Notre collègue Raymond Raynaud nous fait part, depuis longtemps, de son irritation à propos d'une confusion, trop habituelle et génératrice d'erreurs, entre : « résoudre l'équation, d'inconnue x, $f(x) = g(x)$ » et « calculer x sachant que $f(x) = g(x)$ ».
Il nous a, voici quelques mois, fourni un riche faisceau d'observations, de suggestions et de questions tournant autour du sujet « signe = et équations ».
À partir de là, et en remerciant vivement Raymond Raynaud – ainsi que Louis-Marie Bonneval pour un point de vue parfois différent –, Michel De Cointet et Henri Bareil proposent le texte ci-après :

Égalités et équations

* Deux exemples introduiront le propos.

– *Le premier est tiré d'un manuel de Quatrième, édition 2002 :*

« Résoudre l'équation $5x + 2 = 3x - 4$.
On soustrait 2 aux deux membres de l'égalité :
$5x + 2 - 2 = 3x - 4 - 2$
… »

– *Le second est une mystification classique :*

« Résoudre dans **R** l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ (1).
Multiplions les deux membres de (1) par x :
$x^3 + x^2 + x = 0$.
Or d'après (1), $x^2 + x = -1$, donc $x^3 - 1 = 0$, c'est à dire $x = 1$.
On en déduit $1^2 + 1 + 1 = 0$, c'est à dire $3 = 0$. »

* *Dans chacun de ces deux exemples, il s'agit d'une ÉQUATION qui,* (subrepticement dans le second) *devient une ÉGALITÉ.*
C'est peut-être sans trop de dommage pour le résultat du premier, mais très fâcheux pour celui du second.
Et, dans les deux cas, la qualité du raisonnement, donc son apprentissage sont bien mis à mal.
Alors, « égalités » et « équations » ? Peut-on apprendre aux élèves, et ceci dès le collège, à raisonner proprement ? Essayons.

I. Égalités

I.1. Définition 1

L'égalité « $a = b$ » signifie que a et b désignent le même objet.

Exemples :

$2 + 3 = 5$; $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$; $5\sqrt{27} = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$.

I.2. Règles

Quels que soient les nombres a, b et c, si $a = b$, alors $a + c = b + c$ et $ac = bc$.

Quels que soient les nombres a, b et le nombre $c \neq 0$, si $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

I.3. Application à la résolution de problèmes

A. Énoncé :
André a cinq billes de plus que Bernard. À eux deux, ils en ont vingt-cinq. Combien chacun d'eux a-t-il de billes ?
B. Solution :
Je cherche le nombre de billes de Bernard, que je note x. André en a alors $x + 5$. À eux deux ils en ont donc $2x + 5$. On en déduit les égalités $2x + 5 = 25$, puis $2x = 20$, enfin $x = 10$. On en conclut que Bernard a dix billes et André quinze.
(*Autre solution* : En mettant de côté les cinq billes supplémentaires d'André, il reste vingt billes à partager en deux.)
C. Réflexions.
L'énoncé précédent décrit une situation réelle. *On sait donc a priori que le problème posé a au moins une solution*. **L'énoncé se traduit alors par une ÉGALITÉ**.
Il y a égalité des nombres $2x + 5$ et 25, donc des nombres x et 10.
Point d'équation dans cette affaire. Le problème qui demanderait de « *résoudre l'équation* $2x + 5 = 25$ » serait d'une autre nature car, *a priori*, on ne saurait pas s'il admet une solution !
Nous aurons à résoudre, plus loin, un problème de géométrie dont on ne sait pas s'il a une solution et nous ferons alors appel aux équations.

II. Équations

II.1. Définition 2

Résoudre *l'équation* $f(x) = g(x)$ (dans l'ensemble des nombres E), c'est déterminer la ou les valeurs de x – prises dans E – pour lesquelles $f(x) = g(x)$ est une égalité.
La ou les valeurs de x en question sont dites solutions de l'équation.

II.2. Résolution d'équations avec « solution apparente »

1. Exemple 1 : *Résoudre dans* **R** *l'équation* $2x + 1 = x + 2$.
Si $x = 0$, $2x + 1 = 1$ et $x + 2 = 2$. Or $2 \neq 1$, donc 0 n'est pas solution.
Si $x = 1$, $2x + 1 = 3$ et $x + 2 = 3$. Donc 1 est solution.
On a donc mis en évidence une solution de l'équation, mais ***on n'a pas pour autant résolu l'équation !***
Poursuivons. Si je désigne par x une solution de l'équation, alors $2x + 1 = x + 2$ est une **égalité** On peut donc appliquer les règles écrites en I.2.
Alors $2x + 1 - 1 = x + 2 - 1$, puis enfin $x = 1$.
De ce raisonnement il résulte que si x est solution alors $x = 1$. On peut alors conclure : Le nombre 1 est l'unique solution de l'équation $2x + 1 = x + 2$. On a bien résolu l'équation donnée.

2. Exemple 2 : *Résoudre, dans* **R**, *l'équation* $(x-3)^2+(x^2-9)^2=0$.
Le premier membre est une somme de carrés, donc de nombres positifs. Il est donc égal à zéro si et seulement si les deux termes sont simultanément nuls, c'est-à-dire si et seulement si $x=3$.
Il y a une solution et une seule : 3.

3. Exemple 3 : *Résoudre, dans* **R**, *l'équation* $x^2(x-3)=-5(x-3)$.
Lorsque $x=3$, nous avons l'égalité $0=0$. Le nombre 3 est donc solution.
Est-ce le seul ?
Lorsque $x \neq 3$, l'égalité des deux membres exigerait $x^2=-5$, ce qui est impossible.
Il y a donc une solution et une seule : 3.
(Remarque : autre méthode de résolution cf exemple 5 § IV.)

4. Remarque générale :
En présence d'une équation à résoudre il y a lieu de s'interroger d'abord sur l'existence de solutions numériques simples.
Ainsi peut-on trouver des solutions, quitte à chercher ensuite si ce sont les seules.

II.3. Équations : Résolution par « analyse et synthèse »

1. Exemple 1 : *Résoudre, dans* **R**, *l'équation* $2x+8=4x+13$.
Dans l'exemple 1 du paragraphe II nous avons deviné une solution. Mais ici ?
Nous allons procéder dans « l'ordre inverse » en éliminant d'abord des nombres qui ne peuvent être solutions… Subsisteront éventuellement quelques valeurs sur lesquelles nous nous interrogerons :

a) *Supposons que l'équation* $2x+8=4x+13$ *admette au moins une solution. Je désigne par x une solution de l'équation. Alors* $2x+8=4x+13$ *est une égalité*. On peut donc appliquer les règles écrites en I.2. De fil en aiguille on aboutit à $x=-\frac{5}{2}$.

De ce raisonnement il résulte que si x est solution alors $x=-\frac{5}{2}$.

Pour le premier exemple de cette méthode insistons sur la conclusion de ce a).

S'il existe une solution de l'équation initiale, il est nécessaire qu'elle soit $-\frac{5}{2}$. Aucun autre nombre ne peut donc convenir.
Mais on ne sait pas si la condition nécessaire est aussi suffisante. Tout au plus sait-on que notre seule chance d'avoir une solution est que $-\frac{5}{2}$ le soit. Interrogeons-nous donc au sujet de $-\frac{5}{2}$.

b) pour $x=-\frac{5}{2}$, $2x+8=\ldots=3$, $4x+13=\ldots=3$.

Donc $-\frac{5}{2}$ est solution de l'équation $2x+8=4x+13$.

c) *Conclusion* : L'équation $2x + 8 = 4x + 13$ admet une solution (d'après b)) et une seule (d'après a)) : $-\dfrac{5}{2}$.

N.B. On dit que l'on a résolu cette équation par **analyse** (a) et **synthèse** (b).

2. Exemple 2 : *Résoudre, dans* **R**, *l'équation* $x^2 + x + 1 = 0$.
Procédons comme précédemment :
a) Supposons que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ admette au moins une solution.
Je désigne par x …
$x^2 + x + 1 = 0$.
Donc $x(x^2 + x + 1) = 0$ et $x^2 + x = -1$.
Soit $x^3 + x^2 + x = 0$ et $x^2 + x = -1$.
Donc, en conjuguant les deux égalités, $x^3 - 1 = 0$, et par conséquent $x^3 = 1$ et $x = 1$.
Il en résulte que, si x est une solution de l'équation, alors $x = 1$.
b) Pour $x = 1$, $x^2 + x + 1 \neq 0$. Donc 1 n'est pas solution.
c) Conclusion : L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans **R**.

3. Exemple 3 : *Résoudre dans* **R** *l'équation* $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$.
La démarche précédente conduit aux résultats suivants :

a) Si cette équation admet une solution, ce ne peut être que 0 ou $\dfrac{16}{3}$.

(On a élevé au carré les deux membres de l'égalité « construite »).
b) Interrogeons-nous pour les deux seules valeurs possibles :

Transformeront-elles $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$ en une égalité?
– Pour $x = 0$, les deux membres valent respectivement 4 et –4. Il n'y a pas égalité.
– Pour $x = \dfrac{16}{3}$, les deux membres sont égaux à $\dfrac{20}{3}$.

c) Conclusion. L'équation $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$ admet, dans **R**, une solution et une seule : $\dfrac{16}{3}$.

II.4. Équations : résolution par équivalences

II.4.1. Définition 3

On dit que deux équations (à résoudre dans un ensemble E*) sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes solutions (dans* E*) (avec le même ordre de multiplicité*(1)*).*

(1) Ainsi l'intersection de la parabole P d'équation $y = x^2$ et de la droite Δ d'équation $y = 6x - 9$ conduit à $(x - 3)^2 = 0$, la racine « double » $x = 3$ traduisant le fait que Δ et P sont tangentes, ce que ne ferait pas $x - 3 = 0$.

II.4.2. Propriétés

Des règles sur les égalités énoncées en I.2, on déduit que l'on obtient une équation équivalente à une équation donnée :
– en ajoutant à chaque membre un même nombre ou une même expression algébrique(2) ;
– en multipliant chaque membre par un même nombre non nul ou une même expression algébrique en écartant la ou les valeurs qui annulent celle-ci(3).

II.4.3. Quelques résolutions

1. Exemple : *Résoudre dans* **R** *l'équation* $2x + 8 = 4x + 13$.
Les équations suivantes sont équivalentes à l'équation donnée :

$2x - 4x = 13 - 8$; $-2x = 5$; $x = -\dfrac{5}{2}$.

Conclusion : L'équation $2x + 8 = 4x + 13$ admet une solution unique : $-\dfrac{5}{2}$.

N.B. On dit qu'on a résolu cette équation par équivalences.

2. Reprenons l'exemple 2 du paragraphe II.
On obtient $x^3 - 1$ en multipliant $x^2 + x + 1$ par $x - 1$ qui n'est pas nul sur $\mathbf{R} - \{1\}$.
• Sur $\mathbf{R} - \{1\}$, les deux équations $x^2 + x + 1 = 0$ et $x^3 - 1 = 0$ sont donc équivalentes. Or $x^3 - 1 = 0$ n'y a pas de solution. Donc $x^2 + x + 1 = 0$ non plus.
• Lorsque $x = 1$, $x^3 - 1$ est égal à 0, mais $x^2 + x + 1 \neq 0$.
• Conclusion : l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet pas de solution dans **R**.

3. Et l'exemple 3 du paragraphe III ?
On sait que si $a = b$ alors $a^2 = b^2$, mais la réciproque n'est vraie que si a et b ont le même signe.

L'équation $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$ ne peut avoir de solution que sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, c'est-à-dire pour les valeurs de x telles que $2x - 4 \geq 0$. (Sinon il ne peut y avoir égalité.)

Résoudre dans **R** l'équation $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$ c'est donc résoudre dans $[2 ; +\infty[$ l'équation $x^2 + 16 = (2x - 4)^2$.
Les équations suivantes lui sont alors équivalentes :
$x^2 + 16 = 4x^2 - 16x + 16$; $3x^2 - 16x = 0$; $x(3x - 16) = 0$.

Cette dernière équation a une unique solution dans $[2 ; +\infty[$: $\dfrac{16}{3}$.

Conclusion : l'équation $\sqrt{x^2+16} = 2x - 4$ a une unique solution dans **R** : $\dfrac{16}{3}$.

(2) Pourvu qu'elle soit définie pour les mêmes valeurs que $f(x)$ et $g(x)$ dans l'ensemble E.
(3) Pour de telles valeurs, il faudra voir « ce qui se passe ».

4. Exemple 4 : *Résoudre dans* **R** $-\{2\ ;\ 3\}$ *l'équation* $\dfrac{4x+7}{x-3}=\dfrac{12x-1}{3x-6}$.

Pour x différent de 2 et 3, les équations suivantes sont équivalentes à l'équation donnée:

$(4x+7)(3x+6)=(12x-1)(x-3)\ ;\ \ldots\ ;\ 34x=45\ ;\ \ x=\dfrac{45}{34}$.

Conclusion : L'équation donnée a une unique solution : $\dfrac{45}{34}$.

5. Exemple 5 : Reprenons l'exemple 3 du paragraphe II : Résoudre, dans **R**, l'équation $x^2(x-3)=-5(x-3)$.
Cette équation est équivalente à l'équation $(x-3)(x^2+5)=0$, qui, dans **R**, a une seule solution : 3.

II.5. Remarques

II.5.1. Notion d'égalité

On pourrait considérer « $a=b$ » comme une égalité *quels que soient les nombres a et b*. On dirait alors que « $a=b$ » est une égalité vraie si et seulement si a et b désignent le même objet, fausse dans le cas contraire. Cela reviendrait à considérer « $a=b$ » comme une proposition (énoncé d'un jugement à coup sûr soit vrai, soit faux).
Au niveau de l'enseignement secondaire, cette conception de l'égalité n'irait-elle pas compliquer le langage et, surtout, contribuer à confondre égalité et équation ? C'est à craindre fortement.
Le mot « *équation* » figure dans divers contextes : « *résoudre une équation* », « *équation d'une droite* », pour citer les plus courants. Dans chaque cas, il s'agit de définir l'expression dans sa globalité, ce que nous avons fait pour « *résoudre une équation* ».

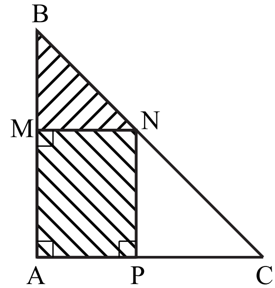
II.5.2. À propos des deux méthodes générales de résolution d'équations

On pourra comparer ces deux méthodes : résolution par analyse et synthèse (paragraphe Ill) et résolution par équivalences (paragraphe IV) en examinant chaque exemple traité ici ... et bien d'autres.
On notera les différences de raisonnement, celles des calculs à entreprendre.
Relevons notamment que, dans les deux méthodes, le raisonnement n'exige aucune « *vérification* ». Insistons : la synthèse n'est pas une « *vérification* » puisqu'on ne peut présumer en rien que la (ou les) condition(s) nécessaire(s) mise(s) en évidence par l'analyse (partie a) seront suffisantes.
Si « vérification » il y a pour l'une ou l'autre méthode, elle ne concerne que les calculs. (Encore faut-il que les calculs numériques de la vérification ne soient pas plus compliqués que les calculs algébriques de la résolution).

II.6. Équations et problèmes (en complément du paragraphe 1)

Énoncé issu d'un manuel de troisième :

Les côtés de l'angle droit du triangle rectangle ont une longueur de 3 cm. Déterminer pour quelles positions du point M *l'aire de la surface* BMN *est égale :*
a) à l'aire de la surface AMNP,
b) à la moitié de l'aire de la surface AMNP,
c) au double de l'aire de la surface AMNP.



Solution possible :
La position du point M se repère à l'aide de la longueur AM. On pose AM = x.
x peut prendre des valeurs comprises entre 0 et 3.
L'aire de la surface AMNP a pour expression algébrique $(3 - x)x$.

L'aire de la surface BMN a pour expression algébrique $\frac{1}{2}(3-x)^2$.

Dans chaque cas, le nombre x est donc solution de l'équation :

$\frac{1}{2}(3-x)^2 = (3-x)x$ dans le cas a),

$\frac{1}{2}(3-x)^2 = \frac{1}{2}(3-x)x$ dans le cas b),

$\frac{1}{2}(3-x)^2 = 2(3-x)x$ dans le cas c).

La résolution de chacune de ces équations sur l'intervalle]0 ; 3[permet de répondre au problème posé.

N.B. *A priori* on ne sait pas si le problème est possible dans chacun des cas a), b), c), c'est à dire si dans chacun de ces cas il existe un point M qui répond à la question. Ceci justifie le recours aux équations pour traiter ce problème. Les égalités ne suffisent plus ici alors qu'elles suffisaient pour résoudre le problème posé en 1.3.

Autre remarque.
Dans ce problème on peut éviter l'introduction de « l'inconnue » x. Les conditions a), b), c) s'écrivent en effet respectivement :
MN × MB = MN × MA,
MN × MB = 2 MN × MA,
MN × MB = 4 MN × MA.
Dans la mesure où l'on ne sait pas s'il existe des points M satisfaisants, il s'agit toujours là d'équations … « d'inconnue M ». Toutes trois admettent la solution MN égale à zéro, c'est à dire M confondu avec B. Pour MN ≠ 0, les trois équations se simplifient respectivement en :
MB = MA (i.e. M milieu de [AB]),
MB = 2 MA (i.e. M « aux deux tiers » de [BA] à partir de B),
MB = 4 MA (i.e. M « aux quatre cinquièmes » de [BA] à partir de B).

III. Une « conclusion générale » ?

On peut regretter que bon nombre d'élèves ne sachent résoudre une équation que de façon mécanique sans comprendre ce qu'est une *solution d'équation*.

On aurait peut-être intérêt, comme le suggère le programme, à n'introduire les équations qu'après un long travail de maniement et d'application des égalités et à propos de problèmes dont la résolution nécessite leur utilisation. Sans doute serait-il également opportun d'exhiber très vite des exemples d'équations *justifiant les précautions prises dans le déroulement des résolutions*, faute de quoi ces précautions risquent d'apparaître superfétatoires. Cet objectif atteint, on ne s'attardera pas, au Collège, sur de tels exemples.

Comme pour bien d'autres notions ou concepts, l'expérience montre, d'ailleurs, que l'apprentissage précoce d'une technique ne facilite pas forcément la compréhension, souvent bien au contraire : il laisse trop à penser que celle-là dispense de celle-ci…