Une réforme exemplaire de l'enseignement des mathématiques en Allemagne : la réforme de Meran en 1905(*)

Katja Krüger(**)

Résumé. Au début du XX^{e} siècle, à peu près au même moment qu'en France , une profonde réforme des mathématiques eut lieu en Allemagne, la réforme dite de Meran[(1)], inspirée par Klein. Elle s'accompagne d'une introduction dans l'enseignement secondaire de l'étude des fonctions et du calcul différentiel et intégral, et avec eux d'importantes conséquences sur les parcours lycéens. De ce point de vue tout se passe comme si entre temps les idées des réformateurs gravitant autour du mathématicien Félix Klein s'étaient insinuées avec succès dans les pratiques éducatives. Le concept de fonction se situe aujourd'hui au centre des premiers niveaux de l'enseignement secondaire et cela pas seulement dans les programmes allemands ; et l'enseignement de l'analyse se trouve être une partie essentielle des mathématiques supérieures. Cependant, si l'on mesure le succès de la réforme de Meran à l'aune de son objectif principal initial, à savoir : « *l'éducation à une habitude de pensée fonctionnelle* », on constate une autre réalité. Dans ce qui suit, nous voulons montrer que dans cette perspective, la réforme de Meran exerça peu d'influence sur les pratiques scolaires. Pour cela il faut d'abord préciser ce que la réforme de Meran entendait par « *pensée fonctionnelle* ». Cette question sera étudiée en partie par des remarques d'ordre didactique extraites du programme de Meran, en partie au moyen de deux exemples concrets tirés de l'enseignement effectif des mathématiques de cette époque. Finalement se pose la question pour nous aujourd'hui : jusqu'à quel point les « vieilles » idées de la réforme de Meran peuvent-elles avoir un intérêt pour l'enseignement secondaire actuel des mathématiques ?

Introduction

Au début du XX^{e} siècle, des réformes de l'enseignement secondaire des mathématiques eurent lieu dans plusieurs pays européens ainsi qu'aux États-Unis d'Amérique. En 1908, lors du Congrès de Mathématiques de Rome et sur proposition du mathématicien Smith fut fondée la Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques (CIEM). La mission de cette commission était de comparer les tentatives de réforme de l'enseignement des mathématiques en Europe et d'exposer leurs arrière-plans historiques respectifs. Le noyau commun des réformes de l'enseignement de cette période dans les différents pays était le traitement de l'étude des fonctions et l'introduction d'éléments de calcul différentiel et intégral, ainsi que de la géométrie analytique. Après un préliminaire concernant

(*) **Traduit de l'allemand par Jean-Pierre Friedelmeyer**.

(**) Prämäckerweg 10, D-60433 Frankfurt (mél : ka_krueger@gmx.de).

(1) Meran est une ville située aujourd'hui en Italie (Tyrol).

l'influence de la réforme française sur la réforme de Meran autour de Félix Klein, je me consacrerai dans la suite à l'histoire allemande.

1 L'influence française sur la réforme de Meran

La réforme de Meran reçut une forte impulsion de la France durant sa première phase. Félix Klein fit référence à plusieurs reprises aux réformes françaises de l'enseignement dans un article qui eut une certaine influence : « *Sur une réorganisation de l'enseignement des sciences et des mathématiques dans les écoles supérieure*s » (cf. Klein 1904). À cette occasion, il conseillait aux professeurs de mathématiques la lecture des deux publications suivantes :

- J. Tannery : « *Notions de mathématiques* », Paris 1903.
- E. Borel : « *Algèbre* », Paris 1903.

Un passage du livre de Tannery confirme que divers aspects de la pensée fonctionnelle étaient aussi mis en avant en France, bien que cette expression ne soit pas utilisée explicitement et ne devait pas atteindre le même degré de popularisation qu'en Allemagne.

On ne sait un peu ce que sont les mathématiques, on ne soupçonne leur extraordinaire extension, la nature des problèmes qu'elles posent et qu'elles résolvent, que lorsque l'on sait ce qu'est une fonction, comment on étudie une fonction donnée, comment on suit ses variations, comment on représente son allure par une courbe, (…), comment on est amené à créer de nouvelles fonctions, de nouvelles courbes, à en étudier les propriétés. Ce sont ces notions et ces méthodes dont on a besoin pour lire les livres techniques où les mathématiques interviennent. Elles sont indispensables à celui qui veut comprendre quelque chose à ce mouvement scientifique qui s'accélère, à ces applications des sciences qui se multiplient, et qui, de jour en jour, tendent à modifier plus profondément notre façon de penser et de vivre.

Elles sont simples et faciles, quand on les réduit à ce qu'elles ont d'essentiel, plus faciles que bien des démonstrations que l'on ne craint pas de donner aux élèves, qui sont longues et compliquées, qui n'ont point de portée au-delà de ce qu'elles prouvent. Elles doivent, à ce que je crois, pénétrer de plus en plus dans l'enseignement élémentaire, pour l'abréger et le fortifier(2).

Des parallèles sont perceptibles dans la mise en évidence de l'étude des fonctions et du « principe fusionnel » (cf. chap. 2). Sous l'influence de Darboux, les fonctions et leurs représentations graphiques firent leur entrée dans le « *Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons* » publié en 1902, et, dans les programmes de l'École Polytechnique de Paris, on prit même en considération des thèmes du calcul différentiel et intégral.

Dans la revue NCTM, 9, de l'année 1934, sur le thème « *Relational and functional thinking in mathematics* » on trouve des citations d'éminents réformateurs de

(2) Tannery Jules, (sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure), *Notions de mathématiques*, p. vi, Notions historiques par Paul Tannery, Classe de Philosophie, certificat des sciences physiques, chimiques et naturelles, programmes du 31 mai 1902, Librairie Delagrave, 1903.

l’enseignement sur le développement du mouvement de réforme en Allemagne et en France. D.E. Smith en fit le résumé suivant lors du Congrès international de mathématiques de Cambridge en 1912 :
« *Commencé en France durant les vingt dernières années et vigoureusement défendu en Allemagne dans la dernière décennie, il* (le mouvement de réforme) *mérite d’être fortement recommandé, s’il est traité raisonnablement* » (Smith 1912, cité d’après NCTM 1934, p. 61).
Et Gutzmer écrit dans un mémoire consécutif à la mort de Félix Klein :
Les fonctions furent introduites en France dans les programmes de 1902 sous l’influence de Darboux. Ces notions sont maintenant devenues générales dans les pays germaniques. La réforme amorcée en France s’est étendue à l’Allemagne. (Gutzmer 1920, cité d’après NCTM 1934, p. 61)

À peine trois années plus tard, un projet de programme d’enseignement fut développé en Prusse pour le cours de mathématiques dans les classes supérieures, lequel rassemblait les idées de la réforme de Meran, et devait exercer également une grande influence sur les pratiques pédagogiques dans d’autres régions de langue allemande. Les programmes prussiens officiels ne furent de toute façon remaniés selon ce modèle qu’en 1925. Contrairement à la France, les idées réformatrices développées en Prusse à partir de la réforme de Meran eurent un écho particulier qui devait se répandre sous le slogan consensuel de « la pensée fonctionnelle » et pas seulement en Allemagne.

2 Le programme de Meran de 1905 : sommet de la réforme de l’enseignement des mathématiques en Allemagne

L’expression « *pensée fonctionnelle* » fut employée explicitement pour la première fois dans le Programme de mathématiques de Meran de 1905 et se développa bientôt au-delà de la Prusse comme mot d’ordre consensuel de la réforme de l’enseignement des mathématiques au lycée. Ce programme fut élaboré par une commission élue, à l’initiative de Félix Klein, par l’assemblée générale de la Société Allemande des Naturalistes et Médecins à Breslau en 1904, et qui avait pour mission d’élaborer une réforme de la totalité du complexe éducatif mathématiques-sciences. Dès l’année suivante la « Commission de Breslau » était en mesure de présenter à l’assemblée générale de cette Société des conclusions en forme de projet de programmes pour les lycées dans les domaines des mathématiques, de la physique, la chimie et la biologie. Le programme de mathématiques fut développé par une sous commission (centrée sur mathématiques et physique) sous la direction de Klein. Exceptés Klein et Gutzmer, il y avait là encore trois enseignants, connus à l’époque comme membres de l’Union pour l’enseignement des mathématiques et des sciences (en abrégé : Förderverein), ainsi qu’un membre du conseil d’administration de la Société des Ingénieurs allemands.
Au total, le programme de Meran peut être considéré comme le point culminant des efforts entrepris depuis 1890, particulièrement en Prusse, pour la modernisation de l’enseignement supérieur des mathématiques. Divers projets de réforme antérieurs furent réunis avec habileté et organisés sous le mot d’ordre de « *pensée*

fonctionnelle » (Krüger 2000, chap. 5 et 6). Il s'agit :

- du concept de fonction et des représentations graphiques,
- de l'introduction du calcul différentiel et intégral,
- d'une meilleure prise en compte des applications,
- du « principe du mouvement » issu de ce qu'on appelle la « nouvelle géométrie ».

Le nouveau mot d'ordre ne visait pas seulement la modernisation du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques afin de réduire le « fossé » maintes fois déploré entre les mathématiques du secondaire et du supérieur, mais il intégrait aussi des principes didactiques depuis longtemps en discussion. Cette tentative d'intégration était déjà sensible dans l'introduction du programme de mathématiques de Meran :

Il est bon, pour une fois, d'adapter davantage le déroulement des études au cours naturel du développement intellectuel que ce qui a été fait jusqu'à présent, (et comme dans les autres disciplines), de le relier partout à l'intuition, de placer les nouvelles connaissances dans une relation organique avec la science existante, finalement de rendre peu à peu consciente la cohérence du savoir en soi et avec le reste des enseignements scolaires. En outre, il s'agira de renoncer à toutes les notions trop spécialisées et particulières, sans signification pratique, et d'amener par contre à son plus grand développement la capacité à mathématiser les phénomènes du monde environnant. Il en découle deux obligations singulières : le renforcement de la puissance d'intuition spatiale, et ***l'éducation à une habitude de pensée fonctionnelle*** (Plan de Meran 1905, p.104).

En relation avec l'éducation à la pensée fonctionnelle, des principes didactiques fondamentaux sont nommés dans cette présentation, qui sont aujourd'hui encore, ou de nouveau, d'actualité :

• le principe génétique

Dès l'introduction, il est signalé que le déroulement de l'enseignement mathématique doit, plus que jusqu'à présent, être adapté au cours naturel du développement intellectuel. Cela évoque un principe génétique (cf. Schubring 1978). Les propositions de Meran réveillent d'anciennes et méthodiques tentatives de réformes du XIX^{e} siècle, qui privilégiaient, particulièrement dans l'enseignement de la géométrie, une procédure heuristico-génétique, à l'encontre des manières traditionnellement dogmatiques et systématiques.

• le principe utilitaire

Également la demande pour le plus grand développement possible d'une capacité à mathématiser les phénomènes du monde environnant, désigné à cette époque par « principe utilitaire », peut être renvoyée à des tentatives de réforme plus anciennes. Elle était liée à la demande maintes fois exprimée du renforcement des applications dans l'enseignement mathématique, telle qu'elle était déjà formulée et discutée par le Förderverein en 1891 dans les « Conclusions de Brunswick ». Aujourd'hui on parlerait dans ce contexte d'orientation vers les applications, d'ouverture vers l'environnement ou de mathématisation, et l'on distinguerait entre réalité et modèle mathématique.

• le principe de concentration
Ensuite il est fait allusion à ce que l'on appelait alors « le principe de concentration », lorsque l'on déclare que l'enchaînement du savoir doit se construire progressivement, de degré en degré. Lietzmann caractérisait cette exigence comme un « principe didactique » qui conduirait à une « concentration » de la totalité de l'enseignement sur le concept central de fonction « dans un habillage algébrique ou arithmétique » (Lietzmann 1910, p. 144). Cependant il n'est déjà plus question, chez lui, de *pensée fonctionnelle*. D'un point de vue actuel, si l'on considère cette demande de façon plus générale, on évoquerait des mots d'ordre tels que « principe spirale », idée fondamentale ou encore mise en place d'un réseau vertical et horizontal.
• le principe fusionnel
Le même paragraphe peut aussi s'interpréter différemment. L'enchaînement des connaissances avec « le reste des matières enseignées à l'école » doit se faire de plus en plus consciemment. Ici il est fait allusion à de nombreuses et embarrassantes demandes de fusion entre les spécialités. On parlait ainsi de « la fusion des diverses branches du cours de mathématiques » (exposé d'habilitation de Schimmack 1911) ou de « la fusion de l'espace et du nombre » par Klein (cf. la citation de Tannery 1903 au premier paragraphe). À ce « principe fusionnel » se greffent aussi les demandes avancées vers la fin du 19e siècle dans les discussions sur la didactique de la géométrie, pour une fusion de la planimétrie et de la stéréométrie, ainsi que la mise en avant d'une connexion interne de la géométrie, de l'analyse et de la mécanique.
L'exigence d'une « *éducation à la pensée fonctionnelle* » apparaît comme conséquence de ce que nous avions appelé « principes didactiques » et est exprimée comme « devoir privilégié ». « *La pensée fonctionnelle* » au sens de la réforme de Meran signifie une pratique de pensée interdisciplinaire, qui concerne l'ensemble du cours de mathématiques et non pas seulement des domaines particuliers tels que la rubrique « fonctions » dans le cours d'algèbre.
Ainsi discipliner la pensée restait le but essentiel de l'enseignement mathématique supérieur en même temps que son fondement. L'adjectif « *fonctionnelle* » désigne cependant un déplacement du centre d'intérêt : en comparaison du traditionnel objectif formel « *d'entraînement à la pensée logique* » se mettent en avant des aspects plus fortement « matériels » du choix des matières et de l'organisation. Le nouveau fil directeur programmatique « *éducation à la pensée fonctionnelle* » liait une éducation de pensée formelle à un principe « matériel » de concentration des matières. La grande performance historique de la réforme de Meran se trouve justement dans l'intégration de deux idéaux de formation contradictoires au 19e siècle, la formation formelle et la formation « matérielle ».

3. Concentration des matières à enseigner et flexibilité des relations fonctionnelles

Par rapport aux programmes d'enseignement en cours dans l'État prussien de 1901, le programme de Meran représentait un accroissement significatif et substantiel des programmes, par l'adjonction nouvelle de l'étude des fonctions et de la géométrie analytique, ainsi que par celle (facultative) du calcul différentiel et intégral. En regard

de l'acuité des discussions sur la question du surmenage des élèves, à nouveau très aiguës autour de 1900, le problème d'une surabondance de matières pesait lourdement sur les réformateurs. Cela se traduisit dans le cercle du mouvement réformateur par une mise à l'écart explicite du problème du surmenage. L'intérêt pour les questions d'organisation des matières était également poussé au premier plan par le problème de la multiplication rapide d'un grand nombre de démissionnaires qui quittaient l'école après les premières années du secondaire avec le privilège socialement important du service militaire des « volontaires pour un an ».
Avec le plan de Meran, on essaya l'allégement et la concentration des matières d'enseignement. La ligne programmatique « *éducation à la pensée fonctionnelle* » servait à une structuration verticale : les éléments isolés et les méthodes de résolution de problèmes reposant sur des artifices furent écartés du programme, et les autres ainsi que les nouveaux éléments furent concentrés sur l'idée centrale de « *la pensée fonctionnelle* ». Au delà de l'étude des fonctions on essaya d'exercer et d'assouplir la pensée en termes de dépendances variationnelles et fonctionnelles. Dans ce qui suit nous précisons cette ébauche de réalisation des programmes dans les deux parties principales de l'enseignement des mathématiques d'alors : l'arithmétique et l'étude de l'espace.

3.1. Éducation à la pensée fonctionnelle en arithmétique

L'éducation à la pensée fonctionnelle doit être préparée dans l'enseignement de l'arithmétique de la classe « Quarta(3) », par la mise en valeur et la signification d'expressions littérales, en même temps que l'entraînement à l'étude de dépendances fonctionnelles par l'intermédiaire de la variation de grandeurs usuelles. Cette méthode correspond au procédé utilisé couramment aujourd'hui pour le commencement du calcul littéral, où l'on met l'accent sur l'introduction et le comportement de variables, ainsi que sur l'aspect fonctionnel de certaines formules, ce qui représente un pas important en direction de l'étude des fonctions.
À partir de l'« Obertertia » jusqu'à l'« Obersekunda », les élèves doivent se familiariser avec divers exemples concrets de fonctions (linéaire, quadratique, puissance, logarithme, exponentielle et trigonométriques), ainsi qu'avec les formes de représentations graphiques et les tableaux. Ce faisant, les représentations graphiques des fonctions sont mises en valeur dès l'« Untertertia » et de proche en proche dans les classes suivantes, et appliquées à la résolution d'équations ou pour l'illustration de dépendances trouvées empiriquement.
Ainsi est mis en avant pour la première fois le rôle central joué au lycée jusqu'à aujourd'hui par les fonctions et leurs représentations graphiques. Il est frappant de constater – vu d'aujourd'hui – qu'il n'est pas question, dans le programme, « **du** » concept de fonction ou de concepts clairement associés, mais de « **dépendances** » mutuelles, régulières ou fonctionnelles, ainsi que de « **variables** » dépendantes ou indépendantes. De cette manière, d'anciennes conceptions des fonctions sont convoquées dans le programme de Meran, qui se sont formées dans l'histoire des mathématiques et se sont perpétuées durant des siècles, et qui s'adaptaient mieux aux

(3) Voir le tableau de comparaison des niveaux d'enseignement, en annexe.

applications souhaitées (principalement en mécanique) que la conception d'une correspondance point par point (de la mathématique contemporaine).
Une définition générale du concept de fonction (à la manière de Dirichlet) ne se trouve pas dans les propositions de Meran au début de l'étude des fonctions, contrairement à ce qui se pratique aujourd'hui dans beaucoup de manuels scolaires des classes 8 et 9(4). Ce n'est qu'en Première que se fait une synthèse des exemples concrets de fonctions traités jusqu'alors. Les fonctions pouvaient alors également être étudiées comme un « tout » et leur comportement variable être « étudié » par les méthodes de l'analyse. Mais même là, la définition de Dirichlet n'était pas prise en considération ; il s'agissait au contraire de
l'examen des fonctions rencontrées jusqu'à présent dans leur comportement global de croissance ou de décroissance, (éventuellement avec l'utilisation des concepts de quotient différentiel et d'intégrale), avec la considération de nombreux exemples tirés de la géométrie et de la physique, particulièrement de la mécanique (Programme de Meran 1905, p.111).
Le calcul différentiel et intégral ne devait pas apparaître comme un supplément imposé dans l'enseignement, mais comme « sommet » dans une construction « organique » de l'intégralité de l'enseignement des mathématiques. En ce sens, l'exigence d'une *éducation à la pensée fonctionnelle* peut être comprise comme tentative d'instituer une propédeutique à l'introduction (fortement contestée à l'époque) du calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire. Un vote du Förderverein sur cette question eut encore lieu en 1904 dont l'issue resta incertaine.

3.2. L'éducation à la pensée fonctionnelle dans l'étude de l'espace

Par l'*éducation à la pensée fonctionnelle* n'étaient pas seulement concernées une mise en place et une accoutumance à la fréquentation des fonctions. Des recommandations précises à une *pensée fonctionnelle* se trouvent aussi dans les présentations des programmes pour ce qui concerne l'étude de l'espace, de manière suivie depuis la Quatrième jusqu'à la Première.
Cette habitude à une pensée fonctionnelle doit aussi être cultivée en Géométrie par la considération constante des transformations et doit concerner toutes les situations de modification des grandeurs ou de position ; par exemple, par la modification de la forme des quadrilatères, ou la modification de la position relative de deux cercles etc. Mais en même temps, la considération des rapports qui se présentent par l'ordonnancement des multiples points de vue, offre un moyen privilégié pour apprendre la pensée logique, qui doit être utilisée autant que possible, y compris la considération des cas de bifurcation et la mise en évidence des cas limites (Programme de Meran 1905, p. 113).
Avec la variation, la mobilité des objets géométriques, les réformateurs de Meran se retournent contre ce qui dominait au 19e siècle sous le qualificatif de « méthode euclidienne » et qui était critiqué comme « rigide », « sans vie », et inadapté au développement intellectuel des élèves. « Rigide » était ici à comprendre en un double sens, d'une part comme schéma (rigide) de théorème, hypothèse, affirmation et

(4) À peu près nos classes de Première et Terminales.

preuve, d'autre part comme méthode (rigide) de démonstration au moyen de congruences (de triangles).
À présent le cours de géométrie doit devenir plus « mobile », en « cultivant » aussi constamment la *pensée fonctionnelle*. Pour cela il faut commencer par « mettre en mouvement » ou « penser en mouvement » les figures, en tout ou en parties, pour laisser surgir les multiples rapports correspondants entre mesures et positions ; comment les modifications des grandeurs et des positions agissent sur les propriétés d'une figure et sur ses relations.
Dans l'ensemble, des emprunts significatifs à des tentatives antérieures de réforme sont révélés dans l'insistance du programme de Meran sur « le principe de mobilité ». Environ un siècle déjà avant la réforme de Meran, Johann Friedrich Herbart avait considéré des figures géométriques en variation continue qu'il appelait « fluides », comme élément essentiel de son « Enseignement par l'image », comme par exemple dans ses « Exercices élémentaires » de son « ABC de l'intuition » adressés à Pestalozzi (Herbart 1804). Au cours du 19^{e} siècle, à la suite de l'impétueux développement de la géométrie projective, de nombreux mathématiciens et pédagogues, depuis Jacob Steiner, Karl Wilhelm Gallenkamp, Guido Hauck jusqu'à Peter Treutlein ont essayé de réformer l'enseignement traditionnellement euclidien en tenant compte des nouvelles méthodes et des nouveaux contenus. La controverse « nouvelle géométrie contre géométrie euclidienne » se trouvait être au centre des discussions didactiques sur la géométrie à la fin du 19^{e} siècle.

4. Deux exemples tirés de l'enseignement au lycée

La *pensée fonctionnelle* ne s'est pas seulement développée pour le concept de fonction, mais aussi pour l'étude des courbes et leur compréhension. Dans le cours de géométrie du lycée, l'étude des courbes pouvait se traiter de diverses façons ; par exemple, par une construction point par point, comme lieu géométrique ou engendrée mécaniquement par un mouvement ponctuel continu. Dans le cadre de la géométrie analytique, les courbes étaient alors décrites au moyen d'équations et construites au moyen de représentations graphiques dans un système de coordonnées cartésien. (Principe fusionnel). Comme champ d'exercice caractéristique de la *pensée fonctionnelle*, l'étude de familles de courbes faisait autorité ; par exemple : comment se modifie la forme (géométrique) d'une courbe par la variation (arithmétique) des paramètres ? Un exemple souvent cité et particulièrement représentatif aux yeux des réformateurs de cette époque était la « Métamorphose d'une conique », que l'on peut trouver sous des formes variées dans de vieux manuels scolaires. D'autres exemples pour l'exercice de la *pensée fonctionnelle* en géométrie et qui illustrent le contexte cinématique, se trouvent dans Krüger (2000), chap. 7.5.

4.1. Métamorphose d'une conique

Relativement aux explications du programme de Meran, les coniques devaient être traitées dans la classe de Première supérieure de telle sorte :

qu'apparaisse clairement à la conscience que la forme de la conique dépend d'abord du cône lui-même, et de la position du plan sécant ; d'autre part qu'elle dépend aussi de la position des foyers et des directrices. Les cas limites méritent ici également une attention particulière (Programme de Meran, 1905, p. 114) .

Ce thème a pu être enseigné dans le cadre de la géométrie plane ou dans l'espace, ainsi que de la géométrie synthétique ou analytique. En ce sens, la métamorphose d'une conique offre un exemple caractéristique de la « fusion » de la géométrie plane et de la géométrie de l'espace, ainsi que de la « fusion » de l'arithmétique et de la géométrie. Mettons en lumière cette affinité de l'ellipse, l'hyperbole, la parabole par des variations dans ces différents domaines.

• **Dans l'espace**

L'introduction des coniques se fait habituellement en géométrie dans l'espace. La forme d'une conique est alors déterminée par la position dans l'espace du plan sécant relativement au cône de révolution (variation de l'angle au sommet du cône ou variation du plan sécant). De cette manière ce n'est pas seulement la faculté d'intuition spatiale qui est sollicitée, mais, de plus, on aboutit à une première représentation de la « parenté » projective de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Dans cette constellation, les coniques se présentent comme des projections centrales du cercle, si l'on considère le sommet du double cône comme centre de projection.

• **Dans le plan**

Les coniques peuvent aussi être introduites sans recours à l'espace et traitées comme de pures courbes planes. Ainsi elles peuvent être définies comme lieu géométrique des points dont le rapport des distances à la directrice et à un foyer est constant.

Kepler, déjà, avait reconnu que les coniques pouvaient être engendrées par le mouvement continu d'un point. En partant d'une conique, par exemple d'une ellipse, on peut engendrer une infinité d'ellipses, en faisant s'éloigner de façon continue un foyer de l'autre. Lorsque le foyer « baladeur » s'éloigne « à l'infini », l'ellipse devient une parabole. Quant le foyer « traverse » en quelque sorte l'infini, et émerge à nouveau « de l'autre côté », la parabole se transforme en deux branches d'hyperbole. Par un nouveau rapprochement continu à proximité du foyer fixe, une infinité d'hyperboles est engendrée, avant qu'un cas limite n'aboutisse à une droite qui conduit à nouveau à une famille d'ellipses et finalement nous ramène au point de départ.

Avec le nouveau média du cinéma., au début du 20^{e} siècle, de telles métamorphoses de coniques furent projetées dans des films pédagogiques. L'inspecteur Münch de Darmstadt conçut dès 1911 des dessins animés visualisant la progression continue et « organique » des ellipses, respectivement des hyperboles, vers la parabole. Une variante moins coûteuse pour la visualisation dynamique de « figures fluentes » était produite par les « Daumenkinos(5) » aussi appelés « cahiers de cinéma » et bricolés par les élèves. De cette manière on cherchait à rendre sensible de façon vivante les relations fonctionnelles entre des objets géométriques. On parlait de « vie fonctionnelle » d'objets géométriques.

(5) Les « *Daumenkinos* » (« flipbook » en anglais) sont des ensembles de pages avec des dessins que l'on feuillete très vite et font donc un peu l'effet d'un film (note du traducteur)

• **Géométrie analytique**

Au moyen de la représentation graphique des ellipses et des hyperboles dont l'équation est donnée dans un repère dont l'origine se trouve à l'un des sommets, nous obtenons la famille de coniques ci-dessous en faisant varier le demi-axe a et en gardant le paramètre constant $p = \frac{b^2}{a}$.

Cette « métamorphose » peut être étudiée en comparant les équations des courbes avec leurs représentations graphiques : la parabole comme cas limite entre les ellipses et les hyperboles ($a = \infty$), la ligne droite comme second cas limite (*attention en prenant* $a = 0$!) et le cercle comme courbe de bifurcation dans la famille des ellipses ($a = p$).

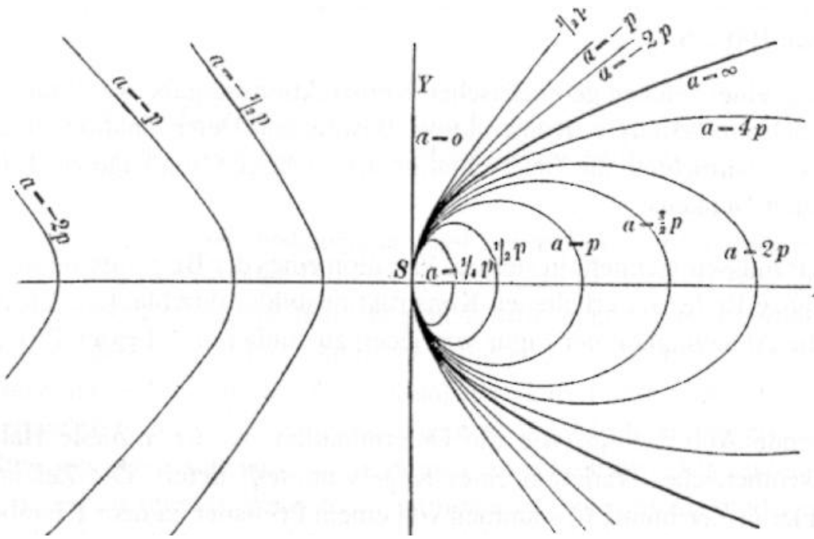

Figure 1

Ellipse : $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$; Cercle : $y^2 = 2px - x^2$;

Hyperbole : $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$; Parabole : $y^2 = 2px$.

On obtient une autre « métamorphose de coniques » analytique au moyen de la représentation en coordonnées polaires : $r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$.

En faisant varier l'excentricité ε nous mettons en évidence pour :

– $0 \leq \varepsilon < 1$, une famille d'ellipses ;

– $\varepsilon = 0$, le cercle comme courbe de « bifurcation » pour les ellipses ;

– $\varepsilon = 1$, la parabole comme « cas limite » ;

– $\varepsilon > 1$, une famille d'hyperboles.

• Géométrie synthétique

Le problème de construction suivant de Lesser (1907) traite de manière synthétique une métamorphose de coniques :

Construire une conique connaissant un foyer F, *son grand axe* 2*a et une tangente t dont le point de contact est donné* (Lesser 1907, p. 43).

La solution d'un tel problème de construction géométrique était traditionnellement donnée en quatre étapes : analyse, construction, démonstration et détermination. Lesser considérait aussi l'étape de détermination comme élément important pour l'entraînement à une pensée fonctionnelle :

nous devons plutôt parcourir la série entière des figures construites en faisant varier de manière continue l'une des pièces clefs, pour en étudier la dépendance avec la figure cherchée (Lesser 1907, p.42).

La figure 2 qui suit montre comment la détermination de l'axe variable 2*a* nous offre synthétiquement une « variation de conique ». Les figures (y compris la figure fausse n° 6) viennent d'un élève de Première de la Ober-Realschule Klinger à Francfort du nom de Klamberg. Lesser souligne le fait que cette déduction et cette recherche « fluide » et « unitaire » des formes de coniques était particulièrement stimulante pour l'élève.

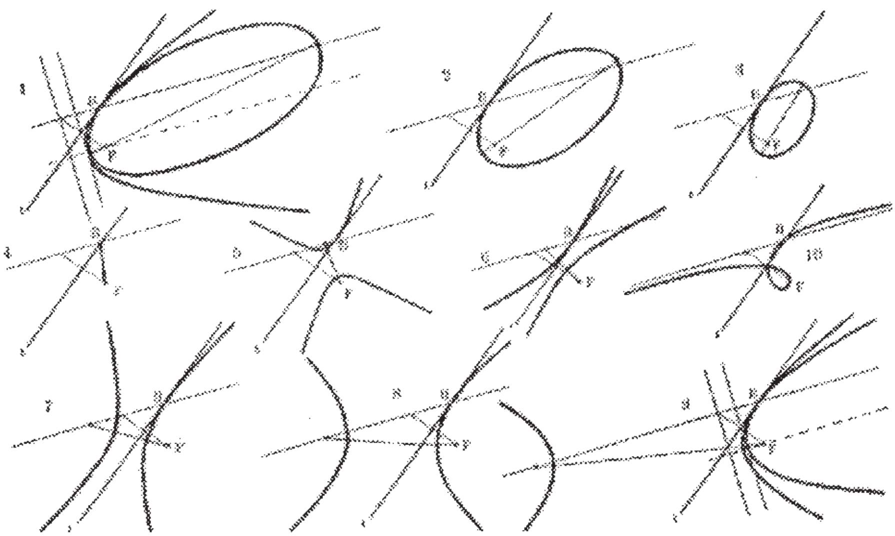

Figure 2

Cette situation des « métamorphoses de coniques » montre de façon exemplaire des aspects caractéristiques de *pensée fonctionnelle* dans le sens originel défini par les réformateurs de Meran. La *pensée fonctionnelle* était fondatrice de manières de penser cinématiques et englobantes. Elle considérait des modifications continues de figures ou, comme l'on disait alors, des figures « fluentes », avec le but de rendre sensible le caractère général d'une figure, au-delà des cas particuliers.

4.2 La formule de Taylor : approximation d'une fonction par des « paraboles osculatrices »

Divers exemples et matériels d'enseignement de cette époque montrent que la *pensée fonctionnelle* n'était pas seulement un slogan ou de la pure idéologie, mais qu'au contraire elle était entièrement liée à des contenus exigeants. Particulièrement dans l'enseignement de l'analyse elle devait s'exercer, par exemple, par l'étude non automatique de fonctions (comme application du quotient différentiel) et la recherche d'extréma, ainsi que dans ses applications à la mécanique. La mise en place et la résolution de quelques équations différentielles ordinaires (par exemple la croissance exponentielle, les oscillations harmoniques et le pendule) apparaissaient comme le sommet de l'enseignement scolaire de l'analyse, et comme le champ approprié de l'exercice à la *pensée fonctionnelle*. On trouvera de tels exemples de « couronnement » à l'éducation à la *pensée fonctionnelle* et à ses applications dans Krüger (2000), Chap.7.6 et 7.7.
Comme objet important de l'analyse scolaire on regardait le théorème de Taylor sous un aspect géométrique intuitif. Au lieu de l'habituel traitement formel, au moyen de séries infinies, qui avait cours à l'époque, il fallait traquer graphiquement, dans le cadre de l'étude des fonctions, l'approximation successive d'une fonction par des polynômes de degrés de plus en plus élevés. On observe là clairement un renversement de la conception de l'analyse algébrique poursuivie tout au long du 19e siècle dans les mathématiques scolaires, pour une analyse infinitésimale (des fonctions). Au lieu des opérations algébriques formelles au moyen des séries infinies, les développements limités si importants dans les applications pratiques sont mis au premier plan et par là le caractère d'approximation du calcul infinitésimal.
Comme point de départ, on prend la question de savoir si le comportement d'une fonction quelconque, suffisamment différentiable, peut être approché convenablement sur un certain intervalle par des courbes aussi simples que possibles ?
Comme approximation de f dans un voisinage de a on choisit la tangente et l'on pose[(6)] :

$$f(x) \approx p_1(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a).$$

On peut aboutir à une seconde et meilleure approximation par la considération suivante, qui suppose cependant des connaissances en calcul intégral.
Dessinons la représentation graphique de la première dérivée de la fonction f (cf. $y = f'(x)$ dans la figure 3 ci-dessous) . La différence $f(x) - f(a)$ est exactement l'aire sous cette courbe entre les abscisses a et x. Il s'ensuit :

$$f(x) = f(a) + \text{« trapèze curviligne » AXPB.}$$

Si l'on choisit à la place du « trapèze » curviligne AXPB le véritable rectangle AXRB, on obtient l'approximation désignée ci-dessus comme « première », au moyen de la tangente :

$$f(x) \approx f(a) + \text{rectangle AXRB} = f(a) + f'(a)\cdot(x-a).$$

On aboutit à une meilleure approximation lorsque l'on prend la tangente en B à la courbe $y = f'(x)$ et que l'on approche l'aire du trapèze curviligne par le trapèze

AXQB :

$$f(x) \approx f(a) + \text{trapèze AXQB} = f(a) + \text{rectangle AXRB} + \text{triangle BRQ}.$$

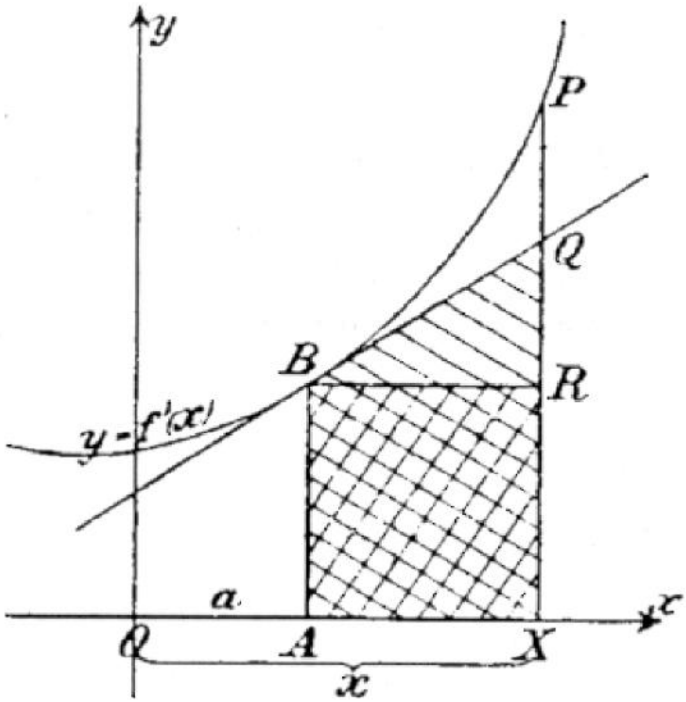

Figure 3

L'aire du triangle BRQ est exactement[7] : $\frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2$. On obtient ainsi une seconde et meilleure approximation, par une « osculation » du second ordre au moyen d'une parabole (point de vue géométrique), respectivement par un polynôme du second degré (point de vue analytique) :

$$f(x) \approx p_2(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2.$$

Cette parabole osculatrice est exactement telle que ses deux premières dérivées coïncident avec les dérivées correspondantes de f au point $x = a$. Géométriquement cette propriété signifie que p_2 « embrasse » f plus étroitement que ne le fait p_1.

Si l'on poursuit de cette manière on aboutit à la généralisation suivante : on atteindra des approximations de plus en plus précises lorsque l'on utilise des polynômes de degrés supérieurs, dont les dérivées au point $x = a$ coïncident jusqu'à l'ordre le plus élevé possible avec celles de la fonction f.

(7) Dans la situation illustrée par la figure 3, c'est-à-dire avec $f''(a)$ positive (note du traducteur).

I $\quad p_1(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a),$

II $\quad p_2(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2,$

III $\quad p_3(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)\cdot(x-a)^3$, etc.

Chaque nouvelle approximation est ainsi gagnée sur la précédente en ajoutant un nouveau terme. Nous arrivons ainsi à la série de Taylor :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(\mathrm{N})}(a)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot \mathrm{N}}\cdot(x-a)^{\mathrm{N}} + \ldots$$

ou pour $a = 0$ à la série de Mac Laurin. Le calcul du reste de la série de Taylor et l'estimation de sa valeur ne seront pas traités à l'école. Au lieu de cela, les élèves pourront dessiner la parabole osculatrice pour certaines fonctions, par exemple la fonction sinus ou la fonction exponentielle, et se convaincre expérimentalement que celles-ci se serrent toujours plus contre la courbe donnée (cf. I, II, III, … dans la figue 4). Ces deux exemples montrent clairement que les « paraboles » osculatrices de degrés successifs s'approchent de la fonction donnée sur une portion de courbe « toujours plus longue » et que l'approximation est la meilleure « au voisinage » du point a considéré.

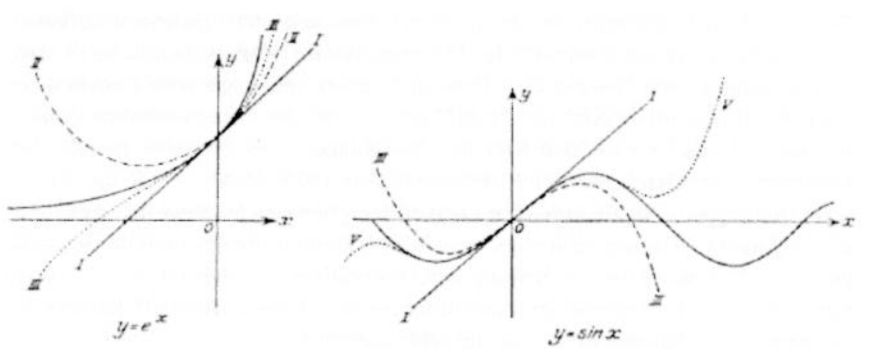

Figure 4

De tels exemples de développements en série se trouvent dans les vieux manuels scolaires d'analyse : la série exponentielle (e^x, en particulier e), la série logarithmique ($\ln(1+x)$, en particulier ln 2), les séries du sinus et du cosinus, et, en relation avec la série du binôme, le développement en série de $(1+x)^{1/2}$, $(1+x)^{-1}$, $(1+x)^{-2}$, etc.

Le théorème du binôme découle ainsi d'une application du théorème de Taylor pour une fonction particulière $y = x^m$, dans laquelle m peut prendre une valeur rationnelle, et non plus comme point de départ d'une théorie formelle des séries infinies. Le développement de la puissance m du binôme $1 + x$ en puissances de x fournit exactement la série du binôme :

$$(1+x)^m = 1 + m\cdot x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(x-a)^3 + \ldots$$

5. L’aspect cinématique tombe dans l’oubli

L’expression « *pensée fonctionnelle* » signifiait à l’origine plus que la transmission de connaissances sur certaines fonctions élémentaires et quelques techniques du calcul différentiel et intégral. Il était question d’« *éducation à l’habitude* », une habitude de pensée :

Le but pédagogique n’est pas seulement la connaissance du concept de fonction, mais bien au-delà une certaine perception et une capacité à l’analyse, y compris la considération de la variabilité, c’est-à-dire toujours et partout de relations de dépendance quantifiables, dont il faut comprendre la régularité (Mehrtens 1990, p. 359).

Dès l‘époque du plan de Meran, on pouvait pressentir que cette tentative serait vouée à l’échec. Déjà, à la fin de la première guerre mondiale, les premières incompréhensions s’installent, en ce sens que la pensée fonctionnelle est liée de plus en plus au concept de fonction. Dans l’ouvrage « standard », *Methodik des mathematischen Unterrichts*(8) de Lietzmann, plusieurs fois réédité depuis 1916, il n’est plus question d’éducation à la *pensée fonctionnelle*, mais seulement encore de concept de fonction comme « ciment » ou « liant » dans la diversité des domaines mathématiques. Et les projets de programmes prussiens, remaniés d’après le plan de Meran, les « directives de Richert » de 1925 se lisent aujourd’hui comme si le discours de la *pensée fonctionnelle* n’était qu’une mode verbale remplaçant la demande d’une introduction radicale du concept de fonction, devenue fondamentale depuis. Le « générique » « *éducation à une habitude* … », aussi habile et couronné de succès que fut son introduction, a été occulté, et bien que celle-ci ne soit nullement liée de façon automatique au concept de fonction.

Pour ce qui concerne la « culture » d’une *pensée fonctionnelle* en géométrie, des détournements de sens conduisirent également rapidement à des changements de conception dans ce domaine de l’enseignement. Dans les années trente commencèrent des discussions à côté du Förderverein pour savoir s’il fallait traiter des notions d’application et de groupe dans l’enseignement supérieur des mathématiques. Ce n’était plus « le concept de fonction pensé géométriquement » à la manière de Klein, mais le concept d’application qui devait irriguer l’enseignement des mathématiques, tel un « ferment ». Le principe de « concentration et de fusion » associé à l’*éducation à une pensée fonctionnelle* fut déformé lors de cette discussion. Il n’était plus question de la « relation interne » de l’arithmétique, de la géométrie et de la mécanique, mais de la « fusion » de l’algèbre et de la géométrie. C’est seulement à ce moment là qu’une corrélation entre les idées de Meran et le programme d’Erlangen de Klein fut affirmée.

Certes, le programme d’Erlangen de Felix Klein représente une source pour la géométrie des transformations qui s’est propagée ultérieurement dans l’enseignement secondaire, mais il faut la considérer séparément de ses activités dans le cadre de la réforme de Meran.

Si Klein s’était engagé pour la réalisation des idées de son programme d’Erlangen dans l’enseignement, il l’aurait certainement demandé dans ses écrits sur la réforme

(8) *Méthode de l’enseignement des mathématiques* (note du traducteur).

de l'enseignement des mathématiques. On ne trouve rien de tel dans ses publications. Ainsi des considérations axiomatiques et systématiques prirent progressivement le dessus sur les méthodes heuristiques et génétiques propagées par le plan de Meran. Ces considérations axiomatiques et systématiques devaient mettre en évidence des fondements communs qui donnent une vue d'ensemble, eu égard au problème éternel de la surabondance des matières. Par l'*éducation à la pensée fonctionnelle*, des démarches méthodiques communes devaient rendre visibles de façon exemplaire les relations existant entre des domaines isolés de l'enseignement.

Enfin, le concept même de fonction à la base de la *pensée fonctionnelle* s'est modifié depuis le plan de Meran. Ce n'est plus le contexte cinématique qui est significatif dans le concept général de fonction et d'application. On ne s'intéresse pas aux étapes d'un processus en mouvement continu mais aux situations de départ et d'arrivée de transformations géométriques. Et, par la définition de Dirichlet d'une fonction, l'aspect relation biunivoque (point par point) prend le pas sur les variations de son comportement local.

De sorte que le développement élargi de l'étude scolaire des fonctions et des transformations géométriques ne peut pas passer pour un préalable au sens de la réforme de Meran. Bien plus les principes d'éducation initialement dynamiques se transformèrent en portions de programmes rigides. Au XX^{e} siècle, la *pensée fonctionnelle* s'est progressivement rétrécie et fut interprétée comme introduction au concept de fonction et d'application dans le sens de Dirichlet. C'est ainsi que la composante dynamique de la *pensée fonctionnelle* tomba dans l'oubli.

6. Que signifie la pensée fonctionnelle pour l'enseignement actuel des mathématiques ?

Depuis les années quatre-vingt, on accorde à nouveau plus d'attention au thème « *pensée fonctionnelle* » dans la littérature de didactique mathématique en langue allemande. Une étape importante fut posée sans aucun doute par l'article souvent cité sous la même dénomination de Vollrath (1989). À l'exemple de Vollrath, la *pensée fonctionnelle* est le plus souvent associée étroitement au concept de fonction défini par Dirichlet. On dit :

La pensée fonctionnelle est une manière de penser représentative du traitement des fonctions.

La *pensée fonctionnelle* est ici assimilée au traitement des fonctions comme objets. Comment ces objets réagissent sur la pensée est moins pris en considération.

Auparavant la différence entre « concept de fonction » et « *pensée fonctionnelle* » a été thématisée par von Harten et d'autres. Ce travail présente aussi une déformation dans l'interprétation des idées initiales du programme de Meran, en ce que les auteurs réduisent la *pensée fonctionnelle* pour l'essentiel à « la manipulation qualitative et exploratoire de graphes ». Cette présentation est élargie à « des travaux exploratoires de modèles mathématiques de représentations » (diagrammes géométriques et formules algébriques) compris généralement dans le champ de tension entre des applications précises et les opérations algorithmiques ou formelles en mathématiques (cf. von Harten, 1986, p. 3).

Le « vieil » héritage spirituel des réformateurs de Meran est certes tombé aujourd'hui largement dans l'oubli, mais non sans avoir produit ses effets. Des rudiments de *pensée fonctionnelle* dans son sens originel survivent dans des domaines de didactique mathématique actuels fort différents – la plupart sans référence à la tradition historique –. En voici les plus exemplaires :

- Les principes opératifs.
- L'utilisation expérimentale et interactive des ordinateurs.
- Les idées fondamentales.

Dans les diverses propositions au développement du principe opératif, d'après Piaget et Aebli, il s'agit essentiellement de la formation d'une pensée en mouvement. Des approches heuristiques et expérimentales sont mises en avant comme éléments caractéristiques de la « méthode opérative » : à l'aide de la variation systématique des données introduites, on examine les dépendances fonctionnelles, les lois et les invariants depuis l'enseignement du calcul élémentaire jusqu'à l'analyse dans les classes supérieures. Un aspect important du principe opératif est la question de l'effet des opérations sur les propriétés et les rapports des objets mathématiques considérés, la question sur : « que se passe-t-il avec…, si… ? ».

Par les possibilités offertes par l'utilisation expérimentale interactive des ordinateurs, de nombreux exemples de *pensée fonctionnelle* se laissent concrétiser plus facilement et méthodiquement aujourd'hui, par exemple les métamorphoses des coniques présentées ci-dessus, et les approximations d'une fonction par son polynôme de Taylor. La dynamisation visuelle des objets mathématiques, par exemple la « mise en mouvement » de figures au moyen de logiciels de géométrie, ou la génération de familles de fonctions et de courbes au moyen de logiciels de calcul formel (animation), accentue la composante dynamique de la *pensée fonctionnelle*. Au-delà, la « fusion » de l'arithmétique et de la géométrie est secondée par la liaison interactive des graphes et des équations pour les représentations de fonctions ou de courbes. Un aspect caractéristique de *pensée fonctionnelle*, la méthode de variation systématique comme stratégie heuristique fondamentale, peut être dégagée à l'aide de l'ordinateur.

La *pensée fonctionnelle* est le prototype même de l'idée fondamentale. Aujourd'hui encore, il y a au moins **une** idée commune à tous les catalogues d'idées fondamentales de l'enseignement des mathématiques, même si elle est formulée de façon diverse : l'idée de fonction, d'application, de relation ou de dépendance fonctionnelle, ou du concept de variation fonctionnelle.

La survivance de l'héritage spirituel des réformateurs de Meran montre que la pensée fonctionnelle garde aujourd'hui encore sa signification. Dans sa compréhension originelle de pensée de la variabilité et de la dépendance fonctionnelle, la *pensée fonctionnelle* connaît aujourd'hui à nouveau un intérêt élevé en didactique des mathématiques, parce qu'elle s'adapte particulièrement bien aux objectifs pédagogiques de l'enseignement des mathématiques, tout autant qu'elle trouve son expression dans les mots d'ordre actuels d'autonomie et d'orientation active. La *pensée fonctionnelle* s'occupe moins de l'ordonnancement, de la classification ou de la systématisation d'un savoir mathématique « achevé » que du processus

d'élaboration de la connaissance dans le cadre de la formation des concepts, de l'heuristique, de la résolution de problèmes, de démonstrations et de mathématisations préformelles et intuitives.
Dans la société surinformée et médiatisée actuelle, l'individu est submergé d'informations déconnectées, principalement sous forme d'images. Eu égard aux conditions sociales fortement bouleversées des vingt dernières années et qui se débattent sous les mots d'ordre de segmentation de la vie en îlots isolés, de « digitalisation » du quotidien, et de slogans comme zapper à travers les programmes de télévision et surfer sur Internet, le besoin est grand en modes de pensée et de perspectives visant le continu et le relié. Pour cela, la *pensée cinématique et fonctionnelle* dans son sens originel dont l'étude des transformations continues est caractéristique, pourrait être appréhendée et développée de façon constructive.

Bibliographie

Behrendsen, D., Schimmack, R. : Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. In : ZMNU 39 (1908), S. 513-527.

Harten, G. von, u.a. : Funktionsbegriff und funktionales Denken. Köln : Aulis 1986.

Herbart, J. F. : Pestalozzis Idee eines ABC der Anschauung als Vorübung im Auffassen der Gestalten, 2. Auflage, 1804. Kehrbach, K. (Hrsg.). Herbarts sämtliche Werke. Langensalza 1887. Bd. 1, S. 151-274.

IMUK-Abhandlungen. Klein, F. (Hrsg.) : Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Unterrichtskommission. 5 Bände. Leipzig und Berlin : Teubner 1909-1916.

Klein, F. : Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen. Abgedruckt in : Klein, F. und Riecke, E. : Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schule. Leipzig und Berlin: Teubner 1904.

Klein, F .: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, 3. Auflage. 1. Band : Arithmetik, Algebra, Analysis 1933. Nachdruck Berlin : Springer 1968.

Krüger, K. : Erziehung zum funktionalen Denken – Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Dissertation vorgelegt am Fachbereich Mathematik der J. W. Goethe-Universität Frankfurt im Juli 1999. Erscheint in : Logos-Verlag Berlin 2000.

Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen von 1901. In : Zentralblatt für die Unterrichtsverwaltung in Preußen (1902), S. 473-544.

Lesser, O. : Die Entwicklung des Funktionsbegriffs und die Pflege des funktionalen Denkens. In : Festschrift zur 50-Jahrfeier der Klinger-Oberrealschule. Verlag der Brüder Knaur 1907.

Lietzmann, W. : Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen. IMUK-Abhandlungen Bd. I, H. 2. Leipzig und Berlin: Teubner 1910, S. 103-204.

Lietzmann, W. : Methodik des mathematischen Unterrichts. 3 Bände. Leipzig : Quelle & Meyer 1916, 1919 und 1924.

Mehrtens, H. : Moderne Sprache Mathematik. Frankfurt : Suhrkamp 1990.
Meraner Lehrplan 1905 : Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. In : Gutzmer 1908, S. 104-114.
NCTM 9th Yearbook. Russell Hamley, H. (ed.) : Relational and functional thinking in mathematics. New York City : Teachers College, Columbia University 1934.
Schubring, G. : Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart : Ernst Klett 1978.
Vollrath, H. J.: Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989), S. 3-37.
ZMNU Zeitschrift für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig und Berlin : Teubner 1870 - 1943.

Annexe

Comparaison des niveaux d’enseignement en France et en Allemagne

En France, la réforme Georges Leygues de 1902 a créé quatre filières parallèles :

A gréco-latine,
B latin - langues,
C latin – sciences,
D sciences - langues.

Selon Klein, on peut comparer deux à deux les nouvelles filières françaises avec les niveaux allemands.
Il ajoute que l’on peut comparer la filière A au Gymnasium, D à l’Oberrealschule et B et C au Real Gymnasium.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Classes de lycée en France</th><th>Correspondance en Allemagne</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Premier Cycle</td><td colspan="2">VI, division A</td><td colspan="2">VI, division B</td><td>Quinta V</td></tr>
<tr><td colspan="2">V, div.A</td><td colspan="2">V, div.B</td><td>Quarta, IV</td></tr>
<tr><td colspan="2">IV, div.A</td><td colspan="2">IV, div.B</td><td>Untertertia III_b</td></tr>
<tr><td colspan="2">III, div.A</td><td colspan="2">III, div.B</td><td>Obertertia III_a</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Second cycle</td><td>II, section A</td><td>II, section B</td><td>II, section.C</td><td>II, section.D</td><td>Untersekunda II_b</td></tr>
<tr><td>I, sect.A</td><td>I, sect.B</td><td>I, sect.C</td><td>I, sect.D</td><td>Obersekunda II_a</td></tr>
<tr><td>Classe de Philosophie, sect.A</td><td>Classe de Philosophie, sect.B</td><td>Classe de Mathématiques, sect.A</td><td>Classe de Mathématiques, Sect.B</td><td>Unterprima I_b</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Oberprima</td></tr>
</table>

Le programme de Meran

Untersekunda

- **Arithmétique**

Puissances et radicaux. Équations du second degré à une inconnue ; problèmes du second degré. Relations entre coefficients et racines. Observation des variations d'une expression quadratique dépendant d'une variable au moyen de sa représentation graphique. Résolution de problèmes du second degré à une inconnue, par intersection de droites et de paraboles. Considération de la représentation graphique comme moyen pour rendre intuitives des dépendances trouvées empiriquement.

- **Géométrie**

Étude de la similitude, par l'utilisation de situations de similitude. Proportions dans le cercle. Calculs de valeurs approchées de la circonférence et de l'aire du cercle, au moyen de polygones. Recherche des dépendances mutuelles entre rapports des côtés et mesures des angles dans le triangle, particulièrement le triangle rectangle. Élaboration et expérimentation de tables pour cette dépendance (comme préparation à la trigonométrie), en correspondance avec des exercices pratiques (réalisés sur table à dessin).

Obersekunda

- **Arithmétique**

Approfondissement de la notion de puissance, interprétation en tant que grandeur exponentielle, notion et utilisation des logarithmes. Suites arithmétiques du premier ordre et suites géométriques, application de ces dernières aux calculs d'intérêts et de rentes (prendre des exemples simples dans la vie réelle). Représentation graphique de la dépendance mutuelle des nombres et des logarithmes. Tables de valeurs numériques. Résolution des équations du second degré à deux inconnues tant par le calcul que par la représentation graphique.

- **Géométrie**

Trigonométrie en relation avec la construction de figures planes. Application à des exercices pratiques de mesures de triangles et de quadrilatères. Caractérisation de la dépendance réciproque entre variation des angles et variations des fonctions par les formules de trigonométrie. Établissement de cette relation. Application d'exercices judicieux à des cas particuliers par construction et par le calcul. Introduction au rapport harmonique et aux principes de la nouvelle géométrie comme objectif de la géométrie plane.

Unterprima

• **Arithmétique**

Étude comparée des fonctions étudiées dans les classes précédentes d'après leur croissance et décroissance (on pourra éventuellement considérer la notion de quotient différentiel et d'intégrale). Utilisation de nombreux exemples tirés de la géométrie et de la physique, notamment de la mécanique. Formules simples de combinatoire avec quelques exemples.

• **Géométrie**

Stéréométrie par considération des éléments les plus importants de la géométrie projective. Exercices de dessin de géométrie dans l'espace. Formules simples de trigonométrie sphérique ; géographie mathématique, y compris les leçons de projection de cartes.

Oberprima

1. Étude des coniques, aussi bien sous forme analytique que synthétique avec application à des éléments d'astronomie.
2. Révision de l'ensemble du domaine mathématique des classes précédentes avec des problèmes plus importants où peuvent être faits des calculs et des constructions à la main.
3. Rétrospective par la considération des points de vue historiques et philosophiques.