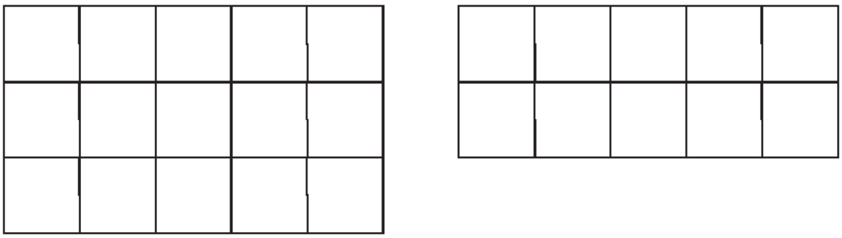
Deux rectangles accolés et des polygones(*)

François Drouin(**)



Accole ces deux rectangles pour former des polygones. Ils devront être accolés par un nombre entier de côtés de carreaux.

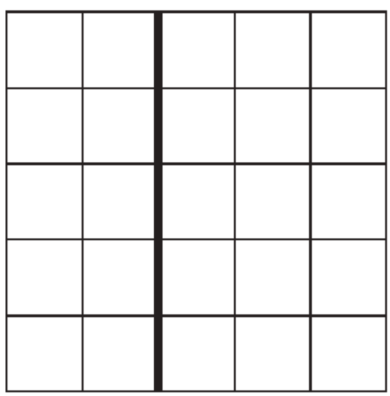
Dessine au moins cinq polygones différents.
Sous chaque polygone, indique en vert son aire et en rouge son périmètre. L'unité d'aire sera l'aire d'un carreau, l'unité de longueur sera la longueur d'un côté de carreau.

Questions « supplémentaires » proposées par la suite :

– Quelle est la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
– Quelle est la valeur minimale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
– Pouvons-nous trouver des polygones ayant pour périmètre les valeurs entières comprises entre les valeurs minimale et maximale envisagées aux questions précédentes ?

Quelques remarques :

Les élèves remarquent aisément que les polygones dessinés ont même aire. Cependant le fait d'indiquer l'unité à utiliser induit le comptage des carreaux et peu d'élèves, hélas, pensent au fait que les polygones sont formés des deux mêmes rectangles.



Lorsqu'en préalable le périmètre et l'aire de chacun des rectangles de départ sont rappelés, certains élèves pensent que le périmètre de la figure ci-contre (configuration facilement acceptée comme ayant un périmètre minimal)

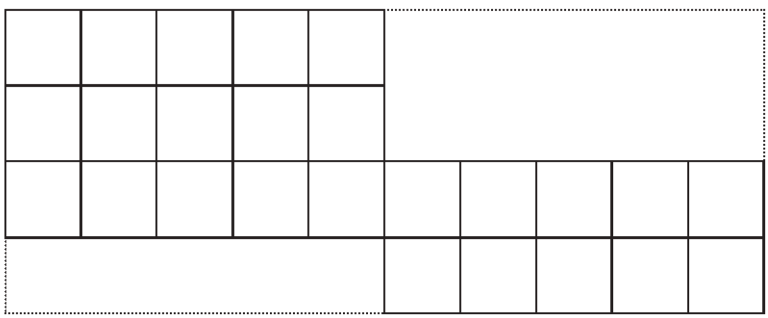
(*) Cet article est paru dans le nº 71 (septembre 2002) du Petit vert.
(**) Collège Les Avrils. 55300 SAINT MIHIEL.

est égal à la somme des périmètres des deux rectangles qui la constituent. Il est facile de faire constater que la figure représente un carré, et que le périmètre de ce carré n'est pas égal à la somme des périmètres des rectangles de départ.
Cette erreur (additivité des périmètres) peut être utilisée pour faire émerger le fait qu'il est possible de trouver le périmètre de chaque polygone en soustrayant deux fois la longueur de la partie commune de la somme des deux périmètres.
Le périmètre est maximal lorsqu'on « cache » le minimum de côtés de carreaux et le périmètre est minimal lorsqu'on « cache » le maximum de côtés de carreaux. Ceci permet de justifier ou d'infirmer les maximum et minimum envisagés par les élèves.

Les élèves constatent vite qu'il semble difficile d'obtenir des périmètres impairs. Est-il réellement impossible d'obtenir des périmètres impairs pour de tels polygones ?

Quelques pistes explorées par les élèves :

La somme des périmètres des deux rectangles est 30. Selon le nombre de côtés de carreaux cachés, il faut ôter 2, 4, 6 ou 8 unités de longueur. Les périmètres possibles sont alors 22, 24, 26 ou 28.

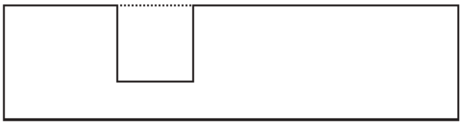


En faisant « entourer » le polygone par un rectangle, les élèves constatent que ce rectangle a même périmètre que le polygone dessiné. Il n'est pas très difficile de prouver que le périmètre du rectangle est nécessairement un nombre pair (2 fois la largeur + 2 fois la longueur, c'est à dire la somme de deux nombres pairs, ou deux fois la somme de la longueur et de la largeur, c'est ici une possible introduction à des écritures littérales). Le résultat conjecturé peut ainsi être justifié.

Il est aussi possible de leur faire saisir qu'en faisant le tour du polygone, il y aura autant de trajets → que de trajets ← et autant de trajets ↑ que de trajets ↓ (puisqu'on revient au point de départ…). Le nombre de trajets horizontaux est pair, le nombre de trajets verticaux est pair et il y a ici aussi une bonne occasion d'utiliser le fait que la somme de deux nombres pairs est paire (c'est une évidence pour les élèves).

Pour trouver le périmètre des polygones proposés, le comptage des unités de longueur n'est pas si aisé qu'on pourrait le penser : les élèves ne savent plus de quel sommet ils sont partis, des résultats sont proposés avec une erreur d'une unité, … La méthode d'« entourage » du polygone par un rectangle est la bienvenue, et il est remarquable que les élèves la réutilisent sans difficulté en cours d'année.

Il faut cependant bien prendre garde à leur présenter des polygones ayant un « creux » tel celui dessiné ci-contre :



Il y a besoin d'adapter la méthode…

Il faut être d'autant plus prudent qu'une autre image mentale du périmètre sera activée en cours d'année lorsqu'il faudra faire découvrir une valeur approchée de π en faisant rouler des disques ou en les entourant par une ficelle : si nous faisons « rouler » les deux polygones dessinés précédemment, après un tour complet, nous n'obtiendrons pas leur périmètre.
En fin d'activité, il pourra être intéressant de faire émerger un certain nombre de méthodes permettant le calcul du périmètre d'un polygone : la somme des longueurs des segments formant la ligne brisée fermée, la longueur du rectangle qui l'entoure (avec toutes les précautions nécessaires, en particulier le fait que les côtés du polygone suivent les directions du quadrillage), la longueur parcourue par un sommet lorsque le polygone fait un tour complet, la somme des périmètres des « sous-figures » de laquelle on retire deux fois la longueur de la partie commune, une formule…

Il reste ensuite à proposer aux élèves de nombreuses figures géométriques et qu'ils envisagent quelle méthode est possible.

Dans l'excellente revue belge « Math-Jeune Junior » n° 101J d'Avril 2002 (La mathématique au quotidien. Mono …,duo …, polyminos (3) pages 64 à 67), Claude Villers évoque les périmètres de ces polygones formés de *n* carrés élémentaires. La méthode indiquée utilise le nombre de segments « unités » intérieurs et peut être également proposée à nos élèves.

Je propose cette activité depuis plusieurs années dans mes classes de sixième, en étant persuadé qu'à l'école élémentaire, les élèves de cycle III y trouveraient eux aussi leur bonheur.