Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.
Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »… si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes…
Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

Nouveaux énoncés

Énoncé nº 295 (Michel LAFOND, 21-Dijon)

Démontrer que le nombre de triangles inégaux de périmètre n à côtés entiers et non aplatis est égal au nombre de manières de payer $(n-3)$ euros avec des pièces de 2, 3 ou 4 euros.

Énoncé nº 296 (Raymond RAYNAUD, 04-Digne)

Les parallèles à une droite (d) menées par les sommets d'un triangle ABC recoupent respectivement son cercle circonscrit en A′, B′, C′. P étant un point quelconque du cercle, les droites (PA′), (PB′), (PC′) coupent respectivement les droites (BC), (CA) (AB) en A″, B″, C″. Démontrer que ces trois points sont alignés.

Solution des problèmes précédents

Énoncé nº 285 (Charles NOTARI, 31-Montaut)

a étant un réel strictement positif, on considère la suite :

$$u_n = a^n + \frac{1}{a^n}.$$

Montrer que, si cette suite prend deux valeurs entières consécutives u_k et u_{k+1}, tous les u_n sont entiers.

Solution

Cet énoncé, que Charles Notari m'a soumis en octobre 1998, figurait dans le livre de Denis Gerll et Georges Girard : *Les Olympiades internationales de mathématiques*

(Hachette 1976, réimprimé par Jacques Gabay en 1994). Mais il a fallu attendre l'ouvrage *Supermath* de Pierre Bornsztein (paru en novembre 1999 chez Vuibert, quelques semaines avant le bulletin 425 de l'APMEP contenant cet énoncé) pour en trouver une solution rédigée (p. 174, énoncé : al 34).

Tout d'abord, ma rédaction de l'énoncé pouvait induire en erreur : j'aurais dû dire « … prend consécutivement deux valeurs entières », car on ne suppose évidemment pas que u_k et u_{k+1} sont deux entiers consécutifs. Toutes mes excuses à Marie-Laure Chaillout. Charles Notari écrivait seulement : « montrer que si u_k et u_{k+1} sont entiers tous les u_n sont entiers », et l'énoncé publié dans l'ouvrage d'Olympiades : « démontrer que, si pour un entier k, u_k et u_{k+1} sont des entiers, alors pour tout entier n, u_n est un entier ». Par ailleurs, quitte à échanger a et $1/a$, on peut supposer $a > 1$.

En outre, la fonction $a^x + \dfrac{1}{a^x}$, qui rappelle la fonction cosinus hyperbolique, vérifie pour tout couple (n, m) :

$$u_{n+m} + u_{n-m} = u_n u_m.$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_n u_1 - u_{n-1}.$$

Dans la mesure où, quel que soit a, $u_0 = 2$ est entier, il suffit que u_1 soit entier pour en déduire par récurrence que tous les u_n sont entiers. Alain Pichereau signale que la relation

$$u_{n+1} = u_n u_1 - u_{n-1}$$

peut s'obtenir en remarquant que a et $1/a$ sont tous deux racines de $x^2 - u_1 x + 1$, donc de $x^{n+1} - u_1 x^n + x^{n-1}$.

Un peu rerédigée, la solution de Charles Notari est assez astucieuse. Si

$$u_k = a^k + \frac{1}{a^k} = p \text{ entier,}$$

et

$$u_{k+1} = a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = q \text{ entier,}$$

alors

$$a^k - \frac{1}{a^k} = \sqrt{p^2 - 4}$$

et

$$a^{k+1} - \frac{1}{a^{k+1}} = \sqrt{q^2 - 4}\ .$$

On a donc :

$$u_{2k+1} + u_1 = u_{k+1} u_k = pq$$

ainsi que :

$$u_{2k+1} - u_1 = \sqrt{(p^2-4)(q^2-4)}.$$

Or

$$a^k = \frac{p+\sqrt{p^2-4}}{2}$$

et

$$a^{k+1} = \frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2},$$

donc

$$a^{k(k+1)} = \left[\frac{p+\sqrt{p^2-4}}{2}\right]^{k+1} = \left[\frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}\right]^{k}.$$

En développant par la formule du binôme, on trouve des entiers A > 0, B > 0 et C tels que :

$$\mathrm{A}\sqrt{p^2-4} - \mathrm{B}\sqrt{q^2-4} = \mathrm{C},$$

soit, en élevant au carré :

$$2\mathrm{AB}\sqrt{(p^2-4)(q^2-4)} = \mathrm{D}\ \text{entier}.$$

$\sqrt{(p^2-4)(q^2-4)}$ est rationnel, donc entier, et il est manifestement de même parité que pq. D'où

$$u_1 = \frac{pq - \sqrt{(p^2-4)(q^2-4)}}{2}$$

est entier, ce qui achève la démonstration.

Mais j'ai reçu d'autres solutions, de Pierre BORNSZTEIN (95-Pontoise), Jean-Marc BRESLAW (97-St Denis de la Réunion), Alain CORRE (03-Moulins), Christian DUFIS (87-Limoges), Bernard MALFON (28-Marboue), René MANZONI (76-Le Havre), Moubinool OMARJEE (75-Paris), Alain PICHEREAU (16-St Yrieix), G. PRIGENT (93-Dugny), Pierre SAMUEL (92-Bourg la Reine), sans compter trois réponses erronées.

Une fois établi que $u_1 u_{2k+1} = p^2 + q^2 - 4$, donc que u_1 est solution d'un trinôme :

$$\mathrm{T}(x) = x^2 - pqx + (p^2 + q^2 - 4),$$

plusieurs stratégies sont utilisées. Par exemple, Christian Dufis et G. Prigent montrent par récurrence que si $u_1 = r_1 - s_1\sqrt{b}$ avec b entier, r_1 et s_1 rationnels strictement positifs ($r_1 > 2$), alors $u_n = r_n - s_n\sqrt{b}$, les suites de rationnels r_n et s_n étant strictement croissantes. Il n'est donc pas possible que u_k soit rationnel si b n'est pas un carré parfait. Bernard Malfon explicite les racines complexes de

$$Q_n(x) = x^{2n} - u_n x^n + 1,$$

montrant ainsi que si k et ℓ sont premiers entre eux, Q_k et Q_ℓ ont pour PGCD : $x - u_1$. Or l'algorithme d'Euclide prouve que si u_k et u_ℓ sont entiers, le PGCD de Q_k et Q_ℓ est à coefficients entiers. Pierre Bornsztein écrit que si u_k est entier, u_{nk} est entier pour tout n, d'où il déduit que non seulement $u_1 + u_{2k+1}$ et $u_1 \times u_{2k+1}$ sont entiers, mais $u_1 + u_{2k^2-1}$ et $u_1 \times u_{2k^2-1}$ sont eux aussi entiers : racine de deux trinômes unitaires $x^2 - Sx + P$ et $x^2 - S'x + P'$ distincts, u_1 ne peut être qu'entier. Jean-Marc Breslaw utilise le polynôme T_n, unitaire à coefficients entiers, tel que si $u_1 = x$, $u_n = T_n(x)$. Si u_n est entier, le reste de la division euclidienne de $T_n(x) - u_n$ par $T(x) = x^2 - pqx + (p^2 + q^2 - 4)$ étant du premier degré à coefficients entiers, x ne peut être que rationnel, donc entier car racine du trinôme unitaire $T(x)$.

Le passage de « rationnel » à « entier » jouait d'ailleurs un rôle important dans ce problème. On appelle entier algébrique toute racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, « unitaire » signifiant : dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1. La somme et le produit de deux entiers algébriques est un entier algébrique, les racines carrées, cubiques, … d'entiers algébriques sont des entiers algébriques, et tout entier algébrique appartenant à $\mathbf{Q}$ appartient à $\mathbf{Z}$: Pierre Bornsztein le démontre comme lemme, et G. Prigent démontre que si $\sqrt{n}$ est rationnel, $\sqrt{n}$ est entier. Très généralement, si $P(x)$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est x^n, pour tout rationnel irréductible $\frac{p}{q}$, $q^{n-1}P\left(\frac{p}{q}\right)$ est non entier, car p^n n'est pas divisible par q et tous les autres termes sont entiers, donc $P\left(\frac{p}{q}\right)$ est non nul. Tous les nombres intervenant dans le présent problème sont en fait des entiers algébriques, malgré le dénominateur 2 qui encombre de temps en temps : le nombre d'or $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est entier puisqu'il est racine de $x^2 - x - 1$.

Une bonne connaissance des corps quadratiques donnait à ce problème un aspect différent. Par une méthode voisine de celle de Charles Notari, René Manzoni obtient une égalité :

$$A\sqrt{p^2-4} + C = B\sqrt{q^2-4} + D.$$

« Sachant que les réels $\sqrt{p^2-4}$ et $\sqrt{q^2-4}$ ne peuvent être qu'irrationnels, il apparaît que : $C = D$ et $A\sqrt{p^2-4} = B\sqrt{q^2-4}$ », écrit-il. En fait, observent Alain

Corre et Pierre Samuel, $a^k = \dfrac{p+\sqrt{p^2-4}}{2}$ et $a^{k+1} = \dfrac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}$ appartiennent chacun à un corps quadratique $\mathbf{Q}\left(\sqrt{p^2-4}\right)$ et $\mathbf{Q}\left(\sqrt{q^2-4}\right)$, et $a^{k(k+1)}$ appartient à l'intersection de ces deux corps quadratiques, qui sont chacun un **Q**-espace vectoriel de dimension 2. Si ces corps sont distincts, leur intersection se limite à **Q**. Mais $a^{k(k+1)}$ ne peut pas être rationnel, donc ces deux corps quadratiques sont confondus : il existe b, u et v entiers tels que $\sqrt{p^2-4} = u\sqrt{b}$ et $\sqrt{q^2-4} = v\sqrt{b}$, d'où $\sqrt{(p^2-4)(q^2-4)} = uvb$ est un entier naturel. Pierre Samuel fait même appel au théorème des unités : $a^k = \dfrac{p+\sqrt{p^2-4}}{2}$ a pour inverse son conjugué : $\dfrac{1}{a^k} = \dfrac{p-\sqrt{p^2-4}}{2}$. C'est donc une unité du corps quadratique, et les unités d'un corps quadratique sont (au signe près) les puissances de la plus petite d'entre elles, U. Qui plus est, pour toute unité U^k, $\mathrm{U}^k + \mathrm{U}^{-k}$ est un entier naturel. Si a^n et $a^{n'}$ sont des unités d'un même corps quadratique $\mathbf{Q}\left(\sqrt{b}\right)$, alors $a^n = \mathrm{U}^j$ et $a^{n'} = \mathrm{U}^{j'}$: n et n' étant premiers entre eux, $nj' = n'j$ entraîne : $j = kn$ et $j' = kn'$, $a = \mathrm{U}^k$ est une unité, et $a + \dfrac{1}{a}$ est donc un entier naturel.

Énoncé n° 286 (Georges LION, 98-Nouméa, Nouvelle Calédonie)

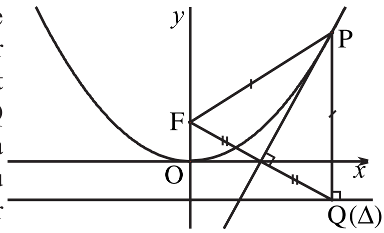
Soient H et F deux points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère $(\mathcal{H})$. Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F et dont la directrice passe par H. Soit A un point de $(\mathcal{H})$ d'où l'on peut mener deux tangentes à $(\mathcal{P})$, distinctes, non perpendiculaires et recoupant $(\mathcal{H})$ respectivement en deux points B et C, distincts de A. Montrer que (BC) est tangente à $(\mathcal{P})$.

Solution

Ce problème fait resurgir des propriétés des coniques que j'hésite à qualifier de « classiques » dans la mesure où elles ne sont plus guère enseignées en classe. Il a été repris par l'auteur dans son livre *Géométrie du plan, cours complet avec 600 exercices résolus*, paru chez Vuibert en février 2001 à l'intention des étudiants en Licence, maîtrise et préparation au CAPES : énoncé p. 150 (chap. 9 ex. 43), solution en quatre lignes p. 220.

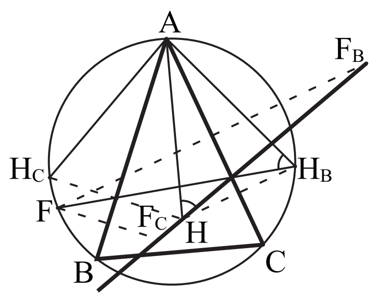
J'ai reçu des réponses de Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Christian DUFIS (87-Limoges), Guy HUVENT (59-Hem), René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut), Raymond

RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald) et André VIRICEL (54-Villers lès Nancy), qui s'appuient notamment sur quatre propriétés connues, mais que je vais détailler quelque peu en faisant comme si vous ne les connaissiez pas.



La première de ces propriétés, c'est que le symétrique du foyer F d'une parabole $(\mathcal{P})$ par rapport à l'une quelconque de ses tangentes est sur la directrice (Δ) de $(\mathcal{P})$. Plus précisément, si Q est la projection sur (Δ) d'un point P de $(\mathcal{P})$, la tangente en P à $(\mathcal{P})$ est l'axe de symétrie du triangle isocèle FPQ. C'est facile à prouver, par exemple à partir de l'équation $y = x^2$ de la parabole : F = (0, 1/4) et (Δ) a pour équation $y = -1/4$. Et c'est même une caractéristique des tangentes à la parabole : une droite (T) est tangente à une parabole si et seulement si le symétrique du foyer F par rapport à cette droite est sur la directrice (Δ) – si (T) n'était pas tangente et n'était pas perpendiculaire à (Δ), il existerait une tangente (T′) parallèle à (T) ; l'homothétie de centre F transformant (T) en (T′) transformerait le symétrique Q de F par rapport à (T) en Q′, symétrique de F par rapport à (T′) : ce serait Q′ et non Q qui appartiendrait à (Δ) –.

Or, seconde propriété, les symétriques d'un point F par rapport aux trois côtés d'un triangle ABC sont alignés sur une droite (Δ) si et seulement si F appartient au cercle (Γ) circonscrit à ABC : la droite (Δ) est alors appelée « droite de Steiner » de F, et elle passe par l'orthocentre H du triangle ABC. En effet, l'homothétie de centre H et de rapport 2, qui transforme le cercle d'Euler de ABC en son cercle circonscrit, transforme les pieds des hauteurs en les symétriques H_A, H_B, H_C de H par rapport à (BC), (CA), (AB) : ces trois points H_A, H_B et H_C appartiennent donc à (Γ). Appelons F_A, F_B, F_C les symétriques de F par rapport à (BC), (CA), (AB). Par symétrie par rapport à (AC), l'angle de droites (HF_B, HA), est opposé à (H_BF, H_BA) ; de même, $(HF_C, HA) = -(H_CF, H_CA)$. Si F est sur (Γ), les deux angles inscrits étant égaux, $(HF_B) = (HF_C)$: F_A, F_B et F_C sont bien alignés avec H. On a même, en prime :



$$(F_BF_C, HA) = -(H_BF, H_BA) = -(H_CF, H_CA) = (CA, CF).$$

Si maintenant F n'est pas sur le cercle circonscrit, les droites (FA), (FB) et (FC) recoupent le cercle circonscrit en P_A, P_B et P_C respectivement. L'homothétie h_A, de centre A et de rapport différent de 1, qui transforme F en P_A, transforme (F_BF_C) en une droite parallèle, ce qui permet d'écrire : $(F_BF_C, HA) = (CA, CP_A)$. De même, $(HB, F_CF_A) = (CP_B, CB)$. Or (HA, HB) = (CB, CA), car (HA) est perpendiculaire à (CB) et (HB) à (CA). Donc, en additionnant les angles de droites,

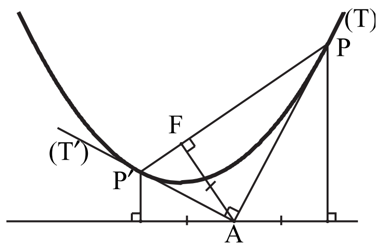
$$(F_BF_C, F_CF_A) = (CP_B, CP_A) = (P_CP_B, P_CP_A).$$

Il en résulte que non seulement les trois points F_A, F_B et F_C ne sont pas alignés, mais

– en permutant A, B, C dans le raisonnement ci-dessus – le triangle $F_AF_BF_C$ est semblable au triangle $P_AP_BP_C$. Propriété subsidiaire : si l'angle (AB, AC) n'est pas droit, comme $(AF_B, AF_C) = 2(AB, AC)$, A n'appartient pas à (F_BF_C), et l'homothétie h_A transforme (F_BF_C) en une droite distincte, parallèle, passant par H. Donc H n'appartient pas à (F_BF_C). En d'autres termes, si H, F_B et F_C sont alignés et si (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires, F est sur le cercle circonscrit à ABC.

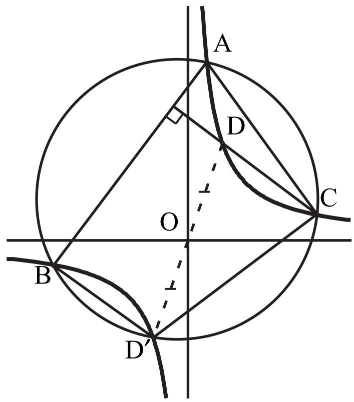
De ces deux premières propriétés découle que si la parabole ($\mathcal{P}$) est tangente aux trois côtés d'un triangle ABC, les symétriques de F par rapport aux trois côtés du triangle étant alignés sur (Δ), F appartient au cercle (Γ) circonscrit au triangle et la directrice (Δ) de ($\mathcal{P}$) passe par l'orthocentre H du triangle : c'est la droite de Steiner de F. Maintenant, si ($\mathcal{P}$) est tangente à seulement deux côtés (AB) et (AC) du triangle, mais que sa directrice (Δ) passe par l'orthocentre H, ($\mathcal{P}$) est-elle tangente au troisième côté (BC) ? Oui, si A n'est pas lui-même sur la directrice de (P). Si (BC) n'était pas tangente à ($\mathcal{P}$), il existerait une tangente à ($\mathcal{P}$) parallèle à (BC) et une homothétie de centre A transformant (BC) en cette tangente (B′C′). Cette homothétie transformerait H en l'orthocentre H′ de AB′C′, et ce serait H′ et non H qui appartiendrait à (Δ). Mais ceci ne vaut pas si A est sur (Δ) ou, ce qui revient au même, si les tangentes à ($\mathcal{P}$) menées par A sont perpendiculaires.

En effet, troisième propriété : la « courbe orthoptique » d'une parabole ($\mathcal{P}$), lieu des points d'où les deux tangentes à ($\mathcal{P}$) sont perpendiculaires, c'est sa directrice. Si d'un point A de (Δ) on pouvait mener des tangentes à ($\mathcal{P}$), (T) et (T′), non perpendiculaires, on pourrait trouver une troisième tangente à ($\mathcal{P}$), perpendiculaire à (T) ou (T′), telle que l'orthocentre du triangle ainsi formé, en l'occurrence le sommet de l'angle droit, n'appartienne pas à (Δ). Réciproquement, si d'un point A on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la parabole, pour n'importe quelle autre tangente à la parabole, l'orthocentre H = A du triangle formé est sur la directrice (Δ) de ($\mathcal{P}$). Mais ceci vaut tout autant si (BC) n'est pas tangente à la parabole : lorsque les deux tangentes (AB) et (AC) sont perpendiculaires, le fait que l'orthocentre H = A de ABC appartienne à la directrice de ($\mathcal{P}$) ne suffit pas à conclure que (BC) est tangente à ($\mathcal{P}$).



Au passage, concernant cette directrice (Δ) de ($\mathcal{P}$), Jacques Bouteloup rappelle que si d'un point A de (Δ) on mène deux tangentes (AP) et (AP′) à ($\mathcal{P}$), la corde (PP′) passe par le foyer F et est perpendiculaire à (AF). En effet, la symétrie par rapport à (AP) transforme F en Q, projection orthogonale de P sur la directrice, donc tel que (AQ) soit perpendiculaire à (PQ) ; par conséquent (AF) est perpendiculaire à (PF) et, par le même raisonnement, à (P′F).

Cela étant dit, pour en revenir au problème : si de A on peut mener deux tangentes à ($\mathcal{P}$) distinctes et non perpendiculaires (AB) et (AC), et si l'orthocentre de ABC est sur la directrice (Δ) de ($\mathcal{P}$), alors (BC) est tangente à ($\mathcal{P}$). Il reste donc à



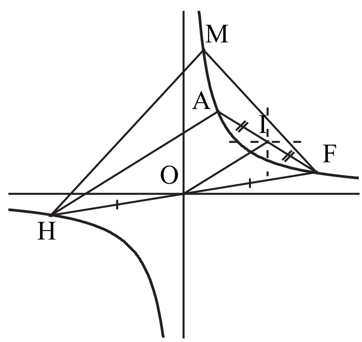
prouver que H est bien l'orthocentre du triangle ABC de l'énoncé. Et pour cela, on utilisera la quatrième propriété que voici, propriété des hyperboles équilatères : si A, B, C sont trois points d'une hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$), l'orthocentre H de ABC appartient à ($\mathcal{H}$), et le quatrième point d'intersection de ($\mathcal{H}$) avec le cercle circonscrit à ABC est diamétralement opposé à H.

Ceci peut se démontrer calculatoirement : dans un repère convenable, l'hyperbole équilatère a pour équation $xy = 1$. Or la droite joignant A $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ à B $\left(b, \frac{1}{b}\right)$ est parallèle à $(ab, -1)$. Si $abcd = -1$, $(ab, -1)$ est perpendiculaire à $(cd, -1)$, les quatre points A $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, B $\left(b, \frac{1}{b}\right)$, C $\left(c, \frac{1}{c}\right)$ et D $\left(d, \frac{1}{d}\right)$ vérifient donc : AB perpendiculaire à CD, AC perpendiculaire à BD et AD perpendiculaire à BC, c'est ce qu'on appelle un quadrangle orthocentrique, chacun de ces quatre points étant l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Si maintenant $abcd = 1$, les angles de droites (AB, AC) et (DB, DC) sont égaux, donc les quatre points A, B, C, D sont cocycliques. En utilisant les nombres complexes, cela signifie que, modulo π, $\frac{ab - \mathrm{i}}{ac - \mathrm{i}}$ et $\frac{db - \mathrm{i}}{dc - \mathrm{i}}$ ont même argument, or $\frac{(ab - \mathrm{i})(dc - \mathrm{i})}{(ac - \mathrm{i})(db - \mathrm{i})}$ est bien réel, c'est le quotient de deux imaginaires purs. Il suffit donc de remplacer un des nombres a, b, c, d par son opposé (donc un des points par le point diamétralement opposé) pour passer de la première situation (quadrangle orthocentrique) à la seconde (points cocycliques), et inversement. Corollaire : si quatre points A, B, C, D d'une hyperbole équilatère sont tels que (AB) soit perpendiculaire à (CD), ils forment un quadrangle orthocentrique, donc (AC) est perpendiculaire à (BD) et (AD) à (BC).

Pour en revenir au présent énoncé, l'hypothèse que F et H sont diamétralement opposés sur l'hyperbole ($\mathcal{H}$) ajoutée au fait que F est sur le cercle circonscrit à ABC, A, B, C, F étant tous quatre sur l'hyperbole ($\mathcal{H}$), entraîne que H est l'orthocentre de ABC. Il en résulte que ($\mathcal{P}$) est tangente à (BC) puisqu'elle est tangente à (AB) et (AC) et que sa directrice passe par l'orthocentre de ABC.

La plupart des solutions reçues sont des variantes de la démonstration ci-dessus. Géry Huvent commence par démontrer dans l'autre sens : « Soit ABC un vrai triangle d'orthocentre H, inscrit dans une hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$). Soit F le symétrique de H par rapport au centre O de l'hyperbole, et (Δ) la droite de Steiner de F. Notons ($\mathcal{P}$) la parabole de foyer F et de directrice (Δ). Alors les trois côtés du triangle ABC sont tangents à ($\mathcal{P}$) ». Christian Dufis utilise un autre résultat classique, qu'une hyperbole équilatère passant par A, B, C, passe par H et a son centre O sur le cercle d'Euler de ABC. Le symétrique F de H par rapport à O appartient donc au cercle circonscrit à ABC. Mais ceci peut s'utiliser dans l'autre sens pour trouver, à partir de la démonstration ci-dessus, le lieu des centres des hyperboles passant par A, B, C. Marie-Laure Chaillout, quant à elle, établit par le calcul que la tangente à ($\mathcal{P}$) menée par B et autre que (AB) a même coefficient directeur que la tangente à ($\mathcal{P}$) menée par C et autre que (AC).

L'auteur et plusieurs lecteurs utilisent des propriétés des cordes d'hyperboles équilatères. La droite joignant A $\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ à B $\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$, d'équation : $x + aby = a + b$, coupe les asymptotes de l'hyperbole en : M ($a + b$, 0), N $\left(0, \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ de sorte que MN et AB ont même milieu I, sur la droite : $x = aby$. En posant $ab = k$, les milieux des cordes parallèles à (D), de vecteur directeur (k, −1), appartiennent donc à la droite (D′) : $x = ky$, passant par le centre O de l'hyperbole et de vecteur directeur (k, 1) ; les bissectrices de (D), (D′) sont donc parallèles aux asymptotes (Ox) et (Oy) de l'hyperbole équilatère. Plus généralement, comme le signale Jacques Dautrevaux, dans le cas d'hyperboles non équilatères : « Soit (D) une droite passant par le centre d'une hyperbole. Le lieu des milieux des cordes parallèles à (D) appartient à une autre droite (D′), telle que (D), (D′) et les asymptotes forment un faisceau harmonique. Cette droite (D′) contient les points de contact de l'hyperbole avec ses tangentes parallèles à (D) si elles existent ». Ce résultat plus général peut se déduire du précédent par affinité d'axe une bissectrice des asymptotes.

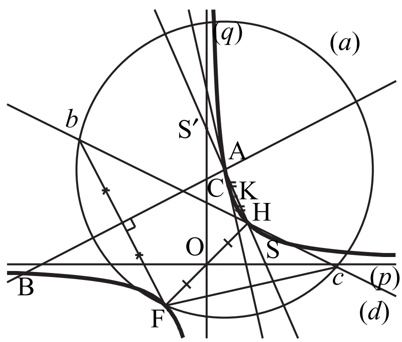


Toujours est-il que l'on trouve là une caractérisation de l'hyperbole équilatère. René Manzoni rappelle, que, « d'après le cours » (notamment celui de Georges Lion, p. 146 ; Edgard Delplanche cite également : *Hyperbole équilatère et courbes dérivées* de J. Lemaire, chez Vuibert), « l'hyperbole équilatère ($\mathcal{H}$) est entièrement déterminée par le diamètre [FH] et le point A : c'est l'ensemble des points M tels que les angles de droites (FA, FM) et (HA, HM) soient opposés ». En effet, I étant le milieu de [FA] et O le centre de l'hyperbole ($\mathcal{H}$), milieu de [FH], (IO), droite des milieux de AFH, est parallèle à (HA). (FA, Ox) et (HA, Ox) sont donc opposés. Il en va de même de (Ox, FM) et (Ox, HM) si M appartient lui aussi à ($\mathcal{H}$), donc par addition (FA, FM) et (HA, HM) sont opposés. Si maintenant M n'appartient pas à ($\mathcal{H}$), (FM) recoupe ($\mathcal{H}$) en M′ ; comme (Ox, FM′) et (Ox, HM′) sont opposés, (Ox, FM) = (Ox, FM′) et (Ox, HM), eux, ne sont pas opposés : (FA, FM) et (HA, HM) ne le sont pas non plus.

C'est d'ailleurs ce résultat de cours que Georges Lion utilise pour conclure : soit B_1 = (AB) ∩ (HB′) et C_1 ∈ (AC) ∩ (HC′) tels que H soit l'orthocentre de AB_1C_1 – si le cercle de diamètre [AH] coupe (AB) et (AC) en C′ et B′, B_1 = (AB) ∩ (HB′) et C_1 = (AC) ∩ (HC′) –. F appartient au cercle circonscrit à AB_1C_1 (car les symétriques de F par rapport à (AB_1) et (AC_1) sont alignés avec l'orthocentre H de AB_1C_1 : c'est la propriété subsidiaire la droite de Steiner). Donc (B_1C_1) est tangente à $(\mathcal{P})$ et, d'autre part, $(HB_1, HA) = (AC_1, B_1C_1)$ (puisque (HB_1) est perpendiculaire à (AC_1) et (HA) à (B_1C_1)), lui-même égal à (AF, FB_1) (points cocycliques), donc (caractérisation de l'hyperbole) $B_1 \in (\mathcal{H})$, et de même $C_1 \in (\mathcal{H})$: $B = B_1$, $C = C_1$, (BC) est tangente à $(\mathcal{P})$.

« Accepterez-vous, en cette année 2000, mon essai de solution à la mode de la " Géométrie Moderne " des années 40 ? » demande Raymond Raynaud. Certes ! homographies et théorèmes de Poncelet n'ont rien perdu de leur intérêt. D'ailleurs, comme le remarquent Jacques Bouteloup et Charles Notari, l'un des théorèmes de Poncelet s'applique au présent problème : s'il existe un triangle inscrit dans une conique $(\mathcal{H})$ et circonscrit à une autre conique $(\mathcal{P})$, il en existe une infinité, et tout point de $(\mathcal{H})$ n'appartenant pas à $(\mathcal{P})$ – extérieur à $(\mathcal{P})$ si l'on veut obtenir une figure réelle – est sommet d'un tel triangle. Mais Raymond Raynaud fait allusion aux quatre propriétés que voici :

- Si deux points mobiles se correspondent homographiquement sur deux droites fixes, la droite qui les joint enveloppe une conique.
- Une conique tangente à la droite de l'infini est une parabole.
- Si deux droites mobiles passant par un point fixe d'une conique se correspondent homographiquement, elles recoupent la conique en deux points qui se correspondent homographiquement sur cette conique.
- Si la correspondance de ces deux points est involutive, la droite qui les joint passe par un point fixe.



En fixant l'hyperbole $(\mathcal{H})$, donc ses asymptotes (p) et (q), les points A et H, donc également F, Raymond Raynaud fait tourner autour de H la directrice (d) de la parabole. (AH) coupe (p) et (q) en S et S′, [SS′] et [AH] ayant même milieu K, et le centre O de l'hyperbole appartient au cercle de diamètre [SS′], que l'homothétie de centre H et de rapport 2 transforme en le cercle (a) de centre A passant par F. Par ailleurs, la directrice (d) coupe le cercle (a) en b et c, qui se correspondent involutivement sur (a). (Fb) et (Fc) sont alors en correspondance involutive. Les tangentes (AB) et (AC) à $(\mathcal{P})$ sont les médiatrices de (Fb) et (Fc), elles aussi sont en correspondance involutive ; et puisque ces droites joignent deux points mobiles B et C de l'hyperbole à l'un de ses points A, fixe, B et C sont en correspondance involutive sur $(\mathcal{H})$: d'après le théorème de Frégier, (BC) passe par un point fixe Φ.

Or lorsque (bc) = (AH), comme l'homothétie de centre H et de rapport 2 transforme [SS′] en $[bc]$, (AB) et (AC) sont parallèles aux asymptotes de $(\mathcal{H})$, donc B et C sont à l'infini : Φ étant à l'infini, (BC) garde une direction fixe. Si b = F, (BH) = (Fc) est perpendiculaire à (AC). Les quatre points A, B, C, H de l'hyperbole équilatère forment donc un quadrangle orthocentrique, et la direction fixe de (BC) est orthogonale à (AH). Dès lors, quelle que soit la directrice (d), A, B, C, H est toujours un quadrangle orthocentrique.

Maintenant, fixons la parabole ($\mathcal{P}$) et le point A, et faisons varier l'hyperbole, ce qui revient à déplacer H sur la directrice (d) de ($\mathcal{P}$). Les tangentes (m) et (n) à ($\mathcal{P}$) menées par A sont fixes. A, B, C, H étant un quadrangle orthocentrique, il suffit de mener par H les perpendiculaires à (m) = (AB) et (n) = (AC) pour déterminer B et C : B et C se correspondent homographiquement sur (m) et (n). La droite (BC) enveloppe donc une conique ($\mathcal{C}$). Si H est le point à l'infini de (d), (BC) est la droite de l'infini, donc ($\mathcal{C}$) est une parabole. Si (AH) est perpendiculaire à (m), C = A et (BC) = (m). De même, (BC) = (n) lorsque AH est perpendiculaire à (n). Donc, (m) et (n) étant non perpendiculaires, ($\mathcal{C}$) est l'unique parabole tangente à (m) et (n) et de directrice (d) : ($\mathcal{C}$) = ($\mathcal{P}$).

Jacques Bouteloup procède différemment. F et H étant fixés, de coordonnées (a, 0) et ($-a$, 0), et l'hyperbole ($\mathcal{H}$) variable, la perpendiculaire en F à (HF), $x = a$, recoupe l'hyperbole en un point K tel que (HK) est la normale en H à l'hyperbole (ces deux droites ont même pente). Fixons ($\mathcal{P}$) : les tangentes (T_1) et (T_2) menées de H à ($\mathcal{P}$) sont perpendiculaires, la corde de contact P_1P_2 passant par F et étant perpendiculaire à (HF). (T_1) et (T_2), fixes, recoupent ($\mathcal{H}$), variable, en deux points M_1 et M_2 qui se correspondent homographiquement sur (T_1) et (T_2) : l'enveloppe de (M_1M_2) est ainsi une conique. Si M_1 est à l'infini, M_2 aussi, car les asymptotes de ($\mathcal{H}$) sont alors parallèles à (T_1) et (T_2) : la conique est donc une parabole. Si M_1 est en H, (T_1) = (HM_1) est tangente à l'hyperbole et (T_2) est normale en H à l'hyperbole. D'après la propriété initiale, elle recoupe l'hyperbole en un point K_2 appartenant à la droite $x = a$, et le seul point de cette droite appartenant à (T_2) est P_2, point de contact de (T_2) avec ($\mathcal{P}$). Donc si M_1 = H, $M_2 = P_2$, l'enveloppe est tangente en P_2 à (T_2). De même, si M_2 = H, $M_1 = P_1$. Or ($\mathcal{P}$) est la seule parabole tangente en M_1 à (T_1) et en M_2 à (T_2).

Dès lors, la propriété cherchée est vraie pour A = H. D'après l'un des théorèmes de Poncelet selon lequel, s'il existe un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité et tout point de la conique extérieure est sommet d'un tel triangle, la propriété est également vraie pour tout point A de ($\mathcal{H}$), extérieur à ($\mathcal{P}$) si l'on veut obtenir une figure réelle. Jacques Bouteloup s'étonne que l'auteur ait imposé aux tangentes d'être non perpendiculaires : lorsqu'elles sont perpendiculaires, notamment lorsque A est en H, une des démonstrations est inutilisable, certes, mais cela ne signifie pas que le résultat soit faux. Il reste vrai également lorsque A est le second point d'intersection de la directrice avec l'hyperbole, sous réserve que, d'après la démonstration de Raymond Raynaud, B et C soient alors à l'infini. Géry Huvent utilise un autre théorème de Poncelet – si (T_1) et (T_2) sont les deux tangentes issues de A à la parabole ($\mathcal{P}$), et si (AA′) est perpendiculaire à la directrice (D), (AA′, T_1) = (T_2, AF) – pour prouver que les points B et C existent si A n'appartient pas à (D) ou si A = H et (D) n'est pas tangente à ($\mathcal{H}$).