Évolution de l'enseignement du calcul(*)

Le calcul est l'objet d'un contraste saisissant : d'une part son rôle essentiel en maths et dans les autres sciences, sa vitalité, la numérisation des sociétés (qui a poussé à l'invention du mot anglais « numeracy », sans équivalent en français mais pendant scientifique de « literacy » traduisible par alphabétisation), son statut de pilier de l'enseignement enfin ; d'autre part, la façon dont il apparaît aux yeux extérieurs, objet sans réelle noblesse mathématique, profondément déstabilisé par les machines et les questions que cela pose : qu'est-ce que savoir calculer ? comment cela s'apprend-il ?

Trois points permettent d'expliquer ces contrastes :

- L'évolution technologique et la déstabilisation qu'elle induit.
  On assiste à un déplacement des pratiques, des besoins, des valeurs du calcul, passant de la maîtrise, de l'exécution vers la planification, le pilotage, le contrôle. Savoir calculer aujourd'hui, c'est savoir piloter, gérer un calcul qui sera instrumenté dès qu'il sera complexe.
- Le rapport dominant au calcul dans la culture.
  Une vision culturelle profondément insatisfaisante veut opposer le calcul au raisonnement. Réduisant le calcul à sa forme mécanisée, réservant le raisonnement à la géométrie.
  Mais savoir calculer, c'est savoir mettre l'automatisation du calcul au service du raisonnement.
  De même oppose-t-on le calcul exact au calcul approché auquel on se résout quand le premier n'est plus possible. Pourtant, pour de nombreux problèmes, la démarche calcul exact ne fait pas sens. Ces deux types doivent être vus en complémentarité.
- La vision des rapports entre le technique et le conceptuel.
  Le processus d'adaptation passe par des phases de déséquilibres, de conflits, des situations adaptées pour y répondre et permettre de dégager les concepts. Cette vision constructiviste des savoirs a été implicitement traduite dans notre enseignement. Avec l'idée que les compétences techniques suivraient automatiquement le conceptuel, avec un peu l'idée que ce qui se comprend bien s'énonce bien. Il faut apprendre à jouer sur ces deux valences (technique - conceptuel).

(*) Compte rendu de la conférence de Michèle Artigue au Colloque Inter-Irem Premier Cycle « Lyon Confluence 2002. Les nombres : leur enseignement au collège et leur vie dans la société ». Michèle Artigue est professeure à l'université Paris 7. Elle a coordonné le rapport sur le Calcul élaboré par la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, présidée par Jean-Pierre Kahane. Ce rapport est paru aux Éditions Odile Jacob en mars 2002. Il est également accessible par Eduscol. L'essentiel en a été donné dans le Bulletin APMEP nº 437, pages 7 à 10. Une annexe au rapport est sur le serveur APMEP. Elle a été analysée dans le Bulletin 439, pages 149-150.

Ces contrastes établis constituent une chance pour repenser les enjeux de l'enseignement du calcul :
A – renforcer les rapports calcul - raisonnement ;
B – rééquilibrer les rapports calcul exact - calcul approché,
tout en ayant un rapport plus satisfaisant aux instruments de calculs.

A – C'est un travail quotidien qui commence dès le début de l'école. Le calcul réfléchi (au primaire), le calcul « à la louche », le calcul pour résoudre des problèmes, le calcul dans des jeux.

<u>Premier exemple</u>. À l'école. « Le plus grand produit » (activité de l'INRP).

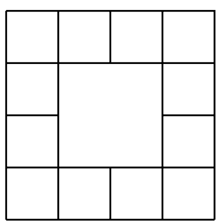
Par exemple, de toutes les décompositions possibles de 10 comme somme de nombres entiers, quel est le plus grand produit si on remplace les + par des × ? et généralisation.

Cette activité permet de passer des calculs aux stratégies, aux conjectures. Par exemple, une bonne décomposition ne contient pas de 1, ne contient que des 2, des 3, des 4.

Plus tard, le rôle de l'algèbre sera d'exprimer cette généralité. C'est un exemple de l'introduction de l'algèbre par les formules et les modèles (patterns) comme chez les Anglo-saxons plutôt que par les équations comme en France ou dans le sud de l'Europe en général.

<u>Deuxième exemple</u>. Au collège. « La bordure » (Irem de Poitiers).

Combien de carreaux dans la bordure pour un carré de côté 4, 10, ..., 120 ? Pour n'importe quel carré ?



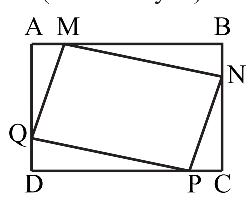
Les différents comptages peuvent amener les formules :
$N + N + N + N + 4$, $4N + 4$, $4(N + 2) - 4$, $2(N + 2) + 2N$, $(N + 2)^2 - N^2$, …

Répondre à la question du moyen de passer d'une formule à l'autre sans le sens du problème permet l'initiation à l'algèbre. Le symbolisme est introduit dans la continuité de l'arithmétique.

On peut naturellement prolonger cette activité :
Que se passe-t-il si on double le côté du carré ?
Y a-t-il des bordures de 200, 210, 1000 carreaux ?
Quels sont tous les nombres qui correspondent à des bordures ?
…

<u>Troisième exemple</u>. En seconde. « Le quadrilatère qui tourne » (Irem de Lyon).

Ce problème constitue une illustration du rapport entre calcul et raisonnement dans un environnement instrumenté (Cabri II).

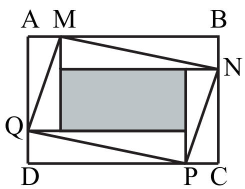


ABCD est un rectangle.
$AB = 9$, $AD = 6$ et $AM = BN = CP = DQ = x$.
Comment varie l'aire $f(x)$ de MNPQ ?

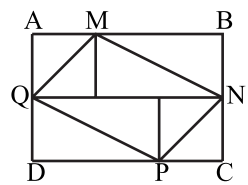
Aux diverses positions, M milieu de [AB], Q milieu de [AD], … auxquelles on pourrait penser, Cabri fait apparaître la conjecture de l'aire minimale pour $x = 3{,}75$. À celle-ci doit correspondre la factorisation raisonnée de l'expression $f(x) - f(3{,}75)$ comme identité remarquable.

Par ailleurs, dans $f(x) = 2x^2 - 15x + 54$, la valeur $x = 3{,}75$ correspond au quart du demi-périmètre ($b/2a$, avec $a = 2$ et $b = \mathrm{L} + \ell$, ici $15 = 9 + 6$). On peut donc généraliser.

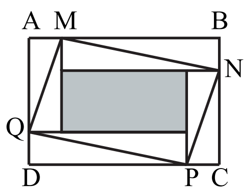
En voici une démonstration géométrique.

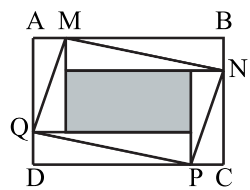


Pour $x < \frac{1}{2}\ell$, minimiser l'aire de MNPQ, c'est minimiser l'aire du rectangle grisé. Jusqu'à la disparition de ce rectangle lorsque $x = \frac{1}{2}\ell$.

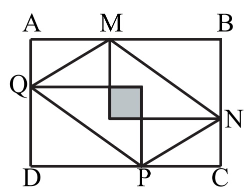


Par la suite, minimiser l'aire de MNPQ, c'est maximiser l'aire du rectangle grisé. Or celui-ci fait $2x - \ell$ de haut sur une longueur de $\mathrm{L} - 2x$.
C'est un rectangle de périmètre fixe…





… il est donc d'aire maximale quand il est carré, quand $2x - \ell = \mathrm{L} - 2x$, quand $x = \dfrac{\mathrm{L} + \ell}{4}$. Cette valeur est bien le quart du demi-périmètre.



En conclusion, renforcer les rapports calcul - raisonnement demande la prise en compte des différents points suivants :

- Le besoin d'un répertoire et de routines. C'est le besoin de l'automatisation.
- La dépendance des domaines. Il faudra faire des choix dans les formes de calcul à développer en fonction des filières. Par exemple, à partir de la Première en lycée.
- La nécessité d'ouvrir l'espace des situations pour ne pas « trivialiser » des situations papier-crayon quand on peut instrumentaliser (cf. le quadrilatère qui tourne).
- L'importance de la gestion des situations. C'est jouer au besoin sur les deux valences des techniques, épistémique (par exemple la périodicité dans la division) et pragmatique.

B – Le rééquilibrage des rapports entre le calcul exact et le calcul approché s'articule en trois points autour du travail sur les ordres de grandeur :

- ordre de grandeur du très petit au très grand ;
- ordre de grandeur et dimension ;
- ordre de grandeur et localisation du calcul en analyse.

Michèle Artigue n'a pas eu le temps de développer cette partie et sa conférence s'est arrêtée là.