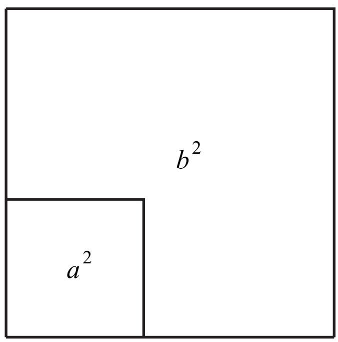
Étude de la variation de la fonction carré(*)

On sait que :
$f(x) = x^2$ est définie sur $]-\infty ; +\infty[$.
La fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}^+$ et décroissante sur $\mathbf{R}^-$. Démontrons-le géométriquement sur $\mathbf{R}^+$, et, en se ramenant à $\mathbf{R}^+$, sur $\mathbf{R}$.

1) Dans R+

Si $0 \leq a < b$,



Les aires des carrés de côtés a et b sont :
$\mathcal{A}$(carré de côté a) = a^2.
$\mathcal{A}$(carré de côté b) = b^2.
Le carré de côté a étant strictement inclus dans celui de côté b, on a : $0 \leq a^2 < b^2$.
L'inégalité n'a pas changé de sens. D'après la déflnition de la variation, la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$.

2) Dans R

Si $a < b \leq 0$,
on prend leurs opposés pour pouvoir appliquer le résultat de 1).
Alors $-a > -b \geq 0$.
On élève au carré : $(-a)^2 > (-b)^2 \geq 0$, d'après 1) (variation sur $\mathbf{R}^+$).
Donc $a^2 > b^2 \geq 0$, car $(-x)^2 = x^2$ (d'après la règle des signes).
Les inégalités de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes, elles ont donc changé. D'après la définition de la variation, la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbf{R}^-$.

(*) Transmise par notre collège J. Cahen, cette démonstration d'une élève de seconde nous a semblé remarquable par sa clarté, sa simplicité et son élégance.