Raisonnement et nombres entiers

Comportements d'élèves de terminale S spécialité mathématique en arithmétique

Laetitia Ravel(*)

L'introduction du programme 2002 de spécialité mathématique de terminale S précise que l'arithmétique a été choisie comme contenu d'enseignement pour « sa richesse mathématique ». Il est également souligné que « c'est un domaine au matériau élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs », tout en étant « un lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement ». Ainsi, l'arithmétique semble être un domaine idéal pour redonner une place de choix au raisonnement dans l'enseignement secondaire, place régulièrement mise à mal ces derniers temps(1). Il est vrai que l'arithmétique peut permettre de travailler le raisonnement avec les élèves. En effet, l'arithmétique possède cette spécificité qui est d'aboutir à des raisonnements très élaborés à partir de notions relativement simples (il s'agit des propriétés des nombres entiers) et de très peu de théorèmes de base. Cependant, malgré la richesse offerte par l'arithmétique pour explorer différents types de raisonnements – que ce soit le raisonnement par l'absurde, par récurrence, par disjonction de cas, par condition nécessaire et suffisante, etc. –, on constate que les exercices de spécialité du baccalauréat sont extrêmement stéréotypés(2). Or il est possible, dans le cadre du programme d'arithmétique de terminale S spécialité mathématique, de faire réfléchir les élèves sur des raisonnements différents de ceux qu'ils ont l'habitude d'utiliser.

L'exemple d'un exercice d'arithmétique donné dans une classe

Dans le cadre de notre recherche en didactique des mathématiques, nous avons eu la chance d'être accueillie pendant une année entière dans la classe d'arithmétique d'une enseignante de terminale S spécialité mathématique. Le problème que nous présentons dans cet article est le premier exercice du premier D.S. d'arithmétique donné par cette enseignante dans sa classe. Il est particulièrement riche et intéressant pour illustrer la spécificité de l'arithmétique que nous avons évoquée en introduction.

(*) doctorante en didactique des mathématiques (en troisième année de thèse sous la direction de Jean-Luc Dorier, Professeur des Universités à l'IUFM de Lyon). Coordonnées : Laboratoire Leibniz-IMAG, 46, av. Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex. mél : Laetitia.Ravel@imag.fr.

(1) Voir bulletin n° 439 de l'APMEP, p. 252.

(2) Il s'agit essentiellement de la résolution d'équations diophantiennes. Ceci ne fait que reprendre, dans le cadre de la spécialité mathématique, une constatation déjà ancienne sur les sujets de baccalauréat (voir bulletin n° 436 de l'APMEP, p. 610)

En voici l'énoncé(3) :

1) Dresser la liste des diviseurs de 56.
2) En déduire les entiers naturels x et y vérifiant : $(2x + 1)y = 56$.
3) Déterminer les entiers naturels n tels que $(n + 7)$ divise $2n + 70$.
4) Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel il faut multiplier 56 pour obtenir un carré ?

Pour chacune des questions, nous allons identifier les enjeux mathématiques, indiquer les réponses attendues par l'enseignante, donner les réponses d'élèves et analyser leurs principales difficultés.
Précisons que cette classe comptait 22 élèves et que la calculatrice n'était pas autorisée pour ce D.S. (ce qui donne, on le voit, un intérêt à la dernière question). Cet exercice était noté sur 6 points alors que le D.S., qui se composait de quatre exercices, l'était sur 15. L'enseignante avait construit ce D.S. de telle sorte qu'un élève moyen puisse avoir un peu plus de la moyenne. Or, la moyenne a été de 3,1 sur 6 pour cet exercice et seuls 6 élèves sur 22 ont obtenu une note supérieure ou égale à 3,5.

Dresser la liste des diviseurs de 56

En spécialité mathématiques, les élèves connaissent deux techniques pour répondre à ce type de questions sans utiliser leur calculatrice. Ils peuvent :

– essayer de diviser 56 par tous les entiers positifs qui lui sont inférieurs en disposant ou non leurs calculs selon la méthode pratique présentée dans la plupart des manuels ainsi que par l'enseignante que nous avons observée :

$$\begin{array}{r|l} 56 & 1 \\ 28 & 2 \\ 14 & 4 \\ 8 & 7 \end{array}$$

– décomposer 56 en produit de facteurs premiers et retrouver, à partir d'un jeu combinatoire sur les puissances des facteurs premiers de cette décomposition, tous les diviseurs de 56.

Ces deux techniques ne se valent pas pour la suite de l'exercice. En effet, pour résoudre l'équation $(2x + 1)y = 56$, il est préférable de disposer d'une liste des couples de diviseurs de 56, ce que fournit la première technique. Voici les résultats obtenus par les vingt-deux élèves de cette classe :

	Division	Décomposition	Autres
Nombre d'élèves	17/22	3/22	2/22 (pas de justification)
Erreurs	1 élève : $56 = 6 \times 7$ (absence de calculatrice)	1 élève rajoute 0 comme diviseur	1 élève ne considère pas 1 et 56 comme diviseurs de 56

(3) N.D.L.R. La formulation de cet énoncé correspond à des objectifs de contrôle de certains savoirs ou savoir-faire. D'autres objectifs inciteraient à une formulation plus ouverte, avec, par exemple, les seuls 3^{o} et $2^{\text{à}}$ (sans le « En déduire »).

Les réponses des élèves à cette question montrent que dès le début du cours d'arithmétique, les techniques de recherche de diviseurs d'un entier sont bien maîtrisées. Cependant, certains continuent à confondre multiples et diviseurs(4). Par ailleurs, les diviseurs particuliers comme l'unité et le nombre lui-même n'ont pas, pour certains élèves, le même statut que les diviseurs stricts de ce nombre et ne sont pas toujours considérés comme étant de véritables diviseurs.

En déduire les entiers naturels x et y vérifiant : $(2\,x + 1)y = 56$

Pour répondre à cette question, on doit mettre en œuvre un type de raisonnement particulier. En effet, la tâche que doivent résoudre les élèves relève du type de tâche : « Résoudre dans **N** une équation du type $f(x)\ g(y) = a$ connaissant la liste des diviseurs de a ». C'est un type de tâche qui se résout de façon exhaustive car, une fois la liste des diviseurs de a connue, il faut chercher les valeurs qui, dans cette liste, vont convenir pour le couple (x, y) solution. Une réponse à une question nécessitant la mise en œuvre d'un raisonnement exhaustif doit donc comporter les trois phases(5) suivantes : Constitution-liste (pour constituer la base de données), Critère-tri (pour identifier le(s) critère(s) permettant d'effectuer un tri optimal dans la base de données) et Conclusion (pour vérifier l'équivalence du raisonnement). Ce qui nous donne pour la question qui nous intéresse :

Constitution-liste : Reconnaître dans l'égalité proposée que y et $2x + 1$ sont des diviseurs associés(6) de 56 et en déduire d'après la question 1 que :

$$(2x + 1, y) \in \{(1, 56) ; (2, 28) ; (4, 14) ; (7, 8) ; (8, 7) ; (14, 4) ; (28, 2) ; (56,1)\}.$$

Critère-tri :

– si aucun critère de tri n'est utilisé, il faut tester tous les couples possibles, ce qui revient à résoudre huit systèmes 2×2.
– utiliser le critère « y pair ». Il suffit alors de tester tous les couples pour lesquels $y \in \{2 ; 4 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56\}$ ce qui revient à résoudre six systèmes 2×2.
– utiliser le critère « $2x + 1$ impair »(7). Il suffit alors de tester tous les couples pour lesquels $2x + 1 \in \{1 ; 7\}$ ce qui revient à résoudre deux systèmes 2×2.
– utiliser conjointement le critère « y pair » et « $2x + 1$ impair » : cela revient à utiliser le critère « $2x + 1$ impair » étant donné l'ensemble auquel appartiennent les couples solutions.

Conclusion : faire une vérification si le raisonnement ne se fait pas par équivalences(8).

Une telle organisation n'est pas courante et peut poser problème aux élèves. D'autres sources de difficultés peuvent également se combiner avec la mise en œuvre d'un

(4) Nous avons remarqué que cette confusion est très répandue en début d'enseignement d'arithmétique en terminale S spécialité mathématique et qu'elle persiste assez longtemps pendant l'année.
(5) Ce type de raisonnement particulier, ainsi que son organisation, ont été étudiés par Égret (1999) dans le cas d'exercices d'arithmétique.
(6) Difficulté en arithmétique de conversion du registre du langage symbolique à celui de la langue naturelle comme nous allons le voir.
(7) Même type de difficulté que celle soulevée ci-dessus.
(8) On connaît les difficultés des élèves face à ce problème.

raisonnement exhaustif dont la difficulté à passer du langage naturel au langage symbolique et inversement. Cette difficulté est identifiée par Égret (1999) comme source de problème en arithmétique pour beaucoup d'élèves de terminale S spécialité mathématique :

> « La difficulté de conversion du registre langue naturelle – langage symbolique, conversion qui devrait être instantanée. Par exemple, résoudre l'équation dans **N** : $d(d + 1) = 156$ revient à chercher les diviseurs positifs consécutifs de 156. » (Égret 1999, p. 100)

L'analyse de cette question avec l'aide du découpage proposé en trois phases montre la place centrale du critère de tri dans le raisonnement exhaustif. Identifier le critère de tri efficace permet ici de diminuer de façon significative le nombre de systèmes 2×2 à résoudre et, par conséquent, de minimiser les risques d'erreurs liées au grand nombre de systèmes à résoudre.
Mais, dans les copies des élèves, ces critères ne sont pas toujours explicites et des élèves qui n'ont pas forcément utilisé de critère de tri au début de leur résolution, reconnaissant certaines régularités, sont amenés à en utiliser un au cours de celle-ci.
Voici les techniques utilisées par les 22 élèves de cette classe pour répondre à la deuxième question :

	Essai-erreur	Aucun critère	y pair	$2x + 1$ impair
Nbre d'élèves	5	5	1	11

Dans la première catégorie, quatre élèves vérifient que le couple (3, 8) est solution et un autre essaie de chercher une décomposition acceptable de 56 :

$2 \times 3 \times 8 + 8 = (2 \times 3 + 1) \times 8 = 56.$

(3, 8) est le seul couple qu'ils donnent et ils ne vérifient pas s'il en existe d'autres.

Parmi les élèves qui n'utilisent pas de critère de tri, deux choses sont à remarquer :

– Comme attendu, la reconnaissance du fait que y soit un diviseur de 56 n'est pas lue immédiatement dans l'égalité proposée. Un élève écrit :
  $y(2x + 1) = 56$, $2x + 1 = 56/y$, *donc y est un diviseur de* 56.
  Cela rejoint les difficultés qu'éprouvent certains élèves au début du cours d'arithmétique par rapport à la confusion entre multiples et diviseurs.
– Par ailleurs, l'obligation de travailler dans **N** pour résoudre une égalité se révèle parfois déstabilisante pour les élèves. En effet, parmi ceux qui résolvent les huit systèmes 2×2, un élève propose comme solution :
  Les couples (x, y) *vérifiant l'équation sont* (55/2, 1), (27/2, 2), (13/2, 4), (3, 8). *Les couples* (x, y) *vérifiant aussi l'équation sont* (1/2, 28), (3/2, 14), (7/2, 7). *Si* $y = 56$*, alors* $x = 0$. *Ce couple ne marche pas*.
  La définition de l'ensemble de nombres auquel les inconnues doivent appartenir pose problème car, en arithmétique, on se restreint aux solutions entières des équations, ce qui n'est généralement pas le cas quand les élèves ont à résoudre des équations dans d'autres domaines.

Les élèves qui utilisent les critères de tri « y pair » et « $2x + 1$ impair » résolvent plus ou moins bien la question posée, sans avoir trop de problèmes. Cependant, l'identification du critère de tri n'est souvent pas immédiate du fait de la difficulté pour les élèves d'avoir une lecture arithmétique d'une égalité, comme le montre l'extrait de copie suivant :

56 est pair donc
si x est pair, $2x + 1$ est impair et y est pair.
Si x est impair, $2x + 1$ est impair et y est pair.
Donc y est différent de 1 et de 7 dans tous les cas (x pair ou impair).

Cet élève fait une disjonction de cas sur la parité de x alors que l'égalité proposée indique déjà que $2x + 1$ est un nombre impair, du fait de sa structure.
Il faut également remarquer que le statut particulier des diviseurs 1 et 56, dont nous avons déjà parlé, pose ici des problèmes à un nombre important d'élèves. En effet, parmi les 11 élèves qui identifient le meilleur critère de tri ($2x + 1$ impair), 7 ne traitent pas le cas $2x + 1 = 1$; soit ils l'oublient, soit ils l'écartent ou le mettent à part en utilisant divers arguments comme :

Élève 1 : Si l'on compte 1 et 56 dans les diviseurs, il y a un autre couple solution : (0,56).
Élève 2 : Le seul diviseur impair de 56 est 7 ; on élimine 1 car $x \in \mathbf{N}$.

Bien que le type de tâche de cette question soit nouveau pour les élèves, 17 sur 22 ont su trouver la technique adaptée pour la résoudre, à savoir mettre en œuvre un raisonnement exhaustif. Par ailleurs, sur ces 17 élèves, 11 ont utilisé le critère de tri le plus efficace ; mais seuls 4 d'entre eux sont parvenus à résoudre totalement la question, les autres ne prenant pas en compte le cas $2x + 1 = 1$. Nous allons maintenant voir si ce taux de réussite reste à peu près semblable pour la question suivante qui relève du même type de tâche.

Déterminer les entiers naturels n tels que $(n + 7)$ divise $2n + 70$

Cette question relève du même type de tâche que la précédente : « Résoudre dans $\mathbf{N}$ une équation du type $f(x)\,g(y) = a$ connaissant la liste des diviseurs de a ». Elle est cependant d'un niveau de difficulté supérieur car il faut d'abord traduire en langage symbolique l'énoncé proposé (il existe k entier relatif tel que $2n + 70 = k(n + 7)$) et transformer ensuite cette équation pour se ramener à une équation du type $f(x)\,g(y) = a$ où a est en entier naturel connu, ce qui fait apparaître 56. Cette première tâche de transformation de l'énoncé est entièrement à la charge de l'élève. La résolution de cette question peut donc être caractérisée par les trois temps suivants :
Traduire l'énoncé dans le registre symbolique : il existe k entier relatif tel que $2n + 70 = k(n + 7)$;
Manipuler algébriquement l'équation et faire apparaître 56 : transformer $2n + 70 = k(n + 7)$ en $(k - 2)(n + 7) = 56$.
Mais les élèves peuvent effectuer d'autres manipulations et aboutir à d'autres égalités :

– exprimer n en fonction de k (étant donné que l'on cherche les valeurs de n, nous pensons que des élèves effectueront ce calcul), ce qui donne $n = (7k - 70)/(2 - k)$. Il est alors possible de résoudre la question en étudiant la fonction(9)

(9) La question initiale devient alors : quelles sont les valeurs entières positives prises par la fonction f. Nous pensons que les élèves n'utiliseront pas cette méthode car elle est trop éloignée de ce qu'on leur demande habituellement dans le cadre du cours d'arithmétique.

$f(k) = (7k - 70)/(2 - k)$.

– exprimer k en fonction de n ce qui donne $k = (2n + 70)/(n + 7)$. Il est alors possible de résoudre la question en étudiant la fonction[10] $g(n) = (2n + 70)/(n + 7)$.

Résoudre la question en utilisant un raisonnement exhaustif :

– **Constitution-liste** : reconnaître que $k - 2$ et $n + 7$ sont des diviseurs associés de 56 et en déduire d'après la question 1 que $n + 7 \in \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$;
– **Critère-tri** : ne pas utiliser de critère de tri et résoudre les huit équations possibles ou utiliser le critère de tri $n + 7 \geq 7$, ce qui revient à résoudre cinq équations.
– **Conclusion** : faire une vérification si le raisonnement ne se fait pas par équivalences.

Cette question peut donc poser des difficultés à différents niveaux :

– si la conversion de l'énoncé en langage symbolique n'est pas faite, la question ne peut être résolue par les élèves ;
– ensuite, rien n'indique explicitement que l'égalité $2n + 70 = k(n + 7)$ doit être transformée dans le but de se ramener à une équation du type $f(x)\ g(y) = a$ où a est un entier naturel connu et faire ainsi apparaître 56. Si les élèves ne font pas ce travail, ils auront beaucoup de mal à résoudre la question posée. Comment peuvent-ils penser à se ramener à ce type de tâche ? S'ils n'y pensent pas, l'énoncé de l'exercice[11] les incite-t-il suffisamment à penser à faire apparaître 56 ?

Comme nous venons de le voir, les choix à faire face à cette question sont de vrais choix mathématiques qui sont entièrement à la charge des élèves et qui ont de réelles implications sur la possibilité ou non de poursuivre la résolution de la question.

Deux élèves n'ont pas répondu à cette question. Les réponses des 20 élèves restants se répartissent comme suit :

<table>
<tr><td>Pas de traduction de l'énoncé</td><td>8/20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Traduction de l'énoncé :
$2n + 70 = k(n + 7)$</td><td rowspan="2">12/20</td><td>N'a pas fait apparaître 56</td><td>9/12</td></tr>
<tr><td>A fait apparaître 56</td><td>3/12</td></tr>
</table>

Pas de traduction de l'énoncé

Dans les huit copies concernées, trois techniques différentes ont été utilisées pour tenter de fournir une réponse :

– tester des valeurs de n (5 fois) ;
– utiliser des arguments de divisibilité pour établir des conditions devant être vérifiées par $n + 7$ et/ou par n (5 fois) ;
– effectuer la division polynomiale de $2n + 70$ par $n + 7$ (1 fois).

(10) Il faut alors chercher les valeurs entières positives de n telles que $g(n)$ soit également entier car $k = g(n)$ est un entier relatif.

(11) Et notamment les questions 1, 2 et 4.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la deuxième technique (la première par essai-erreur se révèle rapidement coûteuse en terme de temps de calcul du fait que la calculatrice soit interdite pour ce D.S.). Donnons tout d'abord des exemples d'arguments proposés par des élèves :

> *Élève 1 :* $2n + 70$ *est divisible par* 2. $2n + 70 = 2(n + 35)$. *Donc* $n + 7$ *doit être pair, donc* n *doit être impair*.
>
> *Élève 2 :* $(n + 7) \mid (2n + 70)$ *ssi* $2 \mid n/7 + 1$ *et* $7 \mid n + 35$ *car* $n + 7 = 7(n/7 + 1)$ *et* $2n + 70 = 2(n + 35)$.

Dans les copies des cinq élèves concernés, on voit apparaître beaucoup de représentations fausses sur les concepts de divisibilité et de diviseurs. Il est fort probable que les élèves soient d'autant plus « poussés » à inventer de faux théorèmes du fait que les objets avec lesquels ils travaillent sont d'apparence simple et « transparents ». En effet, lorsqu'ils manipulent des nombres entiers, les élèves sont souvent tentés de généraliser abusivement une propriété remarquée sur un cas particulier. Et ce, d'autant plus qu'ils ne possèdent pas ou peu de moyens de contrôle sur la manipulation d'arguments de divisibilité. Voici la liste des théorèmes-en-acte(12) et des faux théorèmes que nous avons relevés sur quatre copies d'élèves(13) :

- si $a \mid bc$, alors $a \mid b$ et $a \mid c$ ou $a \mid bc$ si et seulement si $a \mid b$ et $a \mid c$ (3 fois).
- si $a \mid 2$, alors a est pair ou si a divise un nombre pair, a doit être pair (3 fois).
- si $a \mid b + c$, alors $a \mid b$ et $a \mid c$ (2 fois).
- $ab \mid cd$ si et seulement si $c \mid b$ et $a \mid d$ (1 fois).
- si $a \mid b$, alors a est un multiple de b (1 fois).

Les élèves, sachant ce qu'il faut obtenir comme type de réponse, inventent de faux théorèmes pour pouvoir aboutir à ce qu'ils souhaitent, sans nécessairement prendre le temps de vérifier sur un exemple numérique la validité des arguments qu'ils utilisent. Cette non familiarité avec les contre-exemples est flagrante, surtout quand on sait qu'il est relativement simple d'en trouver pour tous ces faux théorèmes. D'ailleurs, c'est ce que l'enseignante écrit en marge d'une réponse d'élève basée sur la première conception mentionnée ci-dessus :

> ***Correction de l'enseignante*** : Faux : $3 \mid 9 = 2 + 7$ *et* 3 *ne divise ni* 2, *ni* 7.

Traduction de l'énoncé : $2n + 70 = k(n + 7)$

Parmi les douze élèves qui écrivent la relation $2n + 70 = k(n + 7)$, seuls trois ont fait apparaître 56, nombre clé permettant de résoudre la question.

N'a pas fait apparaître 56

Les neuf élèves qui n'ont pas fait apparaître 56 (sur les douze ayant réussi à traduire formellement l'énoncé) essaient majoritairement de résoudre l'équation obtenue en utilisant des techniques de résolution d'équation qui ne rentrent pas dans le cadre d'une résolution de type arithmétique. Quatre d'entre eux expriment n en fonction de

(12) Les théorèmes-en-acte sont des propriétés que les élèves attribuent aux concepts. Ces théorèmes-en-acte ont un domaine de validité non vide, c'est-à-dire qu'ils permettent d'apporter une réponse exacte dans un certain nombre de situations (cf. Vergnaud 1990).

(13) Il y a aussi des représentations que nous n'avons pas réussi à identifier comme : $(n + 7)$ *divise* $2n + 70$. *Donc* n *doit être un multiple de* 7, *mais non divisible par* 2.

k et tentent de trouver les valeurs possibles de n par essais-erreurs. Une élève finit par donner la réponse suivante :

n est donc les entiers de la forme $7(k-10)/(2-k)$.

Cette réponse est juste mais elle pose le problème du type de réponses acceptables. Cette réponse n'est pas acceptable dans le cadre du contrat de la classe d'arithmétique. En effet, l'enjeu d'une résolution d'équation en arithmétique est de trouver des valeurs entières explicites ! Mais, comme nous l'avons souligné ci-dessus, si cette élève avait cherché alors les valeurs entières positives prises par la fonction $f(k)$, sa démarche aurait été acceptable.

Pour les autres élèves :

- un essaie d'exprimer k en fonction de n avant de revenir à des arguments de divisibilité. Il utilise la propriété fausse « tout diviseur d'un nombre pair est pair » :

  $2n + 70 = (n + 7) \times a$. $a = (2n + 70)/(n + 7)$. $84 = 14 \times 6$, 2×70 : $(7 + 7) \times 6$ *donc* $(7 + 7)$ *divise* $2 \times 7 + 70$.

  Si n est pair, $2n + 70$ *est pair et* $n + 7$ *est impair donc* $n + 7$ *ne divise pas* $2n + 70$.

  Si n est impair, $2n + 70$ *est pair et* $n + 7$ *est pair donc* $n + 7$ *peut diviser* $2n + 70$.
- un élève tente de poser $f(n,k) = 0$ et de transformer cette équation à deux inconnues en un système d'équations à une inconnue pour se ramener à des techniques de résolution algébrique classiques :

  $$(2-q)n+7(10-q)=0 \quad \begin{cases}(2-q)n=0\\ 7(10-q)=0\end{cases} \quad \textit{ou } (2-q)n=-7(10-q) \textit{ etc.}$$
- Un élève traite l'équation en termes de divisibilité :

  $(n + 7) \mid 2n + 70$, $2n + 70 = k(n + 7)$ *avec* $k \in \mathbf{Z}$. $2n + 70$ *est toujours pair donc il est divisible par* 2 *et ses multiples seulement. Donc* $n + 7$ *doit être pair donc n impair.*
- enfin, un autre élève débute une récurrence. L'utilisation de cette technique peut être expliquée par le fait que c'est la technique privilégiée dans la plupart des manuels et par les enseignants pour résoudre des exercices portant sur des questions de divisibilité de nombres dépendant de n[14] :

  Si $(n + 7)$ *divise* $(2n + 70)$ *on a* $k(n + 7) = 2n + 70$, $2n = k(n + 7) - 70$.

  1) Montrons que si $n = 0$, *la propriété est vraie :* $2 \times 0 + 70 = 70$ or $70 = 7 \times 10$ *donc la propriété est vraie pour* $n = 0$.

  2) $2(n + 1) + 70 = 2n + 72 = k(n + 7) - 70 + 72 = k(n + 7) + 2$.

  Cependant, l'emploi de cette technique dans le cas de cet exercice soulève le problème de la compréhension de la récurrence par les élèves (autre qu'une recette type pour certains exercices). En effet, la question demande de trouver les valeurs de n pour lesquelles la relation est vraie et non pas de prouver cette relation pour tout n.

Les réponses des élèves n'effectuant pas les transformations attendues sur $2n + 70 = k(n + 7)$ font apparaître deux nouveaux théorèmes-en-acte sur la notion de divisibilité :

(14) Par exemple, dans un des quatre exercices du D.S., il y avait celui-ci : Démontrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$, pour tout n naturel.

– Si $a \mid b$ et b pair, alors a est pair.
– Si $a \mid b$, alors $a^2 < b$.
 Correction de l'enseignante : *contre-exemple* : $28 \mid 56$ et $28^2 > 56$.

Comme nous l'avions supposé, peu d'élèves ont l'idée de faire apparaître 56 dans cette question. Il leur est alors impossible de résoudre la question posée. Malgré leur désarroi, ils font preuve d'une certaine « inventivité » pour essayer de rapprocher les techniques de résolution d'une équation arithmétique de celles classiques d'équations algébriques ou d'adapter à l'exercice les nouvelles techniques emblématiques du début de cours d'arithmétique : l'utilisation des propriétés (fausses ou correctes) de la relation de divisibilité et la récurrence(15). Mais l'absence de possibilités de contrôle de leurs démarches conduit leurs résolutions à une impasse.

A fait apparaître 56

Trois élèves ont fait apparaître 56 après manipulation de la relation $2n + 70 = k(n + 7)$.
En fait, nous avons classé, parmi ces élèves, un qui fait une erreur de calcul mais dont la démarche est celle attendue par l'enseignante :

 $n + 7 \mid 2n + 70$ *équivaut à :* $2n + 70 = (n + 7)k$, $k \in \mathbf{N}$.
 $2(n + 7) + 7 \times 5 = (n + 7)k$, $k \in \mathbf{N}$. $2 + (7 \times 5)/(n + 7) = k$, $k \in \mathbf{N}$. *Il suffit donc de trouver les diviseurs de* 35 *supérieurs ou égaux à* 7.
 Correction de l'enseignante : *Démarche valable. Problème de calcul.*

Parmi ces copies, une seule présente une solution presque complète de la question posée, l'élève oubliant de vérifier à la fin de la recherche les couples solutions alors que son raisonnement n'était pas un raisonnement par équivalences.

En conclusion, nous pouvons dire que cette question s'est révélée être très difficile pour les élèves car en plus des difficultés spécifiques au raisonnement exhaustif, il y avait d'autres obstacles comme la traduction de l'énoncé dans le registre symbolique et la manipulation de l'équation obtenue pour faire apparaître 56. Cette idée de faire apparaître 56 qui pouvait sembler visible à la lecture de l'énoncé ne l'est pas pour la grande majorité des élèves. Or, sans utiliser 56, nous avons vu qu'il est difficile de répondre à la question posée. Cette question a déstabilisé la plupart des élèves. Beaucoup n'avaient plus ou peu de contrôle sur les résultats qu'ils produisaient et sur la cohérence de leur réponse par rapport à l'exercice. On voit ainsi apparaître de nombreux faux théorèmes et des techniques utilisées hors de leur domaine de pertinence.

Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel il faut multiplier 56 pour obtenir un carré ?

Une première méthode pour répondre à cette question est de rechercher cet entier de façon exhaustive en commençant par multiplier 56 par 2, de regarder si le résultat

(15) Notons que le cours d'arithmétique donne, pour la première fois, l'occasion aux élèves d'utiliser la récurrence en dehors du domaine des suites.

obtenu est un carré, puis par trois, etc. Mais cette technique est vite invalidée du fait de sa lourdeur car la calculatrice est interdite dans ce D.S. et l'entier recherché, 14, est relativement grand. Cependant, un élève a choisi malgré tout cette technique et répond sur sa copie :

> $56 \times 14 = 784$ *et* $784 = 28^2$. *(Méthode : j'ai essayé tous les nb entiers de* 1 *à* 14 *pour trouver un carré).*
>
> ***Correction de l'enseignante :*** *Démarche à revoir. En décomposant* 56 *en facteurs premiers.*

Cette démarche exhaustive est ici mathématiquement valable car on recherche le plus petit entier vérifiant une propriété mais elle n'est pas acceptable dans le cadre du contrat de la classe. Une technique avait été instituée en classe pour résoudre ce type de tâche et c'est la seule acceptée par l'enseignante comme le montre son commentaire à la suite de la réponse de l'élève.

La seconde technique, celle attendue par l'enseignante, est la décomposition en produit de facteurs premiers pour trouver cet entier à partir des exposants des facteurs premiers de 56. Il faut que tous les facteurs premiers de $56 \times a$ aient des exposants pairs. Ainsi, sachant que $56 = 2^3 \times 7$, $a = 2 \times 7 = 14$. Cette technique est utilisée par 19 élèves. Parmi eux, trois font des erreurs de calcul et proposent $56 = 2^3 \times 19$ comme décomposition de 56.

Deux élèves ne répondent pas à cette question.

Ainsi, cette question, tout comme la première de cet exercice, est bien réussie par la plupart des élèves. Elle peut être résolue par la mise en œuvre d'une technique opératoire simple. Les questions 2 et 3 présentaient plus de problèmes du fait que les techniques à utiliser consistaient en la mise en œuvre d'un raisonnement spécifique ainsi que la reconnaissance et l'organisation d'une démarche heuristique complexe, ce qui reste une tâche problématique, même pour des élèves de spécialité mathématiques.

Conclusion

Comme nous l'avions souligné en introduction, l'arithmétique est un domaine mathématique qui porte sur des objets simples, mais dans lequel il est possible de travailler dès le début d'un enseignement sur des raisonnements subtils sans avoir à introduire en préalable un nombre important de théorèmes compliqués. Les difficultés d'élèves que nous avons mises en évidence dans cet article nous montrent à quel point ces derniers sont mal « armés » pour mettre en œuvre ces raisonnements quand on leur en laisse l'entière autonomie, comme dans le cas de la troisième question de cet exercice.
Par ailleurs, l'analyse que nous avons présentée prouve qu'en arithmétique, on peut trouver des exercices qui permettent d'évaluer la capacité des élèves à raisonner, c'est-à-dire à faire de véritables choix mathématiques de façon autonome afin d'aboutir, non trivialement, à la résolution de la question posée. Ces exercices diffèrent beaucoup de la plupart des exercices d'arithmétique du baccalauréat qui, tournant autour de la résolution d'équations diophantiennes, restent extrêmement

guidés et très stéréotypés quand à la technique mathématique à utiliser(16) pour répondre à la question.

Or, notre recherche (Ravel 2002) nous a permis de montrer que les enseignants de terminale S étaient satisfaits de la réintroduction de contenus d'arithmétique en spécialité mathématique car cela représentait pour la grande majorité d'entre eux *un lieu privilégié pour apprendre à raisonner*(17). Ces enseignants sont d'autant plus conduits à utiliser le cours d'arithmétique pour mettre en avant le raisonnement qu'ils ont le légitime souci de préparer leurs élèves à l'enseignement des mathématiques des études supérieures scientifiques (Noailles 1999 et Ravel 2002).

Bibliographie

ÉGRET, M.-A. (1999). Problèmes d'écriture de démonstrations chez les élèves de lycée en arithmétique, In Bailleul et al. (éds.), *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate 1999, IUFM de Caen, 95-101.

MISSENARD, C. (2002). En revenant de Lille, *Bulletin APMEP* **439**, 250-254

NOAILLES, J. (1999). Arithmétique en terminale S du bac au post-bac, In Noirfalise A. (éd.), *Autour de la liaison Bac/Post-Bac : Problèmes de contenus, problèmes d'orientation*, IREM de Clermont-Ferrand, p. 45-64.

RAVEL, L. (2002). Arithmétique en terminale S spécialité : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères-IREM* **49**, 93-116, Topiques (éd.)

ROUX, R. (2001). Vingt ans après … (ou presque), *Bulletin APMEP* **436**, 610-611

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10(2/3)**, 133-170, La pensée sauvage (éd.).

(16) Il s'agit de l'algorithme d'Euclide.

(17) Extrait d'une réponse d'enseignant au questionnaire sur l'enseignement d'arithmétique en terminale S spécialité mathématique que nous avons distribué à 43 enseignants.