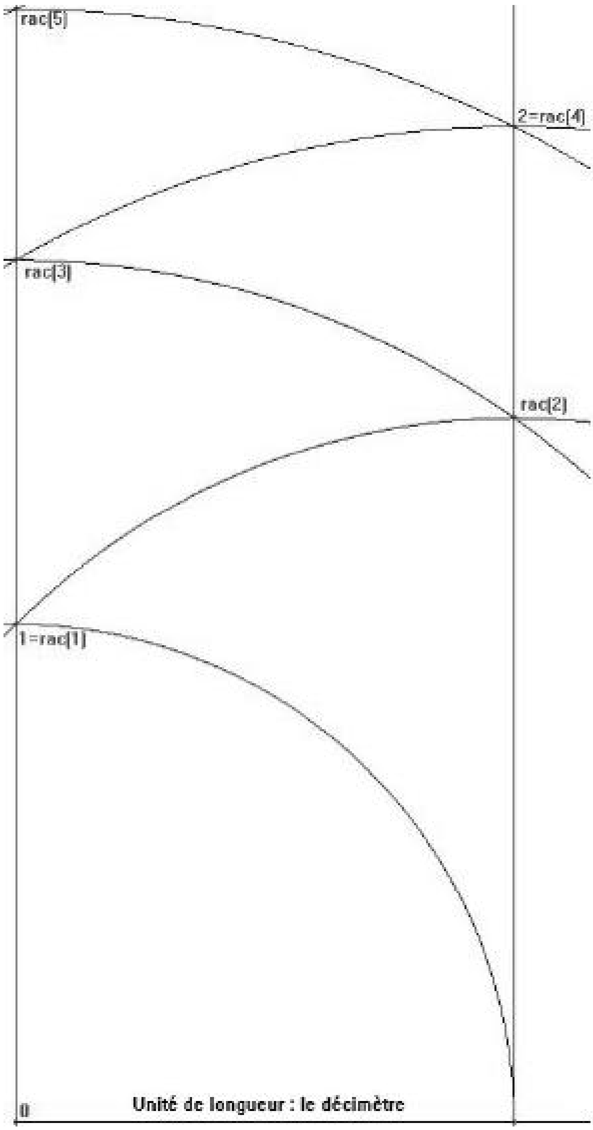
En mettant des segments bout à bout

François Pluvinage(*)

Question préliminaire : Décrire la construction de la figure ci-dessous. Justifier les valeurs indiquées.



N.B. Pour des raisons de mise en page, la figure a été réduite d'un tiers.

(*) IREM de Strasbourg.

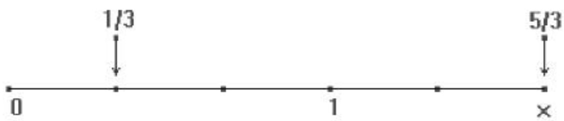
Introduction : L'article présenté ici rassemble des réflexions sur la géométrie de dimension 1, telle qu'elle se trouvait déjà envisagée dans les Éléments d'Euclide. Si l'on veut donner du sens à tous les nombres, on ne peut certes pas se réduire à ne considérer que la dimension 1. Par exemple, le nombre $\sqrt{2}$ *représente la diagonale du carré de côté 1. C'est pourquoi une construction générale des racines carrées d'entiers a été présentée en question préliminaire, pour qu'ensuite n'intervienne plus que la géométrie de dimension 1, celle des segments mis bout à bout. Dans un fascicule récemment publié par l'IREM de Strasbourg. et intitulé « Ressources pour l'enseignement mathématique en série littéraire », on trouve les éléments de cet article répartis en fonction des thèmes abordés et accompagnés d'études sur les constructions géométriques dans le plan et de programmes pour calculatrice et tableur.*

1. L'emploi d'une unité de longueur, est-ce si bête que ça ?

Une unité de longueur étant choisie, de manière plus ou moins arbitraire (pied d'un héros ou pouce d'un monarque, étalon de platine iridié construit en référence au méridien terrestre, nombre donné de longueurs d'onde d'une radiation fixée, etc.), la pratique ancestrale encore valable pour mesurer des longueurs consiste à matérialiser cette unité et à effectuer des reports. On a procédé ainsi aussi bien pour des mesures courantes grossières, grâce à des ressources corporelles (comme le décompte de pas ou l'utilisation de l'empan, distance entre les extrémités du pouce et du petit doigt d'une main ouverte) que pour des mesures fines, par exemple destinées à préciser les dimensions et la forme de la terre. Pour ce dernier objectif, il faut d'ailleurs associer longueurs et angles, ce que nous n'envisagerons pas ici, puisque nous nous limitons à la géométrie des segments.

L'emploi de règles graduées ou de système d'axes s'est imposé de nos jours, au point de nous faire oublier qu'une valeur fractionnaire de longueur peut se repérer de deux façons différentes : par l'abscisse d'un point ou par la commensuration de segments, c'est à dire la recherche d'une *commune mesure*. L'exemple suivant illustre ainsi deux visions de 5/3.

Exemple : deux représentations d'une fraction, abscisse sur un axe et commensuration.



Abscisse : x = 5/3.

Commensuration : 3S = 5U.

Commentaires : Pour placer l'abscisse $x = 5/3$, on a commencé par subdiviser en trois le segment [0, 1] (ce qui a conduit au point d'abscisse 1/3), puis on a considéré cinq reports de ce tiers. Pour les segments S et U (que l'on se permet ici de confondre avec leur longueur), on a effectué des reports et l'on obtient $S = \frac{5}{3}U$ lorsque des reports de S et de U conduisent à la coïncidence 3S = 5U ; on est alors assuré qu'il existe une même unité (dont U est le triple et S le quintuple) *mesurant* à la fois S et U, d'où le nom de *commensuration*.

Reports d'une unité de longueur. Examinons à présent la situation des reports d'une unité U pour mesurer une longueur donnée S sans pouvoir effectuer de reports de cette longueur S elle-même. La pratique impose souvent une telle contrainte ; elle s'imposait par exemple à Ératosthène (3e siècle av. J.-C.) pour la mesure de distance entre Alexandrie et Syène (aujourd'hui Assouan) qui lui avait permis d'évaluer la longueur du méridien terrestre[1]. Pour mesurer une longueur par reports à l'aide d'une unité matérialisée, il n'y a aucun problème lorsque l'on tombe juste. Si je dispose par exemple d'une perche de quatre mètres et que j'obtienne une distance en exactement 12 reports de cette perche, c'est que cette distance est de quarante-huit mètres. Mais une telle coïncidence n'est nullement la situation générale. La situation générale correspond à la possibilité d'effectuer un certain nombre de reports et de tomber alors sur une longueur restante plus petite que l'unité utilisée. Il convient dans un tel cas de déterminer quelle fraction de l'unité de longueur ce reste représente.

Ce sont les mathématiciens grecs qui ont procédé à l'étude théorique d'une telle situation. Se demander quelle fraction de l'unité un reste peut valoir, c'est se demander combien de fois il peut tenir dans l'unité. Par exemple, si quatre reports du reste conduisent exactement à la longueur unité, c'est que ce reste vaut 1/4 de l'unité.

Exercice 1 : Opérer comme il vient d'être indiqué, pour les segments représentés ci-après.
Segment S à mesurer : ____
Segment U représentant l'unité de longueur choisie : ____________
Quelle longueur a S en fonction de U ?

[***Indication*** : Les segments tracés ici résultent forcément de nombres entiers de pression d'une touche du clavier, celle du trait de soulignement…]

Dans le cas général, le reste permettra-t-il à son tour d'atteindre exactement l'unité par une succession de reports ? Ce n'est pas davantage acquis que le fait d'atteindre exactement une distance donnée par une succession de reports de l'unité. Est-on alors dans une impasse ? L'idée des reports du reste constitue cependant une avancée intéressante, car si ces reports produisent à leur tour un reste, on peut envisager de reproduire cette même démarche pour ce nouveau reste, qui est forcément plus petit que le premier. Considérons un nouvel exemple, avant d'envisager la situation générale.

(1) NDLR : cr. présent Bulletin, page 299.

Exercice 2 : Supposons que pour mesurer un segment S donné, en se référant à une unité U, on ait pu faire six reports successifs de U et qu'il reste alors un segment R_1 plus petit que U. Supposons que ce reste R_1 puisse être reporté trois fois dans U et qu'il reste alors un segment R_2, plus petit que R_1. Supposons enfin que R_2 puisse se reporter exactement cinq fois dans R_1. Quelle longueur aura S en fonction de U ?

[***Réponse*** : Par commodité, confondons les désignations des segments et de leurs longueurs. La première hypothèse permet d'écrire $S = 6U + R_1$, avec $R_1 < U$. La seconde hypothèse, $U = 3\,R_1 + R_2$, avec $R_2 < R_1$. Enfin la troisième hypothèse s'écrit $R_1 = 5\,R_2$.

Ainsi $R_2 = \frac{1}{5}R_1$. On en déduit, par report dans la deuxième égalité, que $U = \left(3 + \frac{1}{5}\right)R_1$, d'où $R_1 = \dfrac{1}{3+\frac{1}{5}}U$. Par report dans la première, il en résulte finalement que $S = \left(6 + \dfrac{1}{3+\frac{1}{5}}\right)U$. Certes, on peut simplifier sous forme d'une unique fraction : $S = \dfrac{101}{16}U$, mais on peut en rester à l'écriture précédente, qui a l'avantage de mettre les données en évidence.]

2. Théorie et pratique de l'anthyphérèse

Les Grecs voyaient les reports successifs d'un segment unité dans un autre, celui à mesurer, comme autant de soustractions : on peut en effet considérer que l'on retranche au segment à mesurer des morceaux successifs de longueurs toutes égales à celle du segment unité. À son tour, le reste obtenu, s'il n'est pas nul, conduit à de telles soustractions. Et ainsi de suite. Un verbe grec : ανθυφαιρεω (anthyphéréo, ôter à son tour), désigne précisément une telle suite d'opérations. D'où le nom d'anthyphérèse que l'on donne à l'algorithme que nous avons vu, consistant à effectuer des reports d'un segment dans un second jusqu'à aboutir à un reste, plus petit que le premier segment, que l'on reporte à son tour dans le premier segment jusqu'à aboutir de nouveau à un reste, et ainsi de suite.

Reprenons les notations déjà introduites : U le segment unité, S le segment (ou sa longueur) à mesurer, R_1, R_2, etc. les restes successifs obtenus. Supposons que l'on aboutisse à un reste nul au bout de $(n + 1)$ étapes de l'algorithme. Nous pouvons alors écrire la suite d'expressions :

$$\begin{aligned}
&S = a_0 U + R_1, \text{ avec } R_1 < U,\\
&U = a_1 R_1 + R_2, \text{ avec } R_2 < R_1,\\
&R_1 = a_2 R_2 + R_3, \text{ avec } R_3 < R_2,\\
&\ldots\\
&R_{n-2} = a_{n-1} R_{n-1} + R_n, \text{ avec } R_n < R_{n-1},\\
&R_{n-1} = a_n R_n.
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, les a_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) désignent les nombres entiers de reports qu'il est possible d'effectuer aux diverses étapes de l'algorithme. Les inégalités entre les restes permettent d'affirmer que tous ces entiers a_i sont strictement positifs sauf peut-être a_0, qui est égal à 0 si S est plus petit que l'unité U. Le résultat final obtenu dans ces conditions est :

$$S = \left(a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}} \right) U.$$

Pour démontrer ce résultat, on « remonte » les égalités de l'algorithme depuis la dernière, qui permet d'exprimer R_n en fonction de R_{n-1} et ainsi d'éliminer R_n de l'avant-dernière, etc. Faut-il aller jusque là avec des élèves littéraires ou s'en tenir à des exemples représentatifs, comme celui qui apparaît dans l'exercice 2 précédemment envisagé ?

Signalons que la suite d'expressions (incluant les inégalités) peut même être exploitée pour un cadrage (voir § 4). Il vaut la peine de signaler que l'anthyphérèse et l'algorithme d'Euclide ne diffèrent que par les objets traités : segments pour l'une, entiers pour l'autre.

3. Une interrogation pour le mathématicien : la commensuration

Dans l'anthyphérèse (comme dans l'algorithme d'Euclide), les restes qui apparaissent successivement sont de plus en plus petits. Une question naturelle est alors de savoir si, à partir de segments quelconques S et U, on atteindra forcément un reste nul comme c'est le cas dans l'algorithme d'Euclide ou si, au contraire, il n'y a pas d'objection théorique à ce que l'anthyphérèse se poursuive indéfiniment.

Un cas particulier fondamental

Représentons les segments U et S sur une même demi-droite d'origine A, par les deux segments respectifs [AB] et [AC].

Pour l'anthyphérèse, nous avons à reporter [AB] dans [AC]. Supposons, comme c'est le cas sur la figure, qu'il n'y ait pas la possibilité d'effectuer plusieurs reports, c'est à dire que BC < AB < AC. Ainsi, le segment [BC] apparaît comme le premier reste.

S'il se trouve alors que [BC] soit à [AB] comme [AB] est à [AC], c'est à dire $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$, nous sommes sûrs que l'algorithme se répétera à l'identique indéfiniment : les termes a_i de l'anthyphérèse seront alors tous égaux à 1, *ad infinitum*.

Or cette disposition existe bel et bien. Une situation de géométrie plane permet de la faire apparaître (pour information, il s'agit d'un carré inscrit dans la surface limitée par un demi-cercle et son diamètre). Ici nous procédons à l'étude analytique sur la droite : on prend le point A comme origine, on affecte au point B l'abscisse 1 et au point C une abscisse x à déterminer. La condition qui a été exprimée sur les rapports s'écrit :

$$x-1=\frac{1}{x}\text{, avec } x>1.$$

En simplifiant l'égalité, on obtient :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

ou encore :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0.$$

Les solutions de cette dernière équation sont ainsi :

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme la seconde ne vérifie pas l'inégalité $x > 1$, la première solution est la seule qui convient. Les propriétés de ce nombre sont telles qu'on lui a même attribué un nom, celui de « *nombre d'or* » ; on utilise souvent la notation φ pour le désigner :

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice. Trois points d'une droite graduée sont définis par leur abscisse : A(0), B(1) et C($1+\sqrt{2}$). (La figure illustre approximativement la situation des points A, B et C.)

Déterminer ce que fournit l'anthyphérèse pour U = [AB] et S = [AC].

[***Réponse*** : Après deux reports de [AB], on obtient un reste qui a pour longueur $\sqrt{2}-1<1$. Et de l'identité $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=2-1=1$, il résulte que $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.
Autrement dit, le rapport du reste à l'unité U est égal au rapport de U à S. Par conséquent, l'anthyphérèse produit ici une suite illimitée de termes tous égaux à 1. En particulier, les deux segments considérés sont incommensurables. On notera au passage que nous avons là une démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de 2].

Remarque **:** La question préliminaire justifie le placement sur la droite graduée des racines carrées et par conséquent des nombres qui en résultent par des opérations arithmétiques.

Conclusion **:** Il est ainsi apparu aux mathématiciens grecs que, pour une paire de segments, l'anthyphérèse peut conduire à deux types de situations.

- Soit l'algorithme aboutit à un reste nul et on dit alors que les segments sont *commensurables*. Cette désignation vient de ce que les deux segments considérés sont dans ce cas deux multiples entiers d'un même segment, comme cela a été indiqué dans l'exemple de la représentation de $\frac{5}{3}$, et ce segment les *mesure* donc tous deux.
- Soit l'anthyphérèse se poursuit indéfiniment et on dit alors que les segments sont *incommensurables*. Les situations de répétition indéfinie des mêmes termes (périodicité, dont le cas particulier et l'exercice ont fourni deux exemples simples) sont des situations d'incommensurabilité, mais ce ne sont pas les seules. Par exemple, l'anthyphérèse d'un segment de longueur π par rapport à l'unité conduit à une suite de termes dépourvue de toute régularité. Mais cela, les mathématiciens grecs ne le savaient pas encore ; il a fallu attendre d'abord l'année 1761 pour que J.-H. Lambert établisse l'irrationalité de π, autrement dit l'incommensurabilité de la circonférence et du diamètre d'un cercle (l'anthyphérèse se poursuit donc indéfiniment), puis 1882 pour que A. Lindemann prouve la transcendance de π (ainsi π, n'étant solution d'aucune équation algébrique, n'est en particulier pas solution d'une équation du second degré et il n'y a donc pas périodicité des termes successifs obtenus par anthyphérèse ; de plus, ce résultat établit l'impossibilité de la quadrature du cercle).

Sujets de réflexion : Ces études ont dégagé des notions tout à fait particulières aux mathématiques. C'est ainsi le cas pour la commensurabilité de segments : quelle que soit la précision d'une réalisation, cela ne peut pas avoir de sens que de se demander si des segments matérialisés sont commensurables. C'est aussi le cas pour l'infini rencontré ici ; cet infini « achevé » est propre aux mathématiques et se distingue par exemple de celui de la philosophie.

Pour enrichir sa culture. Une *Librairie des Terres Australes et Boréales* se trouve sur le site web de l'association Amicale des Missions Australes et Polaires Françaises (AMAPOF) http://www.amapof.com. Dans la sélection des ouvrages indiquée par cette Librairie se trouvent notamment deux livres, ainsi introduits :

« Entre Newton et Descartes, le Siècle des Lumières voulut choisir. Newton, c'était la gravitation universelle et aussi des principes qui prétendaient que la Terre était aplatie aux pôles et renflée à l'équateur, une Terre en forme de mandarine… Mais Newton était anglais, donc un tantinet hérétique et contradicteur de surcroît des idées de notre Descartes national. Il fut donc décidé de mesurer qui avait raison du physicien anglican ou du mathématicien catholique. Pour une autre raison aussi : le commerce et la guerre réclamaient que les marins disposent de cartes exactes. Deux expéditions quittèrent donc la France pour mesurer la longueur d'arc de méridien. L'une en 1735 vers le Pérou pour atteindre l'équateur (Gouin, La Condamine, Bouguer). L'autre en 1736 pour la Laponie (Maupertuis) pour réaliser la même opération près du cercle polaire. »

La première expédition est relatée dans l'ouvrage de Florence TRYSTRAM, *Le Procès des Étoiles*, Petite Bibliothèque PAYOT, réédition 1993, et la seconde dans celui de l'abbé OUTHIERS, présenté par A. Balland, *La Terre Mandarine (Journal d'un voyage au Nord pour déterminer la figure de la Terre)*, SEUIL, 1994.

Le livre de Florence Trystram expose en détails comment on procédait pour mesurer des longueurs avec précision, simplement avec des perches mises bout à bout, mais chacune parfaitement dirigée nord-sud et calée pour être horizontale. Relevons que sur une rivière gelée de Laponie coulant nord-sud, cela fut plus simple qu'au travers de la cordillère des Andes.

Rappelons que la mise en place du système métrique, mondialement répandu aujourd'hui (à l'exception près d'irréductibles attardés, tels les habitants des USA, alors que le dollar a pourtant joué dans le monde un rôle pilote en tant que monnaie décimale), a bénéficié de tous ces travaux. Une lecture instructive pour un éclairage d'ensemble est celle du livre de Denis GUEDJ, *Le Mètre du Monde*, SEUIL, 2000, consacré à l'instauration du système métrique, avec toutes les opérations qu'elle supposait.

4. Cadrages par des réduites.

Sachant que a_0 est la partie entière d'un nombre, on peut situer ce nombre dans l'intervalle $[a_0, a_0 + 1[$. De même, sachant qu'un nombre S donne lieu aux valeurs a_0 et a_1 lors des deux premières étapes d'une anthyphérèse, on peut situer S dans l'intervalle :

$$\left]a_0 + \frac{1}{a_1+1}, a_0 + \frac{1}{a_1}\right].$$

Considérons en effet les étapes d'anthyphérèse pour S et l'unité U :

$$\mathrm{S} = a_0\mathrm{U} + \mathrm{R}_1, \text{ avec } \mathrm{R}_1 < \mathrm{U},$$
$$\mathrm{U} = a_1\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2, \text{ avec } \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}_1.$$

Pour R_2, les valeurs extrêmes sont :

• $R_2 = 0$ (minimum qu'il est possible d'atteindre), qui conduit à $\mathrm{R}_1 = \frac{1}{a_1}\mathrm{U}$ et donc :

$$\mathrm{S} = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

• $R_2 = R_1$ (maximum non atteint), qui conduit à $\mathrm{R}_1 = \frac{1}{a_1+1}\mathrm{U}$ et donc :

$$\mathrm{S} = a_0 + \frac{1}{a_1+1}.$$

On en déduit l'intervalle précédemment indiqué. Remarquons que par rapport au premier intervalle, l'incertitude sur S est réduite dans un facteur au moins égal à 2, puisque $a_1 \geq 1$.

On généralise de même pour un nombre quelconque d'étapes d'anthyphérèse. On obtient alors, selon que l'on s'est arrêté après un nombre pair ou impair d'étapes, l'un des encadrements suivants :

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{a_{2p}}}}\leq S<a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{a_{2p}+1}}}$$

ou

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{a_{2p+1}+1}}}<S\leq a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{a_{2p+1}}}}.$$

Ces résultats simples d'encadrement sont fondamentaux pour les études d'approximation d'un nombre S par les réduites successives de son développement en fraction continue. Ils conduisent par exemple à voir que les réduites sont successivement inférieures ou égales, puis supérieures ou égales au « nombre cible » S. Et, bien entendu, ils conduisent aussi aux résultats de convergence (rapide) des réduites vers le « nombre cible ».

Exercice d'application : On indique (le lecteur peut procéder à une vérification avec calculatrice ou ordinateur) que l'anthyphérèse de la racine carrée du nombre 53 par rapport à l'unité conduit aux termes successifs 7, 3, 1, 1, 3, 14 et qu'à partir de là on voit se répéter la période 3, 1, 1, 3, 14. Dans ces conditions, quelle est l'incertitude sur $S = \sqrt{53}$ lorsque l'on en prend la valeur approchée 7,28 ?

Indications : Noter que 7,28 = 728/100 = 182/25. Remarquer que l'anthyphérèse de cette fraction par rapport à l'unité, qui coïncide avec l'algorithme d'Euclide effectué pour les entiers 182 et 25, conduit aux mêmes premiers termes 7, 3, 1, 1, 3 obtenus pour $\sqrt{53}$ et s'achève alors sur un reste nul.

[***Réponse :*** 7,28 = 182/25 ≤ $\sqrt{53}$ < 233/32 = 7,28125. L'incertitude est donc nettement moindre que si 7,28 apparaissait comme une approximation décimale, ce qui conduirait à 7,28 ≤ $\sqrt{53}$ < 7,29.]