La multiplication du cube
Solution approchée à la pâte à modeler
Djelloul Sebaa

1. Introduction au problème

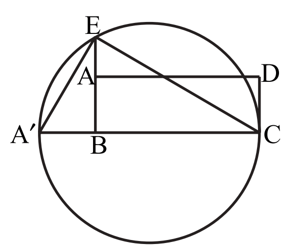
On sait que le problème de la duplication du cube consiste à construire, à la règle et au compas, l'arête d'un cube ayant un volume deux fois plus grand que le volume d'un cube donné. Si on note a la longueur de l'arête du cube donné, la longueur de l'arête à construire est $a\sqrt[3]{2}$. On sait, depuis les travaux de Pierre-Laurent Wantzel de 1837 que cette construction est impossible [1].

Dans cet article nous allons donner une méthode qui fournit une construction approchée avec une précision aussi grande que l'on veut. En fait, nous allons donner cette méthode en généralisant le problème de la duplication du cube. Pour cela, on considère un entier $n \geq 2$ et on veut construire l'arête d'un cube ayant un volume n fois plus grand que le volume d'un cube donné. On peut appeler cette généralisation, le problème de la n-multiplication du cube. Si on note a la longueur de l'arête du cube donné, la longueur de l'arête à construire est $a\sqrt[3]{n}$. Dans la suite nous supposerons que l'entier n n'est pas le cube d'un entier. Dans ce cas la construction est impossible à la règle et au compas pour les mêmes raisons que dans le cas $n = 2$ qui correspond à la duplication.

L'idée de la méthode approchée, que nous allons décrire, est de construire une suite $(\mathrm{P}_k)_{k\geq 0}$ de parallélépipèdes rectangles, ayant tous le même volume na^3, dont les cotés sont tous constructibles à la règle et au compas, avec des longueurs qui se rapprochent de $a\sqrt[3]{n}$. Cette suite de parallélépipèdes sera construite par récurrence. Pour passer d'un parallélépipède au suivant, on utilisera toujours la même transformation qui est basée sur le résultat élémentaire suivant, que nous appellerons construction C.

Construction C. Étant donné un rectangle dont les côtés ont pour longueur u et v, on peut construire à la règle et au compas un carré dont la longueur du côté est $\sqrt{uv}$. Ce carré a donc la même aire que le rectangle donné.

Preuve. Soient ABCD le rectangle avec AB = u et BC = v. On construit A′ sur la droite BC, à l'extérieur du segment BC, tel que A′B = AB = u. Le cercle de diamètre A′C coupe la droite AB en deux points, on note E un de ces points.

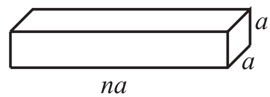


Dans le triangle rectangle EA′C on a $\mathrm{EB}^2 = \mathrm{A'B} \times \mathrm{BC} = uv$, d'où $\mathrm{EB} = \sqrt{uv}$.

Le segment EB est donc un côté de carré cherché que l'on obtient alors facilement.
Remarque. La construction C pourrait s'appeler la quadrature du rectangle. Lorsqu'on l'appliquera à un rectangle de côtés u et v on la notera C (u,v).

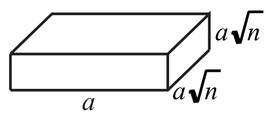
2. La suite des parallélépipèdes

On dispose au départ d'un segment ne longueur a,qui est une arête du cube donné, et d'un entier $n \geq 2$. On peut alors considérer le parallélépipède rectangle noté P_0 ayant des côté de longueur na, a, a ; pour préciser ses dimensions on le notera P_0 (na,a,a). Remarquons que dans cette notation, on place les deux dimensions égales en dernière position.



Ce parallélépipède a donc pour volume na^3, il possède deux faces carrées de dimension $a \times a$ et quatre faces rectangulaires de dimension $na \times a$. Par la construction C (na,a), à partir d'une face rectangulaire de P_0, on peut construire, à la règle et au compas, un carré de côté $a\sqrt{n}$.

On peut alors considérer le parallélépipède rectangle $P_1\left(a,a\sqrt{n},a\sqrt{n}\right)$ dont les côtés sont constructibles à la règle et au compas et qui a le même volume que P_0 (na,a,a).



Appelons T la transformation qui permet de passer de P_0 à P_1. Par la même transformation T, on obtient à partir de $P_1\left(a,a\sqrt{n},a\sqrt{n}\right)$, grâce à la construction $C\left(a,a\sqrt{n}\right)$, le parallélépipède $P_2\left(a\sqrt{n},an^{\frac{1}{4}},an^{\frac{1}{4}}\right)$. En itérant le procédé, on obtient ainsi, à partir de P_0 (na,a,a), une suite de parallélépipèdes rectangles $\left(P_k\right)_{k\geq 0}$. Le parallélépipède P_{k+1} est obtenu par la transformation T appliquée au parallélépipède P_k. Ainsi, si on note P_k (Y_k,Y_{k+1},Y_{k+1}), on aura P_{k+1} $(Y_{k+1},Y_{k+2},Y_{k+2})$ avec $Y_{k+2}=\sqrt{Y_k Y_{k+1}}$. Précisons aussi que les parallélépipèdes de la suite ont tous le même volume na^3 et que leurs côtés sont constructibles à partir du segment de longueur a.

Les premiers parallélépipèdes de la suite sont donc :

P_0 (na,a,a),

$P_1\left(a,an^{\frac{1}{2}},an^{\frac{1}{2}}\right)$,

$P_2\left(an^{\frac{1}{2}},an^{\frac{1}{4}},an^{\frac{1}{4}}\right)$,

$$P_3\left(an^{\frac{1}{4}}, an^{\frac{3}{8}}, an^{\frac{3}{8}}\right),$$

$$P_4\left(an^{\frac{3}{8}}, an^{\frac{5}{16}}, an^{\frac{5}{16}}\right), \ldots$$

Pour expliquer le sous-titre anecdotique de l'article où il est question de pâte à modeler, il faut se rappeler que les parallélépipèdes de la suite ont tous le même volume. On peut donc imaginer que le parallélépipède P_0 (na,a,a), a été fabriqué en pâte à modeler et que la transformation T consiste à remodeler les faces d'un parallélépipède pour obtenir le suivant. En fait ces remodelages successifs doivent permettre au parallélépipède en pâte à modeler de ressembler de plus en plus à un cube. C'est ce que l'on va préciser dans le paragraphe suivant.

3. La convergence

Nous allons établir que la suite des parallélépipèdes $(P_k)_{k\geq 0}$ « converge » vers un cube dont l'arête a pour longueur $a\sqrt[3]{n}$. Cela revient à démontrer que la suite des dimensions $(Y_k)_{k\geq 0}$ converge vers $a\sqrt[3]{n}$. La suite $(Y_k)_{k\geq 0}$ est définie par récurrence par $Y_0 = na$, $Y_1 = a$ et $\forall\ k \geq 0$, $Y_{k+2} = \sqrt{Y_k Y_{k+1}}$. Si on pose $\forall\ k \geq 0$, $Y_k = an^{\alpha_k}$, la suite des exposants $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est définie par récurrence par $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ et $\forall\ k \geq 0$, $\alpha_{k+2} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Il existe plusieurs méthodes pour exprimer le terme général de cette suite définie par une formule de récurrence linéaire. On trouve $\forall\ k \geq 0$, $\alpha_k = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$. Vérifions toutefois cette formule par une récurrence sur k.

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{-1}}\right) = 1,\ \alpha_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^0}\right) = 0.$$

En supposant que, $\alpha_k = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$ et $\alpha_{k+1} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right)$, on obtient :

$$\alpha_{k+2} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{k+1}) = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{(-1)^k}{2^k}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{k+2}}{2^{k+1}}\right),$$

qui est bien ce qu'il fallait obtenir.

On a donc $\forall\ k \geq 0$, $\alpha_k = \frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\right)$ et il en résulte que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ est convergente et a pour limite $\frac{1}{3}$. À partir de $Y_k = an^{\alpha_k}$, on obtient alors que la suite $(Y_k)_{k\geq 0}$ est convergente et a pour limite $an^{\frac{1}{3}} = a\sqrt[3]{n}$.

4. Conclusion

On sait que l'arête du cube de volume na^3 qui a pour longueur $a\sqrt[3]{n}$, n'est pas constructible à la règle et au compas, mais ce cube peut être approché, d'aussi près que l'on veut, par une suite de parallélépipèdes rectangles P_k (Y_k,Y_{k+1},Y_{k+1}) dont les côtés sont constructibles à la règle et au compas.
Pour chaque entier k, les côtés du parallélépipède P_k, de longueur Y_k et Y_{k+1}, sont des approximations de l'arête de longueur $a\sqrt[3]{n}$.
Par exemple, en appliquant 10 fois la transformation T à partir du parallélépipède P_0, on obtient le parallélépipède P_{10} dont un des côtés a pour longueur $Y_{11} = an^{\alpha_{11}}$, avec $\alpha_{11} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)$. Si on confond le côté du parallélépipède P_{10} avec l'arête du cube de longueur $a\sqrt[3]{n}$, on commet sur l'exposant de n une erreur absolue de $\frac{1}{3\times 2^{10}}$, voisine de 3×10^{-4}. Le même calcul avec P_{20} donne une erreur absolue sur l'exposant de n de $\frac{1}{3\times 2^{20}}$, voisine de 3×10^{-7}.
En choisissant k suffisamment grand, on obtient ainsi une approximation, construite à la règle et au compas, de l'arête de longueur $a\sqrt[3]{n}$, avec une précision aussi grande que l'on veut.

Bibliographie

[1] J.-C. Carréga. Théorie des corps. La règle et le compas. Hermann 2001.

Remerciements

J'adresse ma sincère gratitude à M. Carréga, pour sa vive disposition à contribuer à ce modeste travail, pour ses conseils fructueux et ses encouragements afin d'aboutir à un résultat positif et immanquable.