciproquement il s'agit de démontrer que tout réel  $K_D$ -constructible est élément de  $K'$ , ou encore que si  $K_D = K_0 \subset \dots \subset K_n$  est une tour d'extensions quadratiques réelles alors  $K_n \subset K'$ . C'est vrai si  $n = 0$  puisque  $K_D \subset K'$ ; supposons le résultat vrai pour  $n - 1$ . L'extension  $K_{n-1} \subset K_n$  étant quadratique réelle, il existe un élément  $d > 0$  dans  $K_{n-1}$  tel que  $K_n = K_{n-1}(\sqrt{d})$ ; d'après l'hypothèse de récurrence  $d \in K'$ , le point de coordonnées  $(d, 0)$  est donc  $D$ -constructible. On construit le point de coordonnées  $(\sqrt{d}, 0)$  à la règle et au compas à partir de  $O$ ,  $I$  et du point de coordonnées  $(d, 0)$ , ce point est par conséquent  $D$ -constructible, d'où  $\sqrt{d} \in K'$ . Plus généralement comme  $K_{n-1} \subset K'$ ,  $\sqrt{d} \in K'$  et que  $K'$  est un corps, on a  $K_n = K_{n-1}(\sqrt{d}) \subset K'$ . Cela termine la démonstration par récurrence.

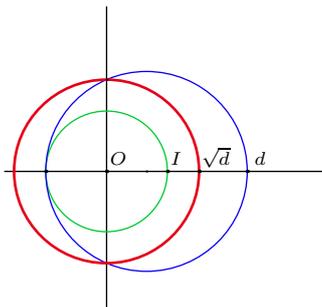


Figure 2.1

Comme le corps  $K_D$  ne dépend pas de  $\mathcal{R}$  et que  $K'$  est l'ensemble des réels qui sont  $K_D$ -constructibles, il est clair que  $K'$  ne dépend que de  $D$ , ce qui justifie la notation  $K_D^{[2]}$ . On dira qu'un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{R}$  est stable par racine carrée si  $\forall d \in K \cap \mathbb{R}_+ \sqrt{d} \in K$ . On peut remarquer que  $K_D^{[2]}$  est le plus petit des sous-corps de  $\mathbb{R}$  stables par racine carrée contenant  $K_D$ .

Si  $M$  est  $D$ -constructible, par définition ses deux coordonnées dans  $\mathcal{R}$  appartiennent à  $K_D^{[2]}$ . Réciproquement si les coordonnées  $x, y$  dans  $\mathcal{R}$  d'un

point  $M$  appartiennent  $K_D^{[2]}$ , comme les points  $(x, 0)$  et  $(0, y)$  sont  $D$ -constructibles  $M$  est aussi  $D$ -constructible.

## 2.2 A propos de la trisection

Nous reprenons dans cette partie les hypothèses générales de la partie précédente; nous utiliserons le théorème 2.4 pour démontrer la non triséabilité de certains angles.

### Un outil algébrique

#### Théorème 2.5

Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$  et  $P \in K[X]$  un polynôme de degré 3, si  $P$  a un zéro  $K$ -constructible, alors il a un zéro dans  $K$ .

**Démonstration:**

Supposons  $P(\beta) = 0$  où  $\beta$  est  $K$ -constructible; soit une tour d'extensions quadratiques réelles  $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p$  telle que  $\beta \in K_p$ . Soit  $r$  le plus petit entier dans  $[0, p]$  tel que  $P$  ait au moins un zéro dans  $K_r$ , si on avait  $r > 0$ , le polynôme  $P$  aurait un zéro  $\alpha \in K_r$  et  $\alpha \notin K_{r-1}$ ; comme  $K_r$  est de dimension 2 sur  $K_{r-1}$ ,  $(1, \alpha, \alpha^2)$  est une famille de  $K_r$  qui est liée sur  $K_{r-1}$ ; de plus  $(1, \alpha)$  est libre sinon  $\alpha \in K_{r-1}$ , donc  $\alpha$  annule un polynôme  $A \in K_{r-1}[X]$  de degré exactement 2. Dans  $K_{r-1}[X]$  on peut effectuer la division euclidienne  $P = DA + R$  où  $R$  est de degré  $< 2$ ; mais comme  $R(\alpha) = (P - DA)(\alpha) = 0$ , le polynôme  $R$  ne peut pas être de degré 1 sinon  $\alpha \in K_{r-1}$ , donc il est constant et constant nul. Cela prouve  $P = DA$  dans  $K_{r-1}[X]$ ; mais  $D$  est de degré 1 et par conséquent  $P$  a un zéro dans  $K_{r-1}$ , ce qui contredit la minimalité de  $r$ . On en déduit  $r = 0$ ; par conséquent le polynôme  $P$  a un zéro dans  $K$ .

### Non constructibilité de l'ennéagone

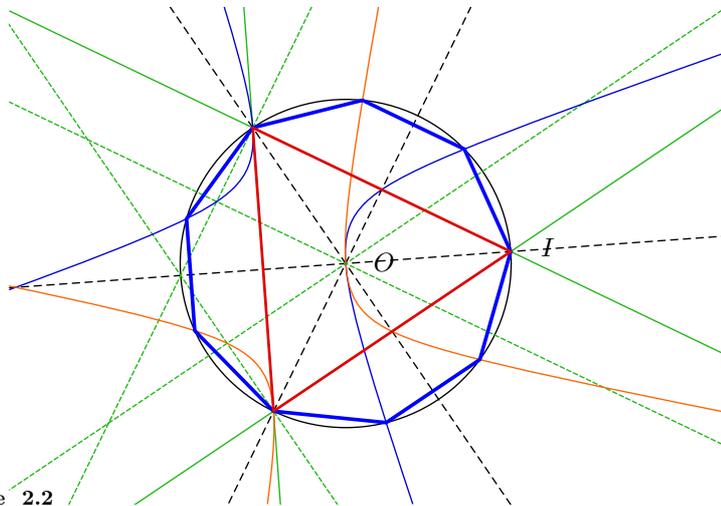


Figure 2.2

Nous nous plaçons dans un plan euclidien dans lequel on a choisi deux points initiaux  $O$  et  $I$  distincts. Nous nous proposons de montrer que l'ennéagone, c'est-à-dire le polygone régulier à 9 côtés, de centre  $O$  et dont un sommet est  $I$ , n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et de  $I$ . Cela revient à dire que l'angle de mesure  $2\pi/9$  n'est pas constructible à la règle et au compas.

### **Théorème 2.6**

*L'ennéagone n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de son centre et de l'un de ses sommets.*

#### **Démonstration:**

On pose  $\theta = 2\pi/9$  et  $x = \cos(\theta)$ . On a  $\cos(3\theta) = \cos(2\pi/3) = -1/2$  d'où, d'après la formule de trigonométrie :  $4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(3\theta)$ , l'égalité :

$$4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad 8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Montrons que le polynôme  $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$  n'a aucun zéro rationnel. Supposons qu'il existe des entiers premiers entre eux  $p$  et  $q$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ , tels que  $P(p/q) = 0$ ; alors  $8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$  d'où  $q^3 = 2p(3q^2 - 4p^2)$ . On en déduit que  $p$  divise  $q^3$ , et comme  $p$  est premier avec  $q^3$ ,  $p = \pm 1$ . On a aussi  $q^2(6p - q) = 8p^3$  donc  $q$  est pair et ne peut être que 2 puisque  $q^2$  divise 8; on en déduit  $3p - 1 = p^3 = p$  ce qui est impossible. D'après le théorème 2.5 le réel  $x = \cos(2\pi/9)$  n'est donc pas  $\mathbb{Q}$ -constructible.

L'ensemble  $D$  des points initiaux est ici constitué de l'origine  $O$  et d'un sommet  $I$  de l'ennéagone. Un repère géométrique associé à  $D$  est de la forme  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OI}, \vec{v})$ . Le corps  $K$  engendré par les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  des éléments de  $D$  est le plus petit corps contenant 0 et 1, c'est  $\mathbb{Q}$ . D'après le théorème 2.4 les points  $D$ -constructibles sont les points dont les deux coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont  $\mathbb{Q}$ -constructibles; comme ce n'est pas le cas pour  $\cos(2\pi/9)$  d'après ce qui précède, on en déduit que le sommet de l'ennéagone dont l'affixe dans  $\mathcal{R}$  est  $e^{2i\pi/9}$  n'est pas constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et  $I$ .

Mais l'ennéagone est constructible par intersection de coniques par trisection de l'angle de mesure  $\pi/3$  (voir la première partie de cet exposé dans le Bulletin vert 446), ce qui donne la figure du début de ce paragraphe.

### **Un angle triséparable, mais non constructible**

Nous nous plaçons ici dans le plan affine euclidien  $\mathbb{R}^2$ , muni de son repère canonique.

Il existe un réel  $\theta \in [0, \pi/2]$  tel que  $\varphi(\theta) = \cos(\theta/3) - \cos(\theta) = 1/2$ , puisque  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(\pi/2) = \cos(\pi/6) > 1/2$ . Pour une telle valeur de  $\theta$ , l'angle  $IOM$ , où  $O = (0, 0)$ ,  $I = (1, 0)$ ,  $M = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ , est évidemment triséparable à la règle et au compas à partir des points initiaux  $O, I, M$ , mais nous allons montrer que le point  $M$  n'est pas constructible à

la règle et au compas à partir des points initiaux  $O, I$ .

D'après la formule de trigonométrie :  $4 \cos^3(\theta/3) - 3 \cos(\theta/3) = \cos(\theta)$ , la condition  $\cos(\theta/3) - \cos(\theta) = 1/2$  est vérifiée si, et seulement si, en posant  $x = \cos(\theta/3)$ , on a :

$$x - (4x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad 8x(1 - x^2) = 1.$$

Il est assez facile de voir que le point  $M$  est constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et de  $I$  si, et seulement si, le point de coordonnées  $(x, 0)$  l'est. Un repère associé aux points initiaux est le repère canonique et le corps engendré par les coordonnées des points initiaux est le corps des rationnels. Par conséquent, d'après les théorèmes 2.4 et 2.5, le point  $M$  ne sera pas constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et  $I$  si le polynôme  $8X(1 - X^2) - 1$  n'a pas de zéro rationnel. Ceci se démontre sans difficultés en utilisant la même méthode que dans l'exemple précédent.

Le point  $M$  n'est donc pas constructible à la règle et au compas à partir de  $O$  et  $I$ , mais il l'est par intersection de coniques. Les racines de l'équation  $8X(1 - X^2) = 1$  sont les coordonnées  $x$  des points d'intersection de la parabole d'équation  $y = x^2$  et de l'hyperbole équilatère d'équation  $8x(1 - y) = 1$  (c'est la méthode de Descartes). Il est facile de voir que ces deux coniques propres passent bien par 5 points à coordonnées rationnelles donc constructibles à partir des points initiaux  $O$  et  $I$ .

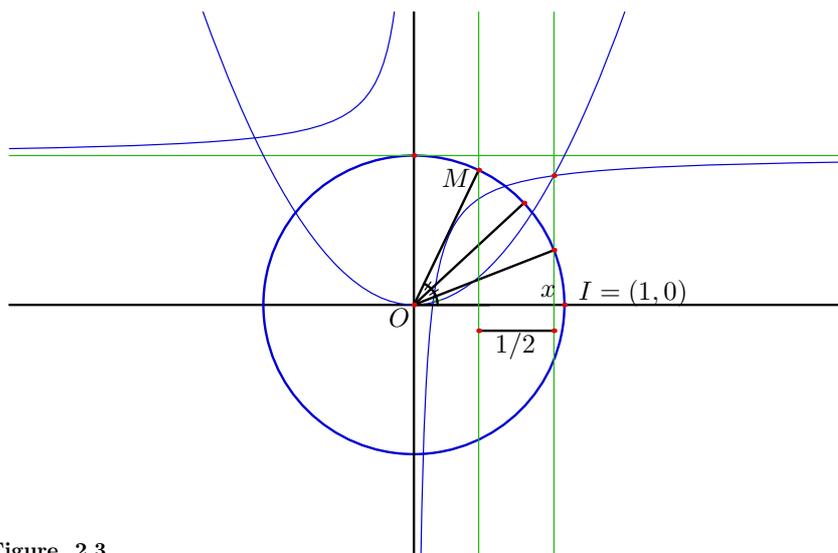


Figure 2.3

### 2.3 Construction de l'heptagone

D'après la caractérisation de Gauss l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas, puisque 7 est premier et que  $7 - 1$  n'est pas

une puissance de 2. On peut aussi démontrer cela en utilisant les théorèmes 2.4 et 2.5. En effet, comme :

$$\begin{aligned} \frac{X^7 - 1}{X - 1} &= X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = \\ &= X^3((X^3 + X^{-3}) + (X^2 + X^{-2}) + (X + X^{-1}) + 1) , \end{aligned}$$

en posant  $Y = X + X^{-1}$  on obtient :

$$X^{-3} \frac{X^7 - 1}{X - 1} = (Y^3 - 3Y) + (Y^2 - 2) + Y + 1 = Y^3 + Y^2 - 2Y - 1 .$$

Les réels  $2 \cos(2\pi/7)$ ,  $2 \cos(4\pi/7)$ ,  $2 \cos(6\pi/7)$  sont donc les zéros du polynôme  $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$  ; si l'un de ces réels était  $\mathbb{Q}$ -constructible (à la règle et au compas), le polynôme  $P$  aurait un zéro rationnel, or en procédant comme dans les exemples précédents il est facile de voir que ce n'est pas le cas.

Nous allons voir qu'il est cependant possible de construire l'heptagone régulier à partir de son centre  $O$  et l'un des sommets  $I$  en utilisant des intersections de coniques définies elles mêmes par des points constructibles à la règle et au compas à partir de  $\{O, I\}$ .

Un repère géométrique  $\mathcal{R}$  associé à l'ensemble des points initiaux  $D = \{O, I\}$  est de la forme  $(O, \overrightarrow{OI}, \vec{v})$ . Les sommets de l'heptagone régulier sont les points dont les affixes  $z$  dans  $\mathcal{R}$  vérifient  $z^7 = 1$ .

On exposera d'abord de manière non démonstrative l'origine algébrique de la méthode de construction, puis on vérifiera de manière rigoureuse que cette méthode donne bien une construction de l'heptagone régulier. Il n'est pas nécessaire de maîtriser les notions évoquées dans l'exposé des motivations algébriques pour comprendre la description de la construction: cette description est une illustration concrète de ces théories algébriques.

- Aperçu sur les motivations algébriques

On note  $\mathbb{U}_7 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^7 = 1\}$ . On considère le plus petit sous-corps de  $\mathbb{C}$  contenant  $\mathbb{U}_7$ , noté ici  $K_7$ . Ce corps est une extension finie galoisienne de  $\mathbb{Q}$ , et le groupe de Galois de l'extension, noté  $G_7$ , est le groupe des automorphismes du corps  $K_7$  ( $G_7$  laisse  $\mathbb{Q}$  invariant). Soit  $\sigma \in G_7$ , on voit facilement que  $\sigma$  laisse  $\mathbb{U}_7$  stable et donc invariant, cet automorphisme de corps induit donc sur  $\mathbb{U}_7$  un automorphisme du groupe multiplicatif  $\mathbb{U}_7$ . On démontre que l'application  $\sigma \mapsto \sigma|_{\mathbb{U}_7}$  est un isomorphisme entre le groupe  $G_7$  et le groupe des automorphismes du groupe  $\mathbb{U}_7$ . Il est assez facile de voir que puisque  $\mathbb{U}_7$  est cyclique, ses automorphismes sont de la forme  $\omega \mapsto \omega^k$ , où  $k \in \mathbb{Z}$  est premier avec 7. Si  $c$  est une classe modulo 7 et  $\omega \in \mathbb{U}_7$ , on posera  $\omega^c = \omega^n$ , où  $n$  est un représentant quelconque de  $c$ . On voit alors facilement que l'application qui à  $c \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$  du groupe des éléments inversibles modulo 7 fait correspondre l'automorphisme  $\omega \mapsto \omega^c$  du groupe  $\mathbb{U}_7$  est un isomorphisme de groupes. Finalement on en déduit que  $G_7$  est canoniquement isomorphe au groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ . L'objectif est ensuite de déterminer les sous-groupes de  $G_7$ ; à un tel sous-groupe  $H \subset G_7$  on fait correspondre l'ensemble des éléments de  $K_7$  invariants par tous les éléments

de  $H$  (on dit aussi *fixés* par  $H$ ); cet ensemble est un sous-corps de  $K_7$  et le théorème de dualité de Galois dit que l'application ainsi définie, de l'ensemble des sous-groupes de  $G_7$  vers l'ensemble des sous-corps de  $K_7$ , est une bijection (décroissante pour l'inclusion). Ces sous-corps intermédiaires forment une tour d'extensions de degré 2 (quadratiques) ou 3; ceci nous permettra de définir une construction des éléments de  $\mathbb{U}_7$ .

Les sous-groupes de  $G_7$  correspondent aux sous-groupes de  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ ; ce groupe est cyclique engendré par la classe de  $-2$  puisque modulo 7 les puissances de  $-2$  s'écrivent  $\{1, -2, -3, -1, 2, 3\}$ . On sait que si  $G$  est un groupe cyclique ses sous-groupes sont cycliques; de plus si  $d$  divise son cardinal  $n$ , il a un et un seul sous-groupe de cardinal  $d$ , et donc d'indice  $n/d$ , celui engendré par  $g^{n/d}$ , où  $g$  est un générateur de  $G$ . Ici pour tout entier  $d$  qui divise 6 la classe de  $(-2)^{6/d}$  engendre le seul sous-groupe de cardinal  $d$ . Les sous-groupes sont : le groupe trivial  $\{1\}$ , le sous-groupe  $\{1, -1\}$  de cardinal 2, le sous-groupe  $\{1, -3, 2\}$  de cardinal 3 et le groupe entier. Une *période de Gauss* est la somme des éléments d'une orbite de  $\mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$  sous l'action d'un sous-groupe du groupe de Galois; cette somme est invariante par l'action du sous-groupe correspondant et donc élément du corps intermédiaire correspondant. Nous utiliserons le sous-groupe  $\{1, 2, 4\} = \{1, -3, 2\}$ ; tout complexe  $\omega \in U_7 \setminus \{1\}$  a pour orbite l'ensemble  $\{\omega, \omega^2, \omega^4\}$  à laquelle est associée la période de Gauss  $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$ . Les éléments de  $\mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$  sont répartis en 2 orbites, donc il y a deux périodes de Gauss relatives au sous-groupe  $\{1, 2, 4\}$ ; avec les notations précédentes ce sont nécessairement  $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$  et  $q = \omega^3 + \omega^6 + \omega^5 = \omega^{-4} + \omega^{-1} + \omega^{-2} = \bar{p}$ .

- Description de la construction

Soit  $\omega \in U_7 \setminus \{1\}$ ; on rappelle que  $\mathbb{U}_7 = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}\}$ . On pose  $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$  et  $q = \omega^3 + \omega^6 + \omega^5 = \omega^{-4} + \omega^{-1} + \omega^{-2}$ . Ces deux sommes sont les zéros du polynôme  $X^2 + X + 2$  puisque  $p + q = -1$  ( $p + q + 1$  est la somme des éléments de  $\mathbb{U}_7$ , c'est-à-dire des zéros de  $X^7 - 1$ ) et :

$$\begin{aligned} pq &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = \\ &= \omega^0 + \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^1 + \omega^0 + \omega^{-2} + \omega^3 + \omega^2 + \omega^0 = 2. \end{aligned}$$

Les complexes  $\omega, \omega^2, \omega^4$  sont les zéros du polynôme  $X^3 - pX^2 + qX - 1$ , puisque  $\omega\omega^2\omega^4 = 1$  et  $\omega\omega^2 + \omega\omega^4 + \omega^2\omega^4 = \omega^3 + \omega^{-2} + \omega^{-1} = q$ . L'objectif est d'obtenir les points d'affixes  $\omega, \omega^2, \omega^4$  comme intersections du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  passant par  $I$  avec une hyperbole équilatère, mais si le cercle unité coupe une hyperbole équilatère en ces 3 points, il y a un quatrième point dans l'intersection. Nous pouvons fixer arbitrairement ce point à  $I$ . Le polynôme unitaire qui a  $(1, \omega, \omega^2, \omega^4)$  pour zéros est :

$$\begin{aligned} P &= (X - 1)(X^3 - pX^2 + qX - 1) = \\ &= X^4 - (p + 1)X^3 + (p + q)X^2 - (1 + q)X + 1 = \\ &= X^4 + qX^3 - X^2 + pX + 1. \end{aligned}$$

Les zéros de ce polynôme sont de module 1, en divisant l'équation  $P(z) = 0$  par  $z^2$  et en remplaçant  $1/z$  par  $\bar{z}$  on obtient l'équation complexe :

$$z^2 + \bar{z}^2 + \bar{p}z + p\bar{z} = 1 .$$

En posant  $p = a + ib$ , où  $a, b$  sont réels, et  $z = x + iy$ , l'équation devient :

$$x^2 - y^2 + ax + by = 1/2 \quad \text{soit} \quad (x + a/2)^2 - (y - b/2)^2 = 1/2 + a^2/4 - b^2/4 .$$

Les complexes  $\{1, \omega, \omega^2, \omega^4\}$  sont donc les affixes des intersections avec le cercle  $\mathcal{C}$  de l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}$  de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $\frac{-a+ib}{2} = -\bar{p}/2 = -q/2$ , de directions asymptotiques les droites d'équations  $x = \pm y$ , passant par  $I$ . Les conjugués  $\{1, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-4}\}$  sont évidemment les intersections avec  $\mathcal{C}$  de l'hyperbole  $\mathcal{H}'$ , symétrique de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $Ox$ , de centre  $\Omega'$  d'affixe  $-p/2$ .

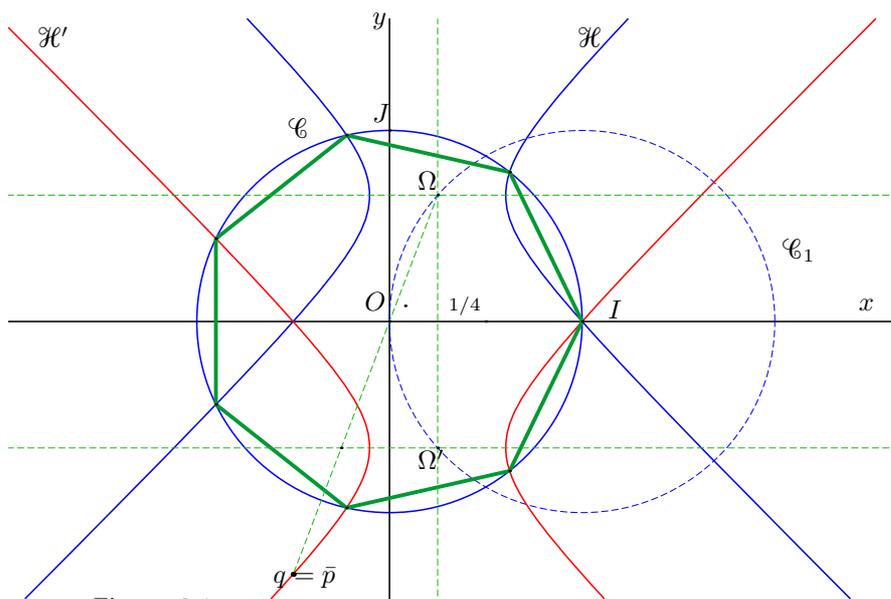


Figure 2.4

Les centres  $\Omega$  et  $\Omega'$  de ces hyperboles sont constructibles à la règle et au compas à partir de  $\{O, I\}$ ; en effet on peut remarquer que  $-p/2 - q/2 = 1/2$  et donc que  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont symétriques par rapport à l'axe  $Ox$  sur la droite d'équation  $x = 1/4$  et que d'autre part :

$$|-p/2 - 1|^2 = (p/2 + 1)(q/2 + 1) = pq/4 + (p+q)/2 + 1 = 1/2 - 1/2 + 1 = 1 ;$$

par conséquent  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont les intersections de la droite d'équation  $x = 1/4$  et du cercle  $\mathcal{C}_1$  d'équation complexe  $|z - 1| = 1$ , de centre  $I$  et passant par  $O$ . L'hyperbole  $\mathcal{H}$  passe par  $I$  et les symétriques de  $I$  par rapport aux axes de symétrie de l'hyperbole, ce qui fait 4 points; elle passe aussi par le point d'affixe la période de Gauss  $p$  puisque :

$$p^2 + \bar{p}^2 + \bar{p}p + p\bar{p} = (p + \bar{p})^2 = (p + q)^2 = 1 .$$

Ces 5 points sont constructibles à la règle et au compas à partir de  $\{O, I\}$  et déterminent l'hyperbole  $\mathcal{H}$  ; il en est de même pour  $\mathcal{H}'$ . On obtient donc ainsi une construction utilisant l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole équilatère d'un heptagone régulier à partir de son centre et de l'un de ses sommets.

## 2.4 Construction du 13-gone régulier par intersection de coniques

Nous allons ici décrire et justifier une construction par intersection de coniques du 13-gone régulier, à partir de son centre  $O$  et de l'un de ses sommets  $I$ . Un repère associé à l'ensemble des points initiaux est de la forme  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OI}, \vec{v})$  ; les sommets du 13-gone régulier sont les points dont l'affixe  $z$  dans  $\mathcal{R}$  vérifie  $z^{13} = 1$ . Nous identifierons les points du plan avec leur affixe dans  $\mathcal{R}$ .

Le point de vue est le même que celui utilisé pour la construction de l'heptagone. Nous verrons en particulier dans l'exposé des motivations algébriques qu'il est nécessaire de procéder à 2 étages de constructions par intersections de droites et de cercles et à un étage par intersections de coniques, et ceci parce que  $13 - 1 = 2 \times 2 \times 3$ .

- Aperçu sur les motivations algébriques

Une grande partie de ce qui a été dit à propos de l'heptagone régulier peut être repris pour le 13-gone régulier en remplaçant 7 par 13. En particulier le groupe des classes inversibles modulo 13 est un groupe cyclique de cardinal 12. On vérifie que la classe de 2 en est un générateur puisque modulo 13 les puissances de 2 s'écrivent :

$$\{1, 2, 4, -5, 3, 6, -1, -2, -4, 5, -3, -6\}$$

Les sous-groupes multiplicatifs modulo 13 sont cycliques engendrés par les puissances de 2 : si  $d$  est un diviseur de 12,  $2^d$  engendre modulo 13 le seul sous-groupe de cardinal  $12/d$  (et donc d'indice  $d$ ). En particulier  $2^2 = 4$  engendre le sous-groupe  $H_1 = \{1, 4, 3, -1, -4, -3\}$  d'indice 2 ; dans ce sous-groupe  $H_1$ , le sous-groupe  $H_2$  est engendré par  $2^4 \equiv 3$  a  $12/4 = 3$  éléments, les classes de  $\{1, 3, -4\}$ . En notant  $H_0$  le groupe entier et  $H_3 = \{1\}$ , on observe donc la suite d'inclusions  $\{1\} = H_3 \subset H_2 \subset H_1 \subset H_0$ , qu'on appelle une résolution du groupe  $H_0$ . D'après la théorie de Galois, à cette résolution de  $H_0$  correspond une tour d'extensions formées par les corps fixés par les sous-groupes de Galois correspondants :

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset_2 F_1 \subset_2 F_2 \subset_3 F_3 = K_{13} ;$$

les entiers placés sous les symboles d'inclusion sont les degrés des extensions, ils sont égaux aux cardinaux des groupes quotients  $H_0/H_1, H_1/H_2, H_2/H_3$ .

Comme dans la construction de l'heptagone régulier, nous allons considérer les périodes de Gauss associées à ces groupes, précisément si  $\alpha$  est un élément

de  $\mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , la période de Gauss de niveau  $i$  ( $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ) "contenant"  $\alpha$  est

$$P_i = \sum_{k \in H_i} \alpha^k$$

La période  $P_i$  est invariante par les éléments du groupe de Galois associé à  $H_i$  car si  $c \in H_i$  et que  $\sigma_c$  est l'élément correspondant du groupe de Galois  $G_{13}$ , on a :

$$\sigma_c(P_i) = \sum_{k \in H_i} \sigma_c(\alpha^k) = \sum_{k \in H_i} \alpha^{kc} = P_i$$

La période  $P_i$  est donc un élément du corps  $F_i$ ; en fait les différentes périodes de niveau  $i$  forment une base de  $F_i$  en tant que  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

Il y a une seule période de niveau 0, c'est la somme des éléments de  $\mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , dont la valeur est  $-1$ . Les périodes de niveau 1 sont des sommes de 6 des éléments de  $\mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , il y en a 2, elles sont les zéros d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels; on peut donc les construire à la règle et au compas à partir des points initiaux. Chaque période de niveau 1 est somme de deux périodes de niveau 2 qui sont les zéros d'un polynôme de degré 2 dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des périodes de niveau 1; on peut donc construire les 4 périodes de niveau 2 à la règle et au compas à partir des points initiaux. Chacune des périodes de niveau 2 est la somme de 3 périodes de niveau 3 qui sont les zéros d'un polynôme de degré 3 dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des périodes de niveau 2; on peut construire ces 12 complexes, qui sont les éléments de  $\mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , 3 par 3 par intersections d'hyperboles équilatères avec le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $z\bar{z} = 1$ .

- Description de la construction

Soit  $\alpha \in \mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , la période de Gauss de niveau 1 qui contient  $\alpha$  est :

$$P_1 = \sum_{k \in H_1} \alpha^k = \alpha^1 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^{-1} + \alpha^{-4} + \alpha^{-3}$$

L'autre période de niveau 1, que nous noterons  $Q_1$ , est la somme des 6 autres éléments de  $\mathbb{U}_{13} \setminus \{1\}$ , c'est la période de niveau 1 contenant  $\alpha^2$  :

$$Q_1 = \alpha^2 + \alpha^8 + \alpha^6 + \alpha^{-2} + \alpha^{-8} + \alpha^{-6} = \alpha^2 + \alpha^{-5} + \alpha^6 + \alpha^{-2} + \alpha^5 + \alpha^{-6}$$

La somme  $P_1 + Q_1$  est la somme des zéros  $\neq 1$  de  $X^{13} - 1$  et c'est donc  $-1$ . On trouve (des formules générales sont explicitées dans [16]) :

$$P_1 + Q_1 = -1 \quad P_1 Q_1 = -3.$$

Ces périodes sont réelles, ce sont les zéros du polynôme  $X^2 + X - 3$ .

La période  $P_1$  est somme de deux périodes de niveau 2, on note  $P_2$  celle qui contient  $\alpha$  et  $Q_2$  l'autre :

$$P_2 = \sum_{k \in H_2} \alpha^k = \alpha + \alpha^3 + \alpha^{-4} \quad Q_2 = \sum_{k \in H_2} (\alpha^{-1})^k = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^4$$

On a bien sûr  $P_2 + Q_2 = P_1$  et on trouve  $P_2 Q_2 = 3 + Q_1 = 2 - P_1$ . Ces deux périodes de niveau 2 sont donc complexes conjuguées et zéros du polynôme  $X^2 - P_1 X + 2 - P_1$ .

Les périodes de niveau 3 qui composent  $P_2$  sont  $\alpha, \alpha^3, \alpha^{-4}$ ; ce sont les zéros du polynôme :

$$(X - \alpha)(X - \alpha^3)(X - \alpha^{-4}) = X^3 - P_2 X^2 + Q_2 X - 1$$

Nous voulons maintenant trouver une équation complexe d'une hyperbole équilatère qui coupe le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  en 1 et les 3 points  $\alpha, \alpha^3, \alpha^{-4}$ . Les points d'intersections sont alors les complexes  $z$  vérifiant :

$$\begin{aligned} (z^3 - P_2 z^2 + Q_2 z - 1)(z - 1) &= \\ &= z^4 - (1 + P_2)z^3 + (P_2 + Q_2)z^2 - (1 + Q_2)z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ces complexes sont de module 1; en divisant l'équation obtenue par  $z^2$  et en remplaçant  $z^{-1}$  par  $\bar{z}$ , on obtient la condition équivalente :

$$z^2 + \bar{z}^2 - (1 + P_2)z - (1 + \bar{P}_2)\bar{z} + P_1 = 0$$

soit encore :

$$\left(z - \frac{1 + P_2}{2}\right)^2 + \left(\bar{z} - \frac{1 + \bar{P}_2}{2}\right)^2 = 2c,$$

où la constante  $c$  est telle que l'équation soit vérifiée pour  $z = 1$ . En posant  $\frac{1 + P_2}{2} = a + ib$  et  $z = x + iy$ , on obtient l'équation cartésienne équivalente :  $(x - a)^2 - (y - b)^2 = c$  qui est une équation de l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}_{0,0}$  de centre le point  $\Omega = a + ib = \frac{1 + P_2}{2}$ , passant par 1 et dont les directions asymptotiques sont de pentes  $\pm 1$ . Le centre  $\Omega = \frac{1 + P_2}{2}$  est sur la droite  $x = \frac{1}{2} + \frac{P_2 + Q_2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{P_1}{4} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P_1}{2}\right)$  et on remarque :

$$|\Omega|^2 = \frac{(1 + P_2)(1 + Q_2)}{4} = \frac{1 + P_2 + Q_2 + P_2 Q_2}{4} = \frac{1 + P_1 + 2 - P_1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Au lieu de partir de  $P_2$  on pourrait aussi bien partir de  $Q_2$  et on obtiendrait l'hyperbole équilatère  $\mathcal{H}_{0,1}$ , symétrique de  $\mathcal{H}_{0,0}$  par rapport à l'axe  $Ox$ , qui coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $\{1, \alpha^{-1}, \alpha^{-3}, \alpha^4\}$ . Mais on peut remonter d'un étage : au lieu de choisir la solution  $P_1$  de l'équation  $x^2 + x - 3 = 0$ , on aurait pu choisir l'autre,  $Q_1$ ; d'ailleurs nous n'avons jamais explicitement choisi ni l'un ni l'autre : quels que soient les choix successifs, on arrive toujours à des sommets du 13-gone et en faisant tous les choix on trouve tous les sommets. En remplaçant  $P_1$  par  $Q_1$ , on obtient deux autres hyperboles,  $\mathcal{H}_{1,0}$  qui correspond à la période  $\omega_{1,0} = \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5$ , de niveau 2, qui coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $\{1, \alpha^2, \alpha^6, \alpha^5\}$  et l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,1}$ , symétrique de  $\mathcal{H}_{1,0}$  par rapport à  $Ox$ , qui correspond à la période  $\omega_{1,1} = \overline{\omega_{1,0}} = \alpha^{-2} + \alpha^{-6} + \alpha^{-5}$  et qui coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en  $\{1, \alpha^{-2}, \alpha^{-6}, \alpha^{-5}\}$ . L'hyperbole  $\mathcal{H}_{0,0}$  passe par 1, le point  $P_2$  qui est le symétrique de 1 par rapport à son centre  $\Omega$ , le point  $P_1/2$  qui est le symétrique de 1 par rapport à l'axe de symétrie parallèle à  $Oy$  et le symétrique de 1 par rapport à l'axe de l'hyperbole parallèle à  $Ox$ ; cela fait 4 points. Par le tracé d'une première figure on constate  $\omega_{1,1} \in \mathcal{H}_{0,0}$ ,

ce qu'on peut vérifier par le calcul; cela donne le cinquième point cherché sur l'hyperbole  $\mathcal{H}_{0,0}$ ; les 3 autres hyperboles passent bien sûr par un cinquième point analogue.

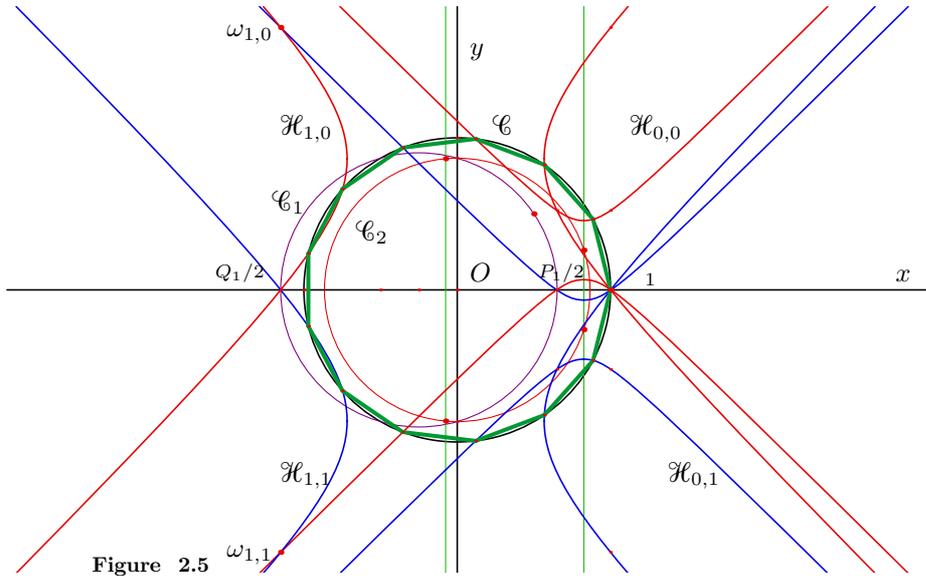


Figure 2.5

Résumons la construction. Au lieu de construire  $P_1$  et  $Q_1$  nous pouvons construire  $P_1/2$  et  $Q_1/2$  qui sont les zéros du polynôme  $4X^2 + 2X - 3$ ; ce sont les intersections avec  $Ox$  du cercle  $\mathcal{C}_1$  d'équation  $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}$  ayant pour centre le point  $-1/4$  et passant par  $\frac{1+i}{2}$ . La médiatrice de 1 et  $P_1/2$  est l'axe commun des hyperboles  $\mathcal{H}_{0,0}$  et  $\mathcal{H}_{0,1}$  et les centres de ces hyperboles sont les intersections de cette médiatrice avec le cercle  $\mathcal{C}_2$  de centre 0 et de rayon  $\sqrt{3}/2$ ; ce cercle passe par les points d'intersection de  $\mathcal{C}_1$  avec l'axe  $Oy$ . Les centres des hyperboles  $\mathcal{H}_{1,0}$  et  $\mathcal{H}_{1,1}$  sont les intersections avec ce même cercle de la médiatrice de 1 et  $Q_1/2$ . Les périodes de niveau 2 sont les symétriques du point d'affixe 1 par rapport aux centres des hyperboles. Chacune des hyperboles est déterminée par 5 points, comme expliqué ci-dessus, ces 5 points étant constructibles à la règle et au compas à partir des points initiaux  $O$  et  $I$ . Les sommets du 13-gone régulier sont les intersections de ces hyperboles avec le cercle  $\mathcal{C}$ .

## 2.5 Construction du 17-gone régulier

Nous allons ici décrire et justifier une construction à la règle et au compas du 17-gone régulier, à partir de son centre  $O$  et de l'un de ses sommets  $I$ ; cette construction est a priori possible puisque  $17 = 2^4 + 1$  est un nombre premier de Fermat.

Beaucoup de méthodes de construction ont été proposées pour le 17-gone régulier. La méthode originale que nous décrivons ici est totalement algébrique, elle est analogue à celles que nous avons utilisées pour les constructions de l'heptagone et du 13-gone régulier. Une caractéristique de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de choix liés à des positionnements géométriques, par exemple le choix d'une bissectrice intérieure par opposition à une bissectrice extérieure. Nous n'utiliserons que des intersections de droites avec des droites ou de droites avec des cercles et quand deux points d'intersection existent on peut, pour continuer la construction, choisir l'un ou l'autre des points d'intersection. Plus précisément il se présentera à celui qui voudra réaliser la construction 4 choix successifs entre deux possibilités, soit 16 possibilités, qui conduiront aux 16 sommets autres que  $I$  du 17-gone régulier.

Enfin nous discuterons dans la section suivante de la simplicité de la construction obtenue relativement au critère de simplicité de Lemoine.

Un repère associé à l'ensemble des points initiaux est de la forme  $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{OI}, \vec{v})$ ; les sommets du 17-gone régulier sont les points dont l'affixe  $z$  dans  $\mathcal{R}$  vérifie  $z^{17} = 1$ ; ces affixes forment le groupe  $\mathbb{U}_{17}$ . Nous identifierons les points du plan avec leur affixe dans  $\mathcal{R}$ .

- Motivations algébriques

Le groupe  $G$  des classes d'entiers inversibles modulo 17 est cyclique de cardinal 16. On vérifie que la classe de 3 en est un générateur puisque modulo 17 les puissances de 3 s'écrivent:

$$\{1, 3, -8, -7, -4, 5, -2, -6, -1, -3, 8, 7, 4, -5, 2, 6\}$$

Les sous-groupes multiplicatifs modulo 17 sont cycliques engendrés par les puissances de 3: si  $d$  est un diviseur de 16,  $3^d$  engendre modulo 17 le seul sous-groupe de cardinal  $16/d$  et donc d'indice  $d$ . En particulier  $3^2 \equiv -8$  engendre le sous-groupe des carrés  $H_1 = \{1, -8, -4, -2, -1, 8, 4, 2\}$  d'indice 2. Le sous-groupe des carrés de  $H_1$  est le sous-groupe  $H_2$  engendré par  $3^4 \equiv -4$ , il a  $16/4 = 4$  éléments, les classes de  $\{1, -4, -1, 4\}$ . Le sous-groupe des carrés de  $H_2$  est le groupe  $H_3 = \{1, -1\}$ , et  $H_4 = \{1\}$ . On obtient ainsi la seule résolution possible de  $G$ :

$$\{1\} = H_4 \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 \subset H_0 = G$$

et d'après le théorème de dualité de Galois, à cette résolution de  $G$  correspond la tour d'extensions quadratiques

$$K_{17} = F_4 \supset F_3 \supset F_2 \supset F_1 \supset F_0 = \mathbb{Q}$$

formée par les corps fixés par les sous-groupes de Galois correspondants, le corps  $K_{17}$  étant le sous-corps de  $\mathbb{C}$  engendré par  $\mathbb{U}_{17}$ .

Pour utiliser de manière constructive cette correspondance, nous allons considérer les périodes de Gauss associées à ces groupes : précisément si  $\alpha$  est un élément de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , la période de Gauss de niveau  $i$  ( $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ ) “contenant”  $\alpha$  est

$$p_i = \sum_{k \in H_i} \alpha^k$$

La période  $p_i$  est invariante par les éléments du groupe de Galois associé à  $H_i$  c'est donc un élément du corps  $F_i$ .

Il y a une seule période de niveau 0, c'est la somme des éléments de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , dont la valeur est  $-1$ . Les périodes de niveau 1 sont sommes de 8 des éléments de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , il y en a 2; les périodes de niveau 2 sont sommes de 4 termes, il y en a 4, les périodes de niveau 3 sont sommes de 2 termes, il y en en a 8, enfin les périodes de niveau 4 sont les 16 éléments de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ . Une période  $p_i$  de niveau  $i$  étant fixée, cette période *contient* toujours 2 périodes de Gauss de niveau  $i+1$ ; la somme de ces périodes est évidemment  $p_i$  et le produit de ces périodes de niveau  $i+1$  s'exprime rationnellement en fonction des périodes de niveau  $i$ . Si on sait construire les périodes de niveau  $i$  à la règle et au compas, on saura construire les périodes de niveau  $i+1$  par intersection de droites et de cercles; on en déduit une construction des éléments de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , qui sont les périodes de niveau 4, en 4 étapes d'intersections de cercles et de droites.

- Les équations superposées

Soit  $\alpha \in \mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , la période de Gauss de niveau 1 qui contient  $\alpha$  est :

$$p_1 = \sum_{k \in H_1} \alpha^k = \alpha^1 + \alpha^{-8} + \alpha^{-4} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + \alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^2$$

L'autre période de niveau 1, que nous noterons  $q_1$ , est la somme des 8 autres éléments de  $\mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$ , c'est la période de niveau 1 contenant  $\alpha^3$  :

$$q_1 = \alpha^3 + \alpha^{-7} + \alpha^5 + \alpha^{-6} + \alpha^{-3} + \alpha^7 + \alpha^{-5} + \alpha^6$$

La somme  $p_1 + q_1$  est la somme des zéros  $\neq 1$  de  $X^{17} - 1$  et c'est donc  $-1$ . On trouve

$$p_1 + q_1 = -1 \quad p_1 q_1 = -4.$$

Ces périodes sont réelles, ce sont les zéros du polynôme  $X^2 + X - 4$ .

La période  $p_1$  est somme de deux périodes de niveau 2, on note  $p_2$  celle qui contient  $\alpha$  et  $q_2$  l'autre :

$$p_2 = \sum_{k \in H_2} \alpha^k = \alpha + \alpha^{-4} + \alpha^{-1} + \alpha^4 \quad ; \quad q_2 = \sum_{k \in H_2} (\alpha^{-8})^k = \alpha^{-8} + \alpha^{-2} + \alpha^8 + \alpha^2$$

On a bien sûr  $p_2 + q_2 = p_1$  et on trouve  $p_2 q_2 = -1$ . Ces périodes de niveau 2 sont réelles, car autoconjuguées, et zéros du polynôme  $X^2 - p_1 X - 1$ .

Les périodes de niveau 3 qui composent  $p_2$  sont  $p_3 = \alpha + \alpha^{-1}$  qui contient  $\alpha$  et  $q_3 = \alpha^4 + \alpha^{-4}$ ; on a  $p_3 + q_3 = p_2$  et :

$$p_3 q_3 = \alpha^{-3} + \alpha^5 + \alpha^{-5} + \alpha^3$$

Cette somme est la période de niveau 2 qui contient  $\alpha^3$ . Il ne faut pas oublier ici le point de vue que nous avons choisi: la racine  $\alpha \in \mathbb{U}_{17} \setminus \{1\}$  est arbitraire et ce sont les choix arbitraires successifs d'une des 2 solutions d'équations du second degré superposées qui vont déterminer  $\alpha$ . Autrement dit  $p_1$  est la solution que nous avons choisie au hasard de l'équation  $X^2 + X - 4 = 0$ ,  $p_2$  est la solution que nous avons choisie pour l'équation  $X^2 - p_1X - 1 = 0$ . Nous connaissons donc bien  $q_1$  qui est l'autre solution de  $X^2 + X - 4 = 0$ , nous savons qu'elle se décompose en deux périodes de niveau 2 qui sont les racines de  $X^2 - q_1X - 1 = 0$ , mais il n'est pas évident de relier le choix que nous avons fait de  $p_2$  avec le choix qu'il faut faire entre les racines de  $X^2 - q_1X - 1 = 0$ . Une possibilité est de choisir par exemple  $\alpha = e^{2i\pi/17}$  et d'ajouter à ces équations, qui conduiront à des intersections de droites et de cercles, des indications de positionnement qui permettront de faire les bons choix. Une autre possibilité est de remarquer qu'on a l'égalité:

$$p_3q_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1p_2$$

Le lecteur pourra ici vérifier expérimentalement cette égalité, mais le fait qu'une telle égalité doive exister et les moyens qu'on a pour calculer de telles égalités sont exposés dans [16]. Le choix qu'il faut faire entre les périodes de niveau 2 qui composent  $q_1$  est donc algébriquement et géométriquement déterminé par le choix de  $p_2$ .

Pour terminer,  $\alpha$  et  $\alpha^{-1}$  sont les racines complexes conjuguées de l'équation  $X^2 - p_3X + 1$ . On peut remarquer qu'il s'agit ici de la seule étape où l'on obtient des périodes non réelles, car toutes les périodes de niveau  $\leq 3$  sont invariantes par la conjugaison, qui coïncide avec l'inverse, sur les complexes de module 1. Cela correspond au fait que  $-1$  est dans tous les sous-groupes de la résolution de  $G$ , sauf le dernier,  $H_4$ .

- Les constructions associées

Les réels  $p_1$  et  $q_1$  sont les intersections avec l'axe des réels du cercle d'équation  $x^2 + y^2 + x - 4 = 0$  de centre  $-1/2$  passant par  $2i$ . Un calcul numérique prouve que si on veut arriver à  $\alpha = \exp(2i\pi/17)$  il faut choisir pour  $p_1$  la plus grande des racines. Dans la pratique nous construirons le cercle  $\mathcal{C}_0$  de centre  $-1/4$  passant par  $i$  qui coupe l'axe réel en  $P'_1$  d'abscisse  $p_1/2$  et  $Q'_1$  d'abscisse  $q_1/2$ .

Les réels  $p_2$  et  $q_2$  sont les intersections avec l'axe des réels du cercle  $\mathcal{C}_1$  d'équation  $x^2 + y^2 - p_1x - 1 = 0$  qui a pour centre le point  $P'_1$  d'abscisse  $p_1/2$  et qui passe par  $i$ . Un tel cercle est appelé cercle de Carlyle (cf [14]). Si on veut arriver à  $\alpha = \exp(2i\pi/17)$ ,  $p_1$  ayant été correctement choisi, il faut prendre pour  $p_2$  la plus grande des racines.

Les réels  $p_3$  et  $q_3$  sont les zéros de  $X^2 - p_2X + p_3q_3$ , où  $p_3q_3$  est celui des zéros de  $X^2 - q_1X - 1 = 0$ , qui vaut  $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1p_2$ . Ces réels sont les intersections avec l'axe réel des cercles d'équations:

$$X^2 + Y^2 - p_2X - 2\mu Y - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1p_2 = 0$$

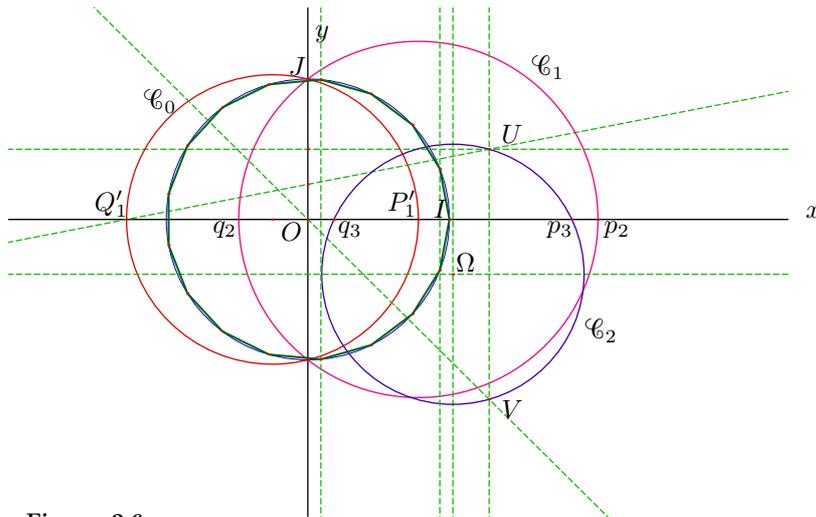
où  $\mu \in \mathbb{R}$ . On pourrait utiliser celui de ces cercles qui passe par  $i$ , qui est le cercle de Carlyle du faisceau, mais de manière plus générale, on peut choisir ce cercle de telle sorte qu'il passe par un point constructible de coordonnées  $(x, y)$  avec  $y \neq 0$ ; son centre est alors constructible, il a pour abscisse  $p_2/2$  et pour ordonnée

$$\mu = \frac{x^2 + y^2 - p_2x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1p_2}{2y}$$

Le choix de  $x = \frac{p_1+1}{2} = -q_1/2$  permet d'éliminer l'intervention de  $p_2$  et donc de ramener le problème dans le corps engendré sur  $\mathbb{Q}$  par  $p_1$  (i.e.  $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$ ). Un calcul simple donne la condition :

$$\mu = \frac{1}{2}y - \frac{1+p_1}{8y}$$

Le choix de  $y = 1/2$  conduit à la valeur  $\mu = -p_1/4$ . La droite d'équation  $X = \frac{p_1+1}{2} = -q_1/2$  coupe alors le cercle en deux points  $U$  et  $V$  dont les ordonnées respectives sont  $1/2$  et  $y_2$  tel que  $(1/2 + y_2)/2 = -p_1/4$  d'où  $y_2 = -\frac{p_1+1}{2} = q_1/2$ . On note  $\mathcal{C}_2$  le cercle ainsi obtenu; les coordonnées de son centre  $\Omega$  sont  $(p_2/2, -p_1/4)$ , il coupe l'axe des réels en  $P_3$  et  $Q_3$  d'abscisses  $p_3$  et  $q_3$ . Si on veut arriver à  $\alpha = \exp(2i\pi/17)$ ,  $p_1$  et  $p_2$  ayant été correctement choisis, il faut prendre pour  $p_3$  la plus grande des racines.



**Figure 2.6**

Le réel  $p_3$  étant construit, les complexes conjugués  $p_4$  et  $q_4$  sont les racines de l'équation  $X^2 - p_3X + 1 = 0$ ; comme ce sont des éléments de  $\mathbb{U}$ , ce sont les intersections avec le cercle unité de la droite d'équation  $X = p_3/2$ .

Ce sont aussi les intersections avec le cercle unité du cercle  $\mathcal{C}_3$  de centre  $p_3$  et de rayon 1. Si on veut arriver à  $p_4 = \exp(2i\pi/17)$ ,  $p_1, p_2, p_3$  ayant été correctement choisis, il faut prendre pour  $p_4$  la racine dont l'ordonnée est positive.

## 2.6 Complexité de la construction du 17-gone régulier

- Introduction du problème

Pour une même figure constructible à la règle et au compas, comme le pentagone régulier, plusieurs méthodes de construction sont possibles. Le géomètre Emile Lemoine (1840-1912) a proposé en 1888 une méthode d'évaluation qui permet de comparer entre elles les complexités de différentes constructions d'une même figure. Cette méthode consiste à compter le nombre d'opérations élémentaires utilisées dans la construction choisie. Les opérations élémentaires énumérées par E. Lemoine sont les suivantes:

- faire passer une règle par un point donné ( $S_1$ );
- tracer une droite en utilisant une règle ( $S_2$ );
- placer une branche d'un compas en un point donné ( $C_1$ );
- placer une branche d'un compas en un point arbitraire sur un lieu ( $C_2$ );
- tracer un cercle en utilisant un compas ( $C_3$ ).

Le tracé d'une droite passant par deux points a donc pour complexité  $2S_1 + S_2$  soit globalement 3 ; le tracé d'un cercle de centre un point donné et passant par un point donné a pour complexité  $2C_1 + C_3$ , ce qui donne la même complexité globale. L'opération qui consiste à tracer un cercle de centre donné et de rayon la distance entre deux points donnés est autorisée et sa complexité est  $3C_1 + C_3$ . Cela est en accord avec la notion de constructibilité à la règle et au compas que nous avons introduite par la définition 2.4 ; en effet, si  $A, B, O$  sont trois points deux à deux distincts du plan, le milieu  $I$  de  $(O, B)$  est constructible à la règle et au compas à partir de  $\{O, A, B\}$ , le symétrique  $C$  de  $A$  par rapport à  $I$  aussi; le cercle de centre  $O$  et de rayon la longueur  $AB$  passe par  $C$  et peut donc être utilisé dans une construction où les points  $O, A, B$  sont constructibles. Les complexités globales de bonnes constructions sont de 26 pour le pentagone, 75 pour le 17-gone régulier complet, et d'environ 200 pour la construction d'un cercle tangent à trois cercles donnés (problème dit d'Apollonius).

Etant donné une figure à réaliser on peut essayer de déterminer la complexité globale minimale pour une construction de cette figure. Sauf dans des cas très simples, on ne connaît pas cette complexité minimale : on connaît une construction de complexité 26 pour le pentagone, mais le nombre 26 est-il le plus petit possible? Il s'agit pourtant d'un problème purement combinatoire. Si on se donne un nombre fini de points initiaux pour la construction de la figure, sachant qu'il existe des constructions de complexité  $p$ , il suffit de faire la liste de toutes les suites d'opérations élémentaires de moins de  $p$  termes à partir des points initiaux et des points construits au fur et à mesure en regardant pour chacune si elle donne une construction de la figure. Le problème est que le nombre de telles suites d'opérations élémentaires devient rapidement

excessivement grand et il est matériellement impossible de mettre en œuvre cette stratégie. De plus, et c'est une critique qui a été faite depuis le début à cette approche de la complexité des constructions, la recherche d'un nombre minimal conduit souvent à des solutions humainement incompréhensibles et géométriquement très difficiles à prouver. Les géomètres trouvent moins complexes des solutions longues et compréhensibles que des solutions plus courtes mais incompréhensibles.

La construction que nous avons proposée du 17-gone dans la section précédente est algébriquement pure et économique, facilement compréhensible et vérifiable, mais si on veut obtenir un bon score pour la complexité de Lemoine, il faut travailler à réduire le nombre d'opérations élémentaires. L'exercice est évidemment artificiel, on obtiendrait sans doute des résultats différents si on jugeait que tracer une droite pèse moins lourd que tracer un cercle, ou que placer le milieu de deux points est une opération élémentaire. Cette adaptation à la contrainte de minimalité nuit évidemment à la clarté de la construction, mais si on a bien compris le principe on suit sans difficulté particulière la suite des opérations élémentaires proposées ci-dessous. A partir du même principe algébrique, il est peut-être possible de trouver des suites d'opérations élémentaires plus courtes qui réalisent le 17-gone; chaque lecteur a sa chance, il n'est besoin en cette circonstance d'aucune connaissance géométrique particulière.

- Une construction de faible complexité

L'origine du repère est  $O$ , on pose  $I = (1, 0)$ , et  $J = (0, 1)$ . De manière générale, si  $M$  et  $N$  sont des points du plan et  $r$  un réel  $> 0$ , on note  $\mathcal{C}(M, N)$  le cercle de centre  $M$  passant  $N$ ,  $\mathcal{D}(M, N)$  la droite passant par  $M$  et  $N$  et  $\Gamma(M, r)$  le cercle de centre  $M$  et de rayon  $r$ . On supposera dans ce qui suit  $\alpha = e^{2i\pi/17}$ ; les indications de positionnement seront acceptées.

### Préliminaires

Les points initiaux de la construction sont  $O$  et  $I$ ; il convient d'abord de tracer la droite  $\mathcal{D}(O, I)$  ( $2S_1 + S_2$ ), puis le cercle unité  $\mathcal{C}(O, I)$  ( $2C_1 + C_3$ ). Pour obtenir l'autre axe, on tracera par exemple le cercle  $\mathcal{C}(I, Q)$  où  $Q = (-1, 0)$  ( $2C_1 + C_3$ ), le cercle de même rayon  $\Gamma(Q, 2)$  ( $C_1 + C_3$ ), puis l'axe radical de ces cercles ( $2S_1 + S_2$ ), ce qui nous donne le point  $J = (0, 1)$  et l'axe des  $y$ . Cette construction de complexité  $5C_1 + 3C_3 + 4S_1 + 2S_2$  (en tout 14) est considérée comme acquise par D.W. DeTemple dans son article ([16]) ce qui fausse son décompte.

On trace  $\mathcal{C}(J, O)$  ( $2C_1 + C_3$ ), on en déduit la médiatrice de  $OJ$  ( $2S_1 + S_2$ ) et le milieu  $M(0, 1/2)$  de  $OJ$ ; avec la même ouverture de compas on trace  $\Gamma(M, 1)$  ( $C_1 + C_3$ ); on en déduit la médiatrice de  $OM$ , ( $2S_1 + S_2$ ) et le milieu  $B(0, 1/4)$  de  $OM$ ; on trace  $\mathcal{C}(O, B)$  ( $2C_1 + C_3$ ) et on en déduit le point  $A(-1/4, 0)$ . Enfin on trace le cercle  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(A, J)$  ( $2C_1 + C_3$ ); les points  $A$  et  $J$  ont leurs coordonnées dans le corps  $F_0 = \mathbb{Q}$ ; les intersections  $P'_1$  et  $Q'_1$  de  $\mathcal{C}_0$  avec  $\mathcal{D}(O, I)$  ont pour abscisses  $p_1/2$  et  $q_1/2$  où  $p_1, q_1$  sont les solutions de  $x^2 + x - 4 = 0$ .

On arrive à la fin de cette étape à la complexité

$$12C_1 + 7C_3 + 8S_1 + 4S_2 \quad (31)$$

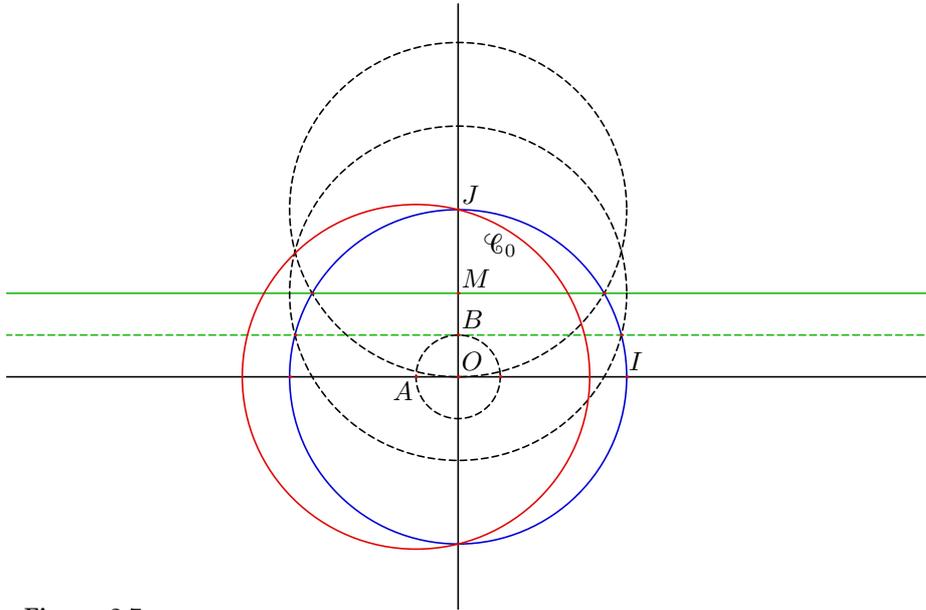


Figure 2.7

Premier niveau

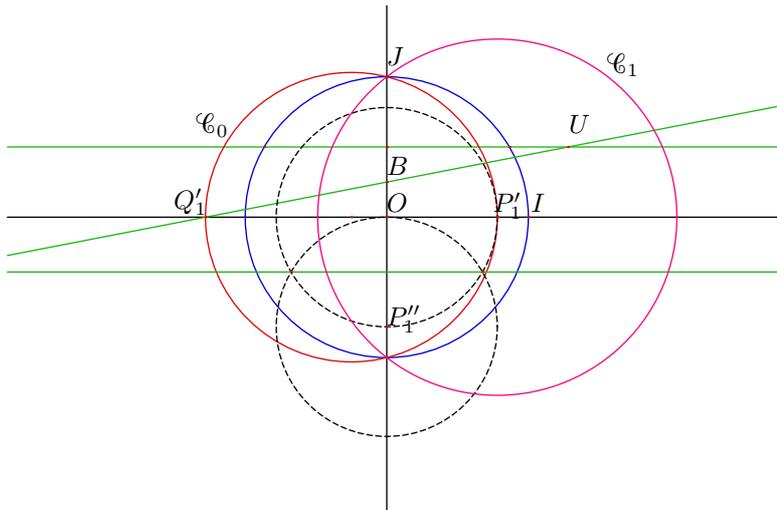


Figure 2.8

On peut choisir l'une des intersections de  $\mathcal{C}_0$  avec l'axe  $\mathcal{D}(O, I)$ , par exemple en choisissant pour  $p_1$  la plus grande. On note  $P'_1$  le point  $(0, -p_1/2)$  qu'on obtient en traçant  $\mathcal{C}(O, P'_1)$  ( $2C_1 + C_3$ ); avec le même rayon  $r$  on trace  $\Gamma(P'_1, r)$  ( $C_1 + C_3$ ) d'où on déduit la médiatrice de  $OP'_1$  ( $2S_1 + S_2$ )



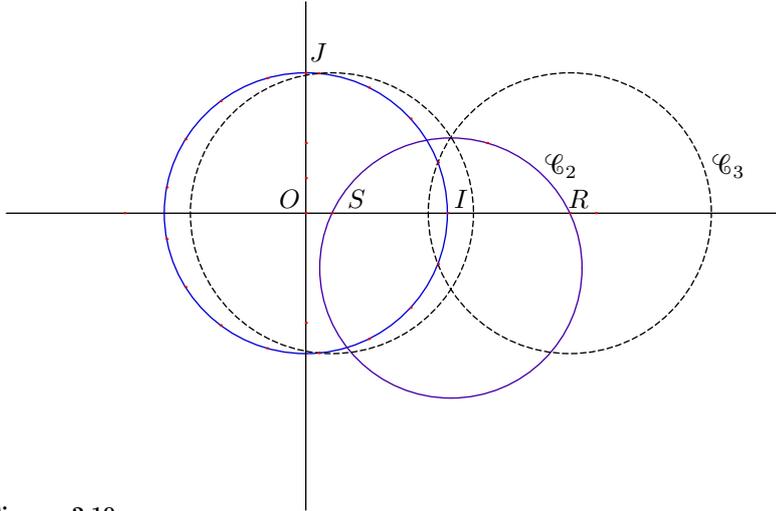


Figure 2.10

L'un des points d'intersection des cercles  $\Gamma(R, 1)$  et  $\Gamma(S, 1)$  semble être sur  $\mathcal{C}_2$ , mais il est en fait légèrement à l'extérieur, sa distance à  $\Omega$  est plus grande que le rayon de  $\mathcal{C}_2$  d'environ  $6/1000$ .

### Conclusion

On obtient une construction partielle du 17-gone de complexité :

$$22C_1 + 12C_3 + 14S_1 + 7S_2 \equiv 55 ,$$

à partir des points initiaux  $O$  et  $I$  ; si on veut comparer ce score à celui de D.W. DeTemple ([16]) il convient de retrancher la complexité de la construction du cercle unité et des axes :  $5C_1 + 3C_3 + 4S_1 + 2S_2$  (14), ce qui donne 41 au lieu des 45 de la méthode présentée par D.W. DeTemple.

On peut terminer la construction du 17-gone en explorant toutes les possibilités de choix que nous avons laissées de côté, et donc en effectuant des constructions complètes niveau par niveau. En procédant ainsi on fait toutes les opérations préliminaires :  $12C_1 + 7C_3 + 8S_1 + 4S_2$ , puis deux fois les opérations de niveau 1, soit  $10C_1 + 6C_3 + 8S_1 + 4S_2$ , puis quatre fois les opérations de niveau 2, soit  $8C_1 + 4C_3 + 8S_1 + 4S_2$ , et enfin huit fois les opérations de niveau 3, sauf que comme tous les cercles sont de rayon 1 on garde le même rayon, d'où la complexité  $(3C_1 + C_3) + 7(C_1 + C_3) = 10C_1 + 8C_3$ . On arrive donc en procédant ainsi à la complexité

$$40C_1 + 25C_3 + 24S_1 + 12S_2 \quad (101)$$

On obtient de meilleurs résultats en complétant la construction à l'aide de  $S$ , ce qui donne  $\alpha^4$  et  $\alpha^{-4}$  puis en construisant le reste du 17-gone régulier à l'aide de cercles bien choisis qui recourent le cercle unité. On arrive, pour une complexité de la construction totale du 17-gone, à 75 ou peut-être moins.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lebesgue h. *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
- [2] Klein f. *Famous problems*, réimpression, Chelsea, 1955.
- [3] Weil a. *La cyclotomie jadis et naguère*, Œuvres, volume 2
- [4] Arnaudiès j.m., Bertin j., *Groupes Algèbres et Géométrie, Tome 1*, Ellipses, Paris, 1993.
- [5] Martin g.e., *Geometric constructions*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [6] Bix r., *Conics and Cubics, A Concrete Introduction to Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [7] Carrega j.-c. *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann, Paris, 2001.
- [8] Gauss f., *Recherches Arithmétiques, trad. par A.C.M. Poulet-Delisle*, Blanchard (réimpression), 1953.
- [9] Richelot f.j. *De resolutione equation  $x^{257} = 1$  sine de divisione circuli in partes 257 inter se equales connetione*, Journal de Crelle, (p. 1-26, p. 146-164, p. 209-230, p. 337-358), vol IX, 1832.
- [10] Wantzel p., *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathématiques pures et appliquées p. 366-372, Paris, 1836-37.
- [11] Hermes g., *Über die Teilung des Kreises in 65 537 gleiche Teile*, Göttingen Nachrichten, p. 170-186, 1894.
- [12] Pierpont j., *On an undemonstrated theorem of the Disquisitiones Arithmeticae*, American Mathematical Society Bulletin 2 p. 206-207 and plate II, 1895-96.
- [13] Gleason a.m., *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly 95, no. 3, p. 185-194, 1988.
- [14] DeTemple d.w., *Carlyle Circles and Lemoine Simplicity of Polygon Constructions*, Amer. Math. Monthly 98, p. 97-108, 1991.
- [15] Videla c.r., *On points constructible from conics*, Mathematical intelligencer 19 p. 53-57, 1997.
- [16] Arnaudiès j.m., Delezoide p., *Nombres (2,3)-constructibles*, Advances in Mathematics 158, 2001.