# Allers-retours entre la pratique de classe et la recherche sur l'enseignement des mathématiques

Catherine Sackur(*)

Ce texte est la version française d'une conférence que j'ai faite au congrès de l'Association Australienne des Professeurs de Mathématiques en janvier 2003. Elle présente certains résultats de travaux menés au sein du groupe GECO(1) associé à l'IREM de Nice.

## I. Introduction

Le but de cet article est de montrer comment ma pratique de professeur et mon activité de chercheuse interagissent. Le thème du congrès dans lequel il a été présenté la première fois était « Quand les mathématiques font des vagues ».
J'enseigne les mathématiques depuis presque 37 ans, actuellement à tous les niveaux du lycée, après avoir enseigné en collège. Il y a 20 ans, j'ai commencé des recherches en didactique des mathématiques principalement pour trouver des réponses aux questions auxquelles j'étais confrontée dans mon enseignement. Mes sujets de recherche ont tous leur origine dans la classe et j'ai essayé, autant que faire se peut, de ramener en classe les résultats de mes recherches. Mes élèves ont été utilisés comme cobayes pour de nombreuses expériences, sans jamais se plaindre et je souhaite les remercier pour leur bonne volonté. Mon travail est comme le ressac qui va et vient entre la classe et la recherche. Dans ces allers-retours, il est arrivé souvent qu'une vague plus forte que les autres balaye mes croyances sur les élèves, sur l'enseignement ou sur les mathématiques. C'est de ces vagues-là que je souhaite parler.
Quelque chose m'a frappé pendant toutes ces années d'enseignement : *si on écoute très soigneusement ce que disent les élèves*, on s'aperçoit qu'ils ont de bonnes raisons pour produire les mathématiques qu'ils produisent même si celles-ci sont fausses aux yeux des professeurs. *Chaque élève a son propre savoir mathématique*. D'autre part, tous les mathématiciens savent que les mathématiques sont construites socialement, qu'il y a accord sur ce qui est juste et ce qui est faux en mathématiques. En tant que professeurs, nous sommes donc confrontés à un paradoxe : comment pouvons-nous agir en classe pour que les connaissances personnelles de 30 (ou 35) élèves différents se rejoignent pour constituer *le savoir mathématique, partagé, permanent et universel* ?
Je tenterai de venir à bout de ce paradoxe en traitant trois points :

---

(*) GECO-IREM de NICE.
(1) GECO est l'abréviation de « Association pour le Développement du Génie Cognitif ». Certains de ces travaux ont fait l'objet d'ateliers aux journées APMEP d'Albi, de Rouen, de Marseille et de Nice.

Tout d'abord, nous nous pencherons sur le travail des élèves et sur cette idée très largement répandue chez les professeurs, que « les élèves ne sont pas cohérents, que très souvent leur travail n'a aucun sens ». La théorie nous aidera à observer et à comprendre comment sont structurées leurs connaissances, principalement en algèbre. La notion de connaissance locale nous permettra d'interpréter le travail de Leslie, une élève de seconde.
Puis nous nous tournerons vers les mathématiques et nous essayerons de comprendre d'où vient leur cohérence, en quoi et comment elles sont universelles. Si nous écoutons des élèves, au sortir d'un devoir par exemple, nous constatons que très souvent ils ne savent pas si ce qu'ils ont écrit est exact ou non. La justesse de leur travail semble dépendre du hasard ou de la bonne volonté de leur professeur. Les élèves eux-mêmes n'ont rien à voir avec. Bien sûr ce n'est pas le cas de tous, mais c'est un phénomène fréquent. Est-il possible de leur donner les moyens de contrôler leur travail ?
Je mettrai en évidence certaines caractéristiques des mathématiques, bien connues des mathématiciens et qui les aident à contrôler leur travail. Nous pourrons nous rendre compte que les élèves ne savent en général rien de la structure des mathématiques, qui leur apparaissent bien souvent comme un catalogue de règles sans lien les unes avec les autres. Je décrirai des expériences faites en classe par mes collègues et moi-même, et nous verrons qu'il est possible d'enseigner de façon que les élèves prennent en charge la justesse de leur travail. Nous verrons alors quelles en sont les conséquences sur le rôle du professeur.
Dans la dernière partie, qui sera la conclusion, nous verrons que si on peut faire aux élèves la dévolution du vrai et du faux en mathématiques, celles-ci cessent d'être arbitraires. L'autorité n'est plus dans les mains du professeur et la classe de mathématiques est un espace de liberté.

## II. La cohérence interne des élèves

### II. 1. Quelques exemples

En tant que professeurs, nous avons souvent l'impression que nos élèves sont incohérents. Les exemples sont nombreux ; ils écrivent :
« $x + 2 = 3$ a pour solution $x = 3 - 2$ », mais ils écrivent aussi :
« $2x = 3$ a pour solution $x = 3/(-2)$ ».
On pense alors que les calculs sont faits plus ou moins au hasard.
Par contre, quand on les écoute parler, on est surpris de constater que leurs connaissances sont structurées. Ainsi écoutons Leslie (16 ans) :
« Un carré est toujours positif. Un nombre positif est précédé d'un signe +. Dans l'expression $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on voit que $b^2$ est précédé d'un signe plus et ainsi il est positif comme c'est normal pour un carré. »
Nous verrons au paragraphe suivant quel est le dispositif qui nous permet de recueillir ce type d'information auprès des élèves[2].

(2) Pour plus de détails, voir GECO (1997).

### II. 2. La théorie

Pour rendre compte des erreurs que font les élèves en algèbre nous avons développé la notion de « connaissances locales »(3). Pour les élèves, l'algèbre est souvent vue comme un ensemble de règles sans lien, sans nécessité, qui pourraient être modifiées si on le décidait. De même, on entend souvent les professeurs dire qu'il n'y a rien à comprendre en algèbre, qu'il suffit de connaître les règles et de les appliquer. Cependant on peut comprendre qu'il soit impossible à des élèves de les mémoriser, il y en a trop. Il ne faut pas s'étonner alors que leurs connaissances apparaissent comme incohérentes. De notre point de vue, la question n'est pas tant d'une absence de cohérence, que d'une cohérence différente, chaque élève ayant sa propre cohérence.
Attardons-nous un moment sur les connaissances locales.

#### *II. 2. 1. Les connaissances locales*

- Dans une de nos recherches(4), nous avons mis en évidence deux règles utilisées par les élèves pour comparer les nombres décimaux :

R1 : 12,18 > 12,6 parce que 18 > 6.
R2 : 8,898 < 8,78 parce qu'il y a plus de chiffres après la virgule.
Plusieurs choses sont intéressantes dans ces règles : elles donnent souvent le résultat exact. En ce qui concerne R1, c'est le cas si les parties décimales ont la même longueur. Quand elles donnent des résultats contradictoires, l'une des deux donne le résultat exact et on peut en faire une démonstration mathématique. Un autre aspect intéressant est la comparaison des fréquences d'apparition de ces règles en France et aux USA. En France, pendant longtemps les décimaux ont été introduits à l'aide des unités et sous-unités (mètres, décimètres, centimètres) et les problèmes portaient sur des décimaux ayant une partie décimale de même longueur. Le nombre décimal peut être perçu comme un couple d'entiers auxquels les élèves appliquent les connaissances sur les entiers. À l'époque de notre étude, la règle R1 était nettement prépondérante. Aux USA, les décimaux sont introduits après les fractions et la règle R2 est beaucoup plus fréquente. Pour des fractions, plus le dénominateur est long, plus la fraction est petite (8/898 < 8/87). Si on fait jouer à la virgule des décimaux le rôle de la barre de fraction, on obtient la règle R2.
L'algèbre est une mine inépuisable de connaissances locales et nous verrons plus loin qu'il est facile de comprendre pourquoi. Voyons quelques exemples :

- Si $a < b$ alors $ax < bx$,
- $x^2 > x$,

ces deux règles étant exactes si $x$ est un entier positif.

#### *II. 2. 2. Trois caractéristiques des connaissances locales*

Les connaissances locales ont trois caractéristiques qui justifient le nom que nous leur avons donné. Il existe un « domaine » des mathématiques dans lequel elles sont vraies : ceci veut dire que, à l'intérieur de ce domaine, elles sont valides du point de

(3) Léonard & Sackur (1991).
(4) Léonard & Sackur-Grisvard (1991).

vue mathématique, elles sont efficaces au sens qu'elles donnent une réponse exacte, elles sont cohérentes pour le sujet. Si on les utilise hors de ce domaine, elles ne sont plus mathématiquement valides ni efficaces. C'est pour cette raison que nous parlons de « connaissances » et que nous les qualifions de « locales ». Bien sûr le sujet ignore les limites de ce domaine et les utilise de façon impropre.

D'où viennent ces connaissances locales ? Quand un élève apprend quelque chose de nouveau, il l'apprend avec les connaissances qu'il possède déjà, qui sont stables. Bien souvent, il utilise la nouvelle connaissance comme il le faisait avec l'ancienne, sans toujours voir ce en quoi elles diffèrent. La connaissance $x^2 > x$ est exacte pour les entiers positifs et nous savons par expérience, mais aussi par des études plus rigoureuses, que les élèves ont de grandes difficultés à travailler avec d'autres nombres que les entiers. Pour eux les seuls nombres qui existent vraiment sont les entiers et, en tant que professeurs, nous prenons souvent nos exemples dans les entiers. Dans l'ensemble des entiers positifs, la connaissance locale est cohérente pour les élèves.

### II. 3. Le dispositif pour faire travailler sur les connaissances locales

Mon propos ici est de montrer qu'il est possible de faire travailler les élèves, en utilisant leur cohérence interne de façon que, d'une part, ils modifient leurs connaissances locales et que, d'autre part, ils aient en charge la responsabilité de décider du vrai et du faux en mathématiques(5).

En nous inspirant de certains travaux de Watzlawick(6), nous avons mené des entretiens en commençant par une injonction paradoxale, les entretiens Faire-Faux. Qu'est-ce qu'une injonction paradoxale en mathématiques ? Nous sommes face à des élèves qui ont des difficultés en mathématiques, qui se plaignent de faire des fautes. Généralement le professeur donne des conseils : « réfléchis avant d'écrire, souviens-toi des règles ». Nous, nous leur proposons une expression et leur demandons d'écrire quelque chose de faux, quelque chose qui est toujours faux. Leur première réaction est de penser que cela va leur être facile, mais ce n'est évidemment pas le cas. Certes, il font des erreurs mais toujours en pensant faire juste. Ils n'ont à leur disposition aucune connaissance qui leur permette d'écrire quelque chose de faux, en tout cas aucune règle toute faite. Ils vont devoir alors utiliser toutes les mathématiques qu'ils connaissent, toutes leurs connaissances locales, pour d'abord produire quelque chose de faux, ensuite expliquer pourquoi c'est faux et pour décider si c'est toujours faux. Ceci nous permet alors de savoir comment sont structurées leurs connaissances mathématiques et de travailler dessus.

Voici le début d'un entretien Faire-Faux. Leslie a 16 ans, nous sommes à la fin de l'année de seconde et ses résultats en mathématiques ont toujours été moyens.

**Professeur : j'écris « $7x/(7 + x) = \ldots$ » et vous écrivez quelque chose pour que ce soit faux.**
**Leslie** : $7x/(7 + x) = 7x/7x$, et ça c'est faux.
**Professeur : comment savez-vous que c'est faux ?**

(5) Pour un exposé complet, voir GECO (1997).
(6) Watzlawick & al (1967, 1972).

**Leslie** :parce que j'ai changé un signe + en signe × et je sais qu'une addition et une multiplication c'est différent ; d'autre part si j'essaye avec $x = 1$, ça fait 7/8 et ça ce n'est pas égal à 1.
**Professeur : est-ce que c'est toujours faux?**
**Leslie** : Il faudrait avoir $7x = 7 + x$ et on sait que c'est faux… Logiquement, si on continue, on devrait pouvoir trouver $x$.

Comme on peut le constater, Leslie a choisi (inconsciemment) le terrain sur lequel elle souhaite travailler : la différence entre addition et multiplication, et les équations (comme le laisse entendre le membre de phrase « logiquement… »). Elle se trouve alors dans une situation contradictoire. Il y a un conflit entre deux connaissances locales :
KL1 : si on change un signe dans une expression algébrique, l'expression change, ce qui signifie que les valeurs qu'elle prend pour différentes valeurs de $x$ changent,
KL2 : s'il y a un signe « = » entre deux expressions algébriques, c'est une équation et des calculs doivent conduire à trouver une valeur pour $x$.
En réponse à l'injonction paradoxale Faire-Faux et ne connaissant aucune règle pour produire quelque chose de faux, l'élève utilise ses connaissances locales et le changement est purement formel.
Ensuite Leslie se met à travailler pour sortir de la contradiction dans laquelle elle s'est elle-même placée. Le problème qu'elle cherche à résoudre n'est pas posé sous une forme qui lui est familière « résoudre l'équation… », ce qu'elle saurait faire très facilement, mais c'est son problème et elle est intéressée à le résoudre.
Tout au long de ce premier entretien, Leslie parle d'équations et de trouver $x$. Il est intéressant de constater qu'elle est incapable de résoudre une équation aussi simple que $7x = 7 + x$, que les connaissances nécessaires ne sont plus disponibles. Elle fait quelques calculs, sans succès, et répète que $7x$ est différent de $7 + x$.
Regardons de façon précise ce qui se passe pendant ce premier entretien. En essayant de répondre à l'injonction paradoxale, l'élève nous conduit directement à un sujet qui est problématique pour elle : une équation qu'elle ne peut résoudre que si elle lui est posée sous la forme qui lui est familière. Elle nous montre que ce qui compte est l'aspect formel de l'expression. Elle ne semble pas savoir que les expressions algébriques représentent des nombres et qu'un même nombre peut être écrit de différentes façons. Elle ne semble pas savoir non plus que deux expressions algébriques peuvent être égales ou différentes selon les valeurs de $x$. Ces connaissances sont essentielles pour faire de l'algèbre, et beaucoup d'élèves ne les ont pas. Nous y reviendrons dans la partie III de cet exposé. Il y a un autre point important à relever à propos de cet entretien. Leslie se bat avec des mathématiques qui ont un sens pour elle. Elle a envie de savoir si ces deux expressions peuvent ou non être égales et si elle va pouvoir trouver cet $x$ et elle ne compte pas du tout sur le professeur pour lui donner la réponse. Nous allons voir dans le deuxième entretien qu'elle sait parfaitement ce qu'elle est en train de faire.
Le deuxième entretien a lieu douze jours plus tard et Leslie reformule le problème :

Leslie : il fallait savoir si $7x/(7 + x)$ pouvait vraiment être égal à 1.

Elle commence à travailler sur le problème des additions et multiplications, se demandant s'il est possible qu'une addition et une multiplication donnent le même résultat, comme c'est le cas par exemple pour $3 + x$ et $4x$. Puis elle exprime une nouvelle connaissance relative aux équations :

Leslie : eh bien, on nous donne une égalité, et on ne sait pas si elle est juste ou fausse … et nous avons à trouver le $x$ dans $(3 + x)/4x$, qui, si on le place dans $3x/4x$, nous permet de voir si c'est égal ou pas.

Cette connaissance locale est très différente de la connaissance locale KL2 que nous avons eu au début du travail : « une équation est constituée de deux expressions algébriques liées par un signe = ».
Leslie résout $(3 + x)/4x = 3x/4x$ pas très vite, mais elle réussit et ensuite avec $7x/(7 + x) = 1$ il n'y a plus de problème.
Il a donc été possible de la faire travailler sur ses propres connaissances : elle a construit une connaissance personnelle sur les équations. Elle s'est trouvée confrontée à la réalité qu'une multiplication et une addition peuvent donner le même résultat, chose qui lui paraissait impossible de prime abord et elle a modifié ses connaissances pour y intégrer cette nouvelle connaissance. Ses raisonnements étaient parfaitement cohérents. Nous avons pu voir ce qui la mettait en difficulté. Ce qui nous paraît le plus important est qu'elle n'a pas eu besoin que le professeur lui dise ce qui était juste et ce qui ne l'était pas, elle avait la possibilité d'en décider elle même. Le professeur s'est contenté de la diriger dans son travail.

## III. Quelles sont les connaissances nécessaires pour faire des mathématiques ?

### III. 1. Un pot-pourri d'opinions personnelles

Les mathématiques sont construites socialement, et pourtant chaque personne doit se construire ses propres mathématiques. La vérité en mathématiques est la même pour tout le monde, et il sera toujours ainsi(7). Nous avons vu que la cohérence interne des élèves peut conduire à des connaissances locales très variées. Comment faire pour que les élèves se mettent d'accord sur le même savoir ?
*Nous retrouvons notre paradoxe : sachant que leur savoir est constitué de connaissances locales, nous voulons donner à chacun de nos élèves la possibilité de décider par lui-même de ce qui est juste et ce qui est faux en mathématiques. Parallèlement, en tant que professeur, nous devons leur faire construire un savoir partagé non seulement par les élèves mais par tous les mathématiciens.*
Comment passer d'une collection d'opinions personnelles à une vérité acceptée par tous ? Il nous est arrivé de voir des groupes d'élèves se mettre d'accord sur des résultats faux. La solution la plus simple ne serait-elle pas que le professeur se charge de dire ce qui est juste et ce qui ne l'est pas ?

(7) Nous ne posons pas ici le problème des fondements qui n'est pas pertinent au niveau d'enseignement qui nous intéresse.

**III. 2. La réalité mathématique**

On voit souvent les mathématiques comme un dogme et le mathématicien ou le professeur dans le rôle du gardien. Beaucoup de choses sont interdites en mathématiques : « il est interdit de diviser par zéro ! » ou au contraire obligatoires, par exemple la règle des signes de la multiplication. Le problème n'est pas tant un problème d'interdiction, qu'un problème de cohérence. Ainsi la question principale est : « quand j'écris $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ est-ce-que je me plie au caprice de mon professeur, ou bien y a-t-il une autre raison pour le faire ? ». Les mathématiques résistent exactement de la même façon que la réalité physique résiste. On ne peut pas passer à travers un mur sans le casser et personne ne tente de le faire. Nous disons que les mathématiques résistent de la même façon.
Un résultat mathématique, à l'intérieur d'une théorie, ne peut être modifié : il ne peut être que ce qu'il est. Dans le corps des réels, bien que cela puisse faciliter la vie de beaucoup d'élèves, on ne peut pas décider que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Si on le faisait, toutes les mathématiques deviendraient contradictoires et on pourrait facilement prouver que $1 = 2$ et que tous les nombres sont égaux. Ainsi il y a quelque chose de nécessaire dans le savoir mathématique, quelque chose qui ne peut être modifié. C'est à ceci que nous faisons référence quand nous parlons de la réalité mathématique : les résultats mathématiques sont nécessaires. Beaucoup d'élèves n'en savent rien et ne sont pas du tout surpris si deux personnes différentes trouvent des résultats différents dans la résolution de la même équation : « bien sûr vous trouvez $x = -1$ et je trouve $x = 2$, mais nous n'avons pas utilisé les mêmes règles » !
Qu'est ce qui fait que les mathématiques résistent ? La façon dont elles sont structurées par les règles du jeu mathématique. Ces règles sont nombreuses, beaucoup sont des conséquences de règles de logique, mais il y a aussi les règles concernant la sémiosis, la façon dont les mathématiques sont écrites. Essayons de décrire quelques-unes de ces règles.
Une des plus faciles à énoncer est le principe de non-contradiction : un énoncé et son contraire ne peuvent être vrais en même temps. D'autres concernent ce que, à la suite de Frege, nous appelons la dénotation ; nous en avons rencontré quelques-unes en analysant le travail de Leslie. Elle savait que, dans une expression algébrique, une même lettre a toujours la même valeur. Ce n'est pas le cas de tous les élèves. Certains pensent qu'on peut avoir $x = 1$ à gauche et $x = 2$ à droite dans l'égalité $2x + 7 = 3x + 3$. Mais, ainsi que nous l'avons vu, il y a d'autres aspects de la dénotation que Leslie ne connaissait pas. Ainsi, elle semblait ignorer qu'un nombre peut être écrit de plusieurs façons et qu'une égalité peut être vraie ou fausse selon les valeurs que l'on donne à $x$. Ce sont quelques exemples des connaissances qui sont nécessaires pour faire de l'algèbre et qu'on ne trouve pas en général écrites dans les livres, ni clairement mises en évidence par les professeurs.
Il nous faut maintenant distinguer entre les règles de calcul de l'algèbre et ces autres connaissances nécessaires à l'activité mathématique. Apprendre des mathématiques ne consiste pas seulement à apprendre des règles de calcul ou des théorèmes et définitions. On doit aussi apprendre comment faire des mathématiques, comment démontrer, comment jouer le jeu mathématique, qui est un jeu socialement défini avec des règles acceptées par tous les mathématiciens.

Nous devons nous poser la question de savoir si on peut enseigner de façon que les élèves apprennent à jouer le jeu mathématique en classe. Pour des questions de clarté nous distinguerons entre les règles du jeu mathématique, que nous proposons d'appeler « connaissances d'ordre II », et les résultats mathématiques proprement dits, constituant l'ordre I. Je me propose de décrire deux types d'activités que nous utilisons dans les classes dans le but de faire apprendre aux élèves des connaissances d'ordre II. Nous les utilisons comme séquences d'enseignement.

### III. 3. Deux exemples

#### *III. 3 . 1. Les diagonales du cube*

Cette leçon a été expérimentée par plusieurs collègues et moi-même dans des classes de troisième et de seconde[(8)]. Il s'agit d'un débat scientifique tel que les propose Marc Legrand[(9)], dont le but est de faire fonctionner le groupe d'élèves à la manière d'un groupe de chercheurs. Dans cette situation, le rôle du professeur est de diriger et d'organiser le débat, sans donner ni indice, ni solution pour le problème posé.
Le travail portait sur les diagonales des cubes.
Le professeur commence, après avoir indiqué les règles du débat, en écrivant une conjecture au tableau, sans faire de dessin : *les diagonales d'un cube sont perpendiculaires*. Une dizaine de minutes sont alors consacrées à un travail individuel qui doit permettre aux élèves de se faire une opinion personnelle sur cette conjecture par les moyens de leur choix. On procède ensuite à un vote qui a trois issues : *vrai*, *faux*, *je ne sais pas*. Le professeur interroge ensuite un élève qui a répondu *je ne sais pas* et lui demande ce qui lui a manqué pour se forger une opinion personnelle. Les autres élèves sont invités à lui faire part de leur réflexion et le débat s'engage. Les élèves, ayant eu le temps de se faire une idée par eux-mêmes, n'ont en général guère de réticence à s'exprimer, surtout si cette pratique est habituelle dans la classe. Le professeur reste en retrait. De temps à autre il fait le point sur ce qui a été dit, il garde trace au tableau des arguments développés de façon que rien d'important ne soit oublié. Cela se fait sous une forme neutre : « X. pensait qu'il fallait… Nous pourrions prendre le temps de le faire… ».
En rendant compte de ce débat, je ne mentionnerai que les points relatifs aux connaissances d'ordre II qui sont celles qui nous intéressent ici :

- Plusieurs élèves, dans toutes les classes observées, ignoraient ce qu'étaient les diagonales d'un cube, confondant avec les diagonales des faces. Les élèves durent se mettre d'accord sur une définition et sur le sens exact de la conjecture, compte tenu du fait qu'il y a quatre diagonales pour un cube.
- Ce faisant ils se rendirent compte qu'un dessin pouvait être utile. Nommer les points fut aussi nécessaire.
- Un élève était certain que les diagonales étaient perpendiculaires car c'est ainsi qu'il les voyait s'il regardait le cube du dessus.

(8) La genèse et la conduite de ces débats ont été décrites dans une brochure publiée par l'IREM de Nice (2000).
(9) Legrand (1993).

- Certains pensaient que la propriété pouvait dépendre de la « forme » du cube ou de sa taille. Un élève expliqua alors qu'on travaillait sur un cube « mathématique » qui était un cube abstrait et que ceux qui étaient dessinés par les uns ou les autres pouvaient ne pas avoir la propriété exacte car ils n'étaient que des représentations imparfaites de l'objet « idéal ».
- Une élève fabriqua un cube en papier et utilisa des tiges de métal pour figurer les diagonales. Son cube circula dans la classe, pour être observé par tout le monde, mais elle était tellement sûre que la conjecture était exacte qu'elle voyait les diagonales perpendiculaires.
- Les élèves finirent par se convaincre que la conjecture était fausse et réclamèrent une démonstration à ceux qui étaient les plus hardis défenseurs de cette propriété, ce qui fut fait.

À la fin de la leçon, le professeur revient au premier plan pour faire la synthèse des résultats trouvés et de ce qui doit être mémorisé :

- Le résultat mathématique, bien sûr, et les propriétés nécessaires à sa démonstration,
- Des définitions précises sont indispensables pour faire des mathématiques,
- Les mathématiques traitent d'objets abstraits qui sont des représentations d'objets physiques,
- L'observation ne peut suffire et risque de conduire à des erreurs,
- Pour convaincre les autres et pour être sûr d'un résultat, une démonstration est nécessaire.

### *III. 3 . 2. Inéquations*

Le travail que je vais décrire maintenant a été conduit en classe de seconde(10). Son but était double, d'une part faire travailler aux élèves une connaissance locale bien connue

$$\text{si } a < b \text{ alors } ax < bx$$

et d'autre part leur permettre de comprendre l'aspect nécessaire des théorèmes.
Dans ce travail, il n'y a pas de connaissance nouvelle à apprendre. En principe les élèves savent tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour résoudre le problème. Le but est de corriger une erreur tenace et fréquente.
Avant de commencer la description du dispositif, j'aimerais insister sur le fait que ce travail n'est pas le seul de ce type effectué pendant l'année. Les élèves ont une certaine habitude des débats scientifiques et de travaux analogues.
Le problème était le suivant :

> *Résoudre l'inéquation :*
> $3/x > x + 2$
> *Toutes les méthodes sont valables.*
> *Décrivez les étapes successives de votre travail.*
> *Vous devez être aussi sûr que possible de votre résultat.*
> *Pensez à un moyen de convaincre les autres que votre résultat est exact.*

(10) Une description complète peut être trouvée dans Maurel & Sackur (2000).

On peut imaginer une procédure assez simple : cette erreur conduit les élèves à un conflit qu'ils résolvent et ils sont alors en mesure de mémoriser le résultat correct. L'idée de créer un conflit entre élèves n'est pas nouvelle. En général les élèves réussissent à se mettre d'accord sur un résultat, qui peut être exact, mais aussi ne pas l'être. Le professeur valide alors la réponse correcte et les élèves apprennent. Nous avons tous essayé ce type de travail et nous savons que cela ne fonctionne pas très bien.

Ce que nous proposons ici n'est pas très différent, à première vue, mais les lignes directrices de notre travail font que les conséquences pour les élèves sont tout autres. Nous gardons en tête nos trois idées directrices :

- Les élèves ont une cohérence interne,
- Il est possible de leur faire la dévolution du vrai et du faux et ceci les conduit à rencontrer la réalité mathématique,
- Apprendre des mathématiques c'est apprendre, simultanément, des connaissances d'ordre I (les énoncés) et des connaissances d'ordre II (les règles du jeu).

Le travail a été organisé de la façon suivante :

*Séances 1 et 2* : 1h 30 chacune en demi-classe. 10 minutes de travail personnel (phase A) et 1 heure de travail en petits groupes de trois ou quatre élèves (phase B).

*Séance 3* : 1h 30 en classe entière pour la synthèse(11).

*Phase A* : le travail en petits groupes est préparé par un moment de travail personnel. Ce temps joue un rôle important dans le dispositif. Pendant qu'ils travaillent seuls, les élèves ont la possibilité d'utiliser leur connaissance locale pour produire l'erreur attendue. Nous nous attendions à ce que certains utilisent une résolution graphique, soit à l'aide de la calculatrice, soit à la main, et trouvent le résultat exact, à condition qu'ils sachent lire correctement sur la courbe. Les possibilités de faire des erreurs étaient assez nombreuses. Il y eut beaucoup de résultats faux, mais les élèves les avaient produits avec des connaissances en lesquelles ils avaient une certaine confiance et avaient préparé une argumentation pour les défendre. Pendant ce temps, le professeur prend connaissance du travail des élèves pour organiser les petits groupes de façon à créer des confrontations.

P*hase B* : quand les petits groupes se mettent en place, les élèves comparent leurs résultats, défendent leur opinion et tentent de convaincre les autres. Ils doivent alors :

- Déterminer quelle est la solution exacte,
- Trouver l'origine des erreurs,
- Se convaincre que le théorème mathématique exact ne peut être modifié (rencontrer la réalité mathématique),
- Se mettre d'accord sur un savoir mathématique partagé. Chacun d'eux peut être appelé par le professeur pour défendre le résultat du groupe devant la classe au moment de la synthèse.

Ce dernier point signifie que chaque élève doit abandonner son opinion personnelle pour permettre au groupe d'avoir un discours mathématique correct. La situation et le contrat au sein de la classe les obligent à décider entre deux résultats contradictoires. Ils ne peuvent plus dire : « tu trouves ça et moi je trouve autre chose,

(11) Le même dispositif a été utilisé en DEUG Première année. Voir Maurel (2002).

mais cela ne fait rien car nous n'avons pas utilisé le même mode de résolution ». Ils doivent prendre une décision, la rendre publique et ils sont donc contraints de produire quelque chose de juste et d'abandonner ce qui ne l'est pas.

*Phase C* : quand la classe se retrouve au complet, les élèves viennent au tableau expliquer leur solution, les erreurs faites, comment ils les ont corrigées et ce qu'ils ont appris. Ils répondent aux questions des autres élèves. Puis le professeur résume les résultats mathématiques auxquels la classe est arrivée et les connaissances d'ordre II qui ont été utilisées pour mener à bien ce travail :

- Pour résoudre une inéquation, on peut raisonner algébriquement ou graphiquement, mais le résultat doit être le même.
- Pour déterminer si une solution est exacte, on peut utiliser des valeurs particulières de $x$, mais cela ne peut servir à démonter (rôle du contre-exemple).
- Le théorème

$$\text{Si } x > 0, \text{ si } a < b \text{ alors } ax < bx.$$
$$\text{Si } x < 0, \text{ si } a < b \text{ alors } ax > bx.$$

est nécessaire. Il ne peut être modifié.

### III. 4. Le rôle du maître

Je me propose maintenant d'examiner le rôle de l'enseignant dans les différentes activités que j'ai décrites. Il y a de nombreuses similitudes entre ces situations, même si l'une se déroule en entretien entre l'enseignant et l'élève et les autres dans le contexte d'une classe ordinaire[12].

Tant que les élèves sont en train de travailler, le professeur ne donne pas son opinion. Tant dans les entretiens que dans le travail en classe, le professeur se tient en retrait, en tant qu'enseignant et en tant que mathématicien, car il joue, au contraire, un rôle important dans l'accompagnement du débat.

En entrant un peu dans le détail de l'analyse, on peut distinguer trois périodes dans ce type d'enseignement :

Avant l'enseignement, le professeur doit décider du travail qu'il va demander aux élèves d'accomplir. Nous savons que tous les sujets ne se prêtent pas de la même façon à un travail spécifique. Nous devons les choisir sur le plan mathématique et sur le plan pédagogique. Dans le cas d'une séquence telle que celles que j'ai décrites, ce choix est fondamental. Il va falloir trouver un exercice qui peut être résolu par une connaissance locale très stable et adaptée. Les élèves doivent être sûrs de ce qu'ils « savent ». Ils pourront ainsi être forts dans leurs essais de convaincre les autres. La confrontation avec d'autres est essentielle pour que les élèves rencontrent la réalité mathématique, à condition qu'ils aient eu le temps de se forger une opinion personnelle. Dans le cas d'un entretien, il n'y a pas de confrontation avec d'autres, mais l'élève se met lui-même en situation de conflit.

Pendant l'enseignement, le professeur apparaît comme moins actif sur le plan mathématique : son travail est alors d'organiser le débat (ou de permettre à l'élève d'expérimenter dans ses propres mathématiques). Ceci signifie que le professeur est amené à prendre très rapidement des décisions sur les pistes qui doivent être

(12) Les entretiens Faire-Faux peuvent être conduits dans certains petits groupes, par exemple en aide individualisée.

poursuivies, ce qu'on doit explorer davantage ou ce qu'on peut laisser de côté. Le professeur n'est pas conduit à dire : « ceci est juste, ceci est une bonne idée, ceci ne vaut pas la peine qu'on regarde ». Mais en résumant au tableau certains points importants, en rappelant des pistes abandonnées de façon prématurée, il oriente le débat. Si on imagine la discussion comme un arbre avec des branches susceptibles de partir dans toutes les directions, on voit le professeur qui coupe certaines branches pour permettre à d'autres de se développer.
À la fin, quand la discussion est terminée, le professeur redevient un professeur et un mathématicien. En institutionnalisant les connaissances, le professeur parle au nom de tous les mathématiciens, d'hier, d'aujourd'hui et de demain. Il dit que la solution trouvée est la bonne. L'accord n'est pas seulement un accord au sein de ce groupe, mais ce serait un accord au sein de tous les groupes de mathématiciens car la solution a été trouvée en respectant les règles du jeu mathématiques. Ainsi les élèves ont fait des mathématiques.

## IV. Conclusion : En route pour la liberté

Il est maintenant temps de se poser la question : « pourquoi des scénarios » aussi compliqués si, à la fin, le professeur indique quelle est la bonne réponse ? Pourquoi ne pas le laisser dès le début indiquer le chemin à suivre ?
Le but de ce type de travail est de donner aux élèves les outils qui leur permettent de décider par eux-mêmes de ce qui est juste et de ce qui est faux en mathématiques. Ces outils, ce sont les connaissances d'ordre II. Nous en avons vu quelques-unes et nous pouvons à leur sujet énoncer quelques réflexions théoriques.
Nous avons vu que ces connaissances sont indispensables pour que les élèves développent une véritable activité mathématique. Cependant ces connaissances ne peuvent être enseignées de la même façon qu'on enseigne les théorèmes. On imagine mal des exercices sur le caractère nécessaire d'un énoncé. Tout professeur sait comme il difficile d'enseigner ce qu'est une équation ; on sait enseigner à les résoudre. Les difficultés des élèves sur les équations dont l'ensemble des solutions est l'ensemble vide ou l'ensemble des réels tout entier montrent bien que la notion d'équation n'est pas acquise.
Nous disons que les élèves peuvent apprendre les connaissances d'ordre II en en faisant l'expérience à travers des dispositifs d'enseignements particuliers. Les élèves rencontrent alors la réalité mathématique et leurs opinions personnelles diverses sont transformées en un discours scientifique commun.
La justesse d'une solution ne dépend plus alors du professeur. Connaître les règles du jeu donne aux élèves le pouvoir de décider par eux-mêmes de ce qui est juste et de ce qui est faux. L'autorité n'est plus dans les mains du professeur, elle est dans les mathématiques. Les choses ne sont plus arbitraires. Les étudiants sont libres.
La très forte structure des mathématiques est une garantie de liberté pour les élèves, pour tous.
Je laisserai la conclusion à Hegel :

**Être libre, c'est comprendre la nécessité.**

## Bibliographie

Brochure : *L'Élève en Position de Chercheur*, IREM de NICE (1999-2000).

DROUHARD J.-P. (1992), *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire*, Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

GECO (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*. **28**, p. 37-68.

LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-IREM*. **10**, p. 123-158.

LÉONARD F. & SACKUR-GRISVARD C. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'APMEP* **327**, p. 47-60.

LÉONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10** (2/3), p. 205-240.

MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* **42**, p. 83-114

SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x* **53**, p. 5-26.

SACKUR C. & DROUHARD J.-P. (2001), La Triple Approche : un modèle de l'activité mathématique des élèves, *Bulletin de l'APMEP* **433**, p. 159-168.

WATZLAWICK P., HELMICK BEAVIN J. & JACKSON, DON D. (1967, 1972), *Une Logique de la Communication*, Paris, Seuil.