Si on prend $\frac{2}{3}=0{,}667$, est-ce que c'est grave ?

Renée De Graeve & Claire Helmstteler(*)

Introduction

« Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées » est un objectif de la classe de Seconde, plus difficile à faire passer qu'il n'y paraît. C'est une phrase transparente pour les professeurs mais longtemps opaque pour les élèves. Ici, on travaille sur une situation où la différence entre un nombre et une valeur approchée de ce nombre a des conséquences visibles parce qu'on réitère un calcul. La même activité est reprise en classe de Première S avec pour objectif de calculer les termes d'une suite à la main et sur calculatrice, d'observer les différences d'une calculatrice à l'autre et d'interpréter les résultats. Ce thème a été étudié à l'IUFM, avec des professeurs de Première année. Ils ont eu les mêmes réactions que les élèves devant les résultats apparemment faux des calculatrices : incrédulité, « c'est toi qui as mal tapé », « c'est ta machine qui est nulle ».

Sommaire

I. Classe de Seconde

La situation proposée est une activité faite en demi-classe, en une heure. On l'appelle « la situation de la banque ». Elle peut être approfondie par une étude du fonctionnement des calculatrices : représentation des nombres avec mantisse et exposant, chiffres à l'affichage et chiffres cachés. Parler de banque peut paraître artificiel. Cet habillage a le mérite d'accrocher des élèves qui entrent mal dans un problème de mathématiques. Bien sûr, cet habillage peut être jugé gênant et supprimé.

1) Fiche de travail : « La banque virtuelle »
2) Éléments de réponses, commentaires et réactions des élèves

II. Classe de Première S

L'énoncé proposé peut faire l'objet d'un travail à la maison ou d'une activité en classe en une heure avec des prolongements.

1) Fiche de travail : Suites récurrentes et calculatrices
2) Suites récurrentes et calculatrices : indications pour une correction

III Annexe : Arrondis et chiffres cachés

Conclusion

(*) IREM de Grenoble.

En Seconde : la banque virtuelle

Première partie : 10% d'intérêt !

Une banque donne 10% d'intérêt chaque année. On place une somme. Au bout de 8 ans, on retire une somme S. *On ne précise pas s'il s'agit de francs ou d'euros, de milliers ou de millions… Il y a une unité et c'est la même tout au long de l'exercice.*

Premier cas S = 1

Donner dans le tableau, les nombres de S_1 à S_8 :

1								

Deuxième cas S = 10

La banque prélève, chaque année, des frais de gestion. On appelle F le montant de ces frais de gestion : F = 1. Donner dans le tableau, les nombres de S_1 à S_8, arrondis avec 4 décimales.

10								

Troisième cas S = 100

F = 1. Donner dans le tableau, les nombres de S_1 à S_8 arrondis avec 4 décimales.

100								

Deuxième partie : 100% d'intérêt !

Une banque virtuelle donne 100% d'intérêt chaque année et prend, chaque année, $\frac{2}{3}$ comme frais de gestion.

Groupe 1 : S = 0,66. F = $\frac{2}{3}$. *Avec la calculatrice*, déterminer S_1 et S_8.

Groupe 2 : S = 0,67. F = $\frac{2}{3}$. *Avec la calculatrice*, déterminer S_1 et S_8.

Comparer les résultats obtenus par les groupes 1 et 2.

Pour tous : S = $\frac{2}{3}$. F = $\frac{2}{3}$. Calculer S_1 *à la main*. En déduire S_8 et S_{1000}.

Groupe 1 : S = $\frac{2}{3}$. F = $\frac{2}{3}$ et *avec la calculatrice* : $2\left(\text{ANS}-\frac{1}{3}\right)$. Calculer S_8, S_{20}, …

Groupe 2 : S = $\frac{2}{3}$. F = $\frac{2}{3}$ et *avec la calculatrice* : $2\text{ANS}-\frac{2}{3}$. Calculer S_8, S_{20}, …

Comparer les résultats obtenus par les groupes 1 et 2. Expliquer pourquoi ces deux formules donnent des résultats différents.

Éléments de réponses, commentaires et réactions des élèves

On évite de parler de suites et, surtout, on ne parle pas du mode SEQUENCE des calculatrices. On utilise la mémoire ANS dans laquelle est stocké le dernier résultat affiché et ENTER qui provoque l'exécution de la dernière instruction.

10% d'intérêt : la première partie permet de mettre en place le calcul des termes successifs avec la calculatrice.

1er cas 1 ENTER 1.1*ANS ENTER pour avoir S_1	7 fois ENTER pour avoir S_8.
2ème cas 10 ENTER 1.1*ANS - 1 ENTER	7 fois ENTER pour avoir S_8.

Ces calculs amènent à rappeler une règle d'arrondi et introduisent l'idée d'itération. On voit apparaître $S_1 = 1,1 \times S$ puis, quand il y a des frais de gestion, $S_1 = 1,1 \times S - 1$.

Les résultats de la Première partie, calculés avec TI82

Premier cas

1			1.1					

Deuxième cas

10								

Troisième cas

100								

100% d'intérêt : dans la deuxième partie, on voit apparaître $S_1 = 2S - \frac{2}{3}$.

Selon que S = 0,66 ou S = 0,67, les résultats sont très différents. Pourtant les intérêts sont peu différents des frais de gestion..

Groupe 1 : S = 0,66 $S_1 = 0,6533$ $S_8 = -1,04$	Groupe 2 : S = 0,67 $S_1 = 0,6733$ $S_8 = 1,52$

Réflexion d'un élève du groupe 1 : « Oh, l'enfoiré, il m'a tout piqué ».

À la main, pour tous, avec $S = \frac{2}{3}$, on trouve évidemment $S_1 = \frac{2}{3}$, …, $S_8 = \frac{2}{3}$, …, $S_{1000} = \frac{2}{3}$.

Résultats obtenus pour $S = \frac{2}{3}$ et $F = \frac{2}{3}$, avec TI 82 , HP 40 et CASIO Graph100

Groupe 1	Groupe 2
$S = \frac{2}{3}$ puis $2\left(\text{ANS} - \frac{1}{3}\right)$	$S = \frac{2}{3}$ puis $2\text{ANS} - \frac{2}{3}$
TI 82 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}6666666667$ dix chiffres significatifs $S_8 = 0{,}6666666668$ $S_{20} = 0{,}6666673482$	TI 82 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}6666666667$ $S_8 = 0{,}6666666667$ $S_{20} = 0{,}6666666667$ Résultats stables
HP 40 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}666666666667$ douze chiffres significatifs $S_8 = 0{,}666666666922$ $S_{20} = 0{,}666667715242$	HP 40 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}666666666667$ $S_8 = 0{,}666666666663$ $S_{20} = 0{,}666666666663$ Résultats stables
CASIO Graph100 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}6666666667$ dix chiffres significatifs $S_1 = S_8 = S_{20} = 0{,}666666666667$ Résultats stables	CASIO Graph100 : $S = \frac{2}{3} = 0{,}6666666667$ $S_8 = 0{,}6666666667$ $S_8 = 0{,}6666666614$

Pourquoi des résultats différents avec ces deux formules ?

Plusieurs élèves expliquent le phénomène en disant : « c'est normal, on n'a pas rentré la même formule ». C'est dur à entendre quand on a enseigné : $2\left(x - \frac{1}{3}\right) = 2x - \frac{2}{3}$ pour tout x.

Alors, il faut insister sur le fait que « ce n'est pas normal » et comprendre ce qui se passe dans la calculatrice.

Pour cela, le professeur pourra se reporter au paragraphe « la calculatrice sous haute surveillance », dans le paragraphe de Première S « Suites récurrentes et calculatrices : indications pour une correction ».

Bilan avec les élèves

Les élèves.

« Dans la calculatrice, il n'y a pas le nombre 2/3 car ça ne s'arrête jamais. »

« Dans la calculatrice, on peut taper 2/3 mais il n'y a pas la valeur exacte de 2/3 . »
Le professeur.
Quels sont les nombres qui sont dans la calculatrice ?
– Il n'y a pas tous les nombres entiers ; on est limité, par exemple, par
9,999 999 999 E+99.
– Il n'y a pas tous les nombres rationnels ; il n'y a que des décimaux.
– Il n'y a pas les nombres irrationnels.

En Première S : Suites récurrentes et calculatrices

La première question est une étude théorique. La suite est une expérimentation menée avec une calculatrice. On comparera les résultats de ces deux parties.

On considère les suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - \frac{2}{3} \text{ quel que soit } n \geq 0.$$

$\frac{2}{3}$ est la seule limite possible pour la suite (u_n). Expliquer pourquoi.
C'est pour cette raison que, dans la question suivante, on étudiera la différence : $d_n = u_n - \frac{2}{3}$.

1) On étudie la suite (d_n) : $d_n = u_n - \frac{2}{3}$ quel que soit $n \geq 0$.

Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Exprimer d_n en fonction de n et de $d_0 = u_0 - \frac{2}{3}$.

Déterminer la limite de u_n dans chacun des cas : $u_0 < \frac{2}{3}$, $u_0 = \frac{2}{3}$, $u_0 > \frac{2}{3}$.

2) Avec une calculatrice.

On appelle v la suite **engendrée par votre calculatrice** à partir de $v_0 = \frac{2}{3}$ et de $v_{n+1} = 2v_n - \frac{2}{3}$ quel que soit n.

Calculer v_1, v_2, v_{50}. La suite v paraît-elle stationnaire ?

3) Toujours avec votre calculatrice, écrivez la formule de récurrence en mettant 2 en facteur. On appelle w la suite **engendrée par votre calculatrice** à partir de $w_0 = \frac{2}{3}$ et $w_{n+1} = 2\left(w_n - \frac{1}{3}\right)$ quel que soit n.

Calculer w_1, w_2, w_{50}. Obtenez-vous les mêmes résultats que dans la question 2 ?

4) Les résultats des questions 2 et 3 diffèrent selon les calculatrices parce que les calculatrices diffèrent par le nombre de chiffres cachés, le fait qu'elles font ou ne font pas d'arrondi et d'autres phénomènes liés au codage des nombres.
Pour explorer leur fonctionnement, on **simule une calculatrice sans chiffre caché, qui calcule avec 3 chiffres significatifs et qui arrondit** :

$v_0 = \dfrac{2}{3} = 0{,}667$ et $v_{n+1} = 2v_n - 0{,}667$; v_0 est $6{,}67 \times 10^{-1}$ ou 6,67 E−1, représenté en calculatrice par sa mantisse : 667 et l'exposant 0. On dit alors que 6, 6, 7 sont les chiffres significatifs.

Pour comprendre l'essentiel sur les chiffres significatifs, regarder les exemples suivants :
Premier exemple :

0,667	6	6	7	Exposant : 0
0,0667	6	6	7	Exposant : -1
66,7	6	6	7	Exposant : 2

La mantisse est ici 0,667. La mantisse est toujours un nombre compris entre 0 et 1.

Deuxième exemple :
Remarquer que dans cette machine 0,666 6 serait ramené à 3 chiffres pour la mantisse et arrondi à 0,667.

Troisième exemple :
Remarquer aussi :

$\dfrac{4}{3} = 1{,}33$ mais $\dfrac{1}{3} = 0{,}333$. Donc, dans cette calculatrice, $\dfrac{4}{3} \neq 1 + \dfrac{1}{3}$.

Quatrième exemple :
Observer la table de multiplication par 2 :

x	0,661	0,662	0,663	0,664	0,665	0,666	0,667	0,668	0,669
$2x$	1,32	1,32	1,33	1,33	1,33	1,33	1,33	1,34	1,34

Dans cette calculatrice, l'équation $2x = a$ n'a pas toujours une solution unique.

Traitons le cas de la suite v.
$v_1 = 2 \times 0{,}667 - 0{,}667 = 1{,}334 - 0{,}667$, mais 1,334 s'écrit dans cette machine 1,33 codé

1,33	1	3	3	Exposant : 1

car il n'y a pas de place pour le 4. Alors

$$v_1 = 1{,}33 - 0{,}667 = 0{,}663$$

puis

$$v_2 = 2 \times 0{,}663 - 0{,}667 = 1{,}326 - 0{,}667 = 1{,}33 - 0{,}667 = 0{,}663$$

car il n'y a pas de place pour le 6 de 1,326 ; alors 1,326 est arrondi à 1,33. Et ainsi de suite. On trouve toujours : 0,663. La suite est donc stationnaire.

À votre tour, sur cette même calculatrice fictive, calculer w_1, w_2, w_3, w_4 pour la suite définie par :

$w_0 = \frac{2}{3}$ et $w_{n+1} = 2\left(w_n - \frac{1}{3}\right) = 2(w_n - 0{,}333)$ quel que soit n. Commenter les résultats.

5) Reprendre le calcul de v et w sur une calculatrice fictive à 4 chiffres significatifs et pas d'arrondi.
$v_0 = 0{,}6666$ et $v_{n+1} = 2v_n - 0{,}6666$
$w_0 = 0{,}6666$ et $w_{n+1} = 2(w_n - 0{,}3333)$.
Comparer les résultats des questions 4 et 5.

6) À partir de cette étude, que signifie, d'après vous, l'expression « calcul formel » ?

Suites récurrentes et calculatrices : indications pour une correction.

1) $u_{n+1} = 2u_n - \frac{2}{3}$

$$d_n = u_n - \frac{2}{3}, \quad d_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = 2u_n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2\left(u_n - \frac{2}{3}\right), \quad d_{n+1} = 2d_n$$

$$d_n = 2^n d_0 = 2^n\left(u_0 - \frac{2}{3}\right), \quad u_n = d_n + \frac{2}{3}$$

a) $u_0 = \frac{2}{3}$ — $d_n = 0$ quel que soit n — $u_n = \frac{2}{3}$ quel que soit n.

b) $u_0 < \frac{2}{3}$ — $\lim d_n = -\infty$ — $\lim u_n = -\infty$

c) $u_0 > \frac{2}{3}$ — $\lim d_n = +\infty$ — $\lim u_n = +\infty$

2) $\frac{2}{3} = v_0 = u_0$

HP 40	**TI 82**	**CASIO Graph 100**
$v_0 = 0.6666666667$	$v_0 = 0.6666666667$	$v_0 = 0.6666666667$
$v_1 = 0.6666666663$	$v_1 = 0.6666666667$	$v_1 = 0.6666666667$
$v_2 = 0.6666666663$	$v_2 = 0.6666666667$	$v_2 = 0.6666666667$
$v_{50} = 0.6666666663$	$v_{50} = 0.6666666667$	$v_{50} = -4.96203803$
v semble stationnaire mais ce n'est pas le même développement que 2/3	Stationnaire	

3) $\frac{2}{3} = w_0 = u_0$

HP 40	**TI 82**	**CASIO Graph 100**
$w_1 = 0.6666666668$	$w_1 = 0.6666666667$	$w_1 = 0.6666666667$
$w_2 = 0.6666666667$	$w_2 = 0.6666666667$	$w_2 = 0.6666666667$
$w_{50} = 1126.56657351$	$w_{50} = 6.29616620088$	$w_{50} = -4.96203803$
w semble tendre vers $+\infty$	w semble tendre vers $+\infty$	Stationnaire

Dans la question 2, v est stationnaire pour les calculatrices TI 82 et HP 40 mais non pour Casio. Les résultats de la question 3 sont différents de ceux de la question 2, surprenants par rapport à l'étude théorique et différents d'une calculatrice à l'autre.

4) $w_0 = 0.667$, $w_{n+1} = 2(w_n - 0.333)$

$w_1 = 2(0.667 - 0.333) = 2(0.334) = 0.668$

$w_2 = 2(0.668 - 0.333) = 2(0.335) = 0.670$

$w_3 = 2(0.670 - 0.333) = 2(0.337) = 0.674$

$w_4 = 2(0.674 - 0.333) = 2(0.341) = 0.682$

On voit que w est croissante.

5) $v_0 = 0.6666, \quad v_{n+1} = 2v_n - 0.6666$

$v_1 = 2 \times 0.6666 - 0.6666 = 1.3332 - 0.6666$

1.3332 est codé en mémoire : 1.333 parce qu'il y a 4 chiffres significatifs. Alors

$v_1 = 1.333 - 0.6666 = 0.6664$

$v_2 = 2 \times 0.6664 - 0.6666 = 1.3328 - 0.6666 = 1.332 - 0.6666 = 0.6654$

$v_3 = 2 \times 0.6654 - 0.6666 = 1.3308 - 0.6666 = 1.330 - 0.6666 = 0.6634$

Quand il y a 5 chiffres significatifs, le cinquième est simplement ignoré, sans arrondi. v est décroissante.

$w_0 = 0.6666$

$v_1 = 2(0.6666 - 0.3333) = 2 \times 0.3333 = 0.6666$

Cette suite est manifestement stationnaire : le calcul sera le même à chaque étape.

6) En calcul formel, les nombres ne sont pas représentés par leur développement décimal mais par leurs propriétés dans les calculs. Par exemple $\frac{2}{3}$ est le nombre dont le produit par 3 vaut 2 ; $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2. En calcul formel, il n'y a pas d'approximation.

Arrondis et chiffres cachés

Certaines calculatrices ont des chiffres cachés : par exemple, la TI82 affiche 10 chiffres, mais garde en mémoire 14 chiffres. L'intérêt, c'est que, dans les calculs courants, la précision paraît meilleure. Mais, quand les résultats des calculs sont réutilisés dans des calculs en chaîne, comme ici dans ces calculs sur une suite définie par récurrence, la différence entre les valeurs théoriques et les résultats calculés finira par se manifester.

On vous indique ici comment voir si votre calculatrice a des chiffres cachés. Pour faciliter la lecture de la partie décimale, on a introduit des espaces.

1) TI 82 ou TI 83+

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 7
Pour obtenir les chiffres cachés 2/3 – 0.666 666 666 6	6.667 E–11 soit 0.000 000 000 0666 7 6.667 E–11 sont les chiffres cachés de v_0

Donc la TI 83+ a des chiffres cachés : 2/3 est représenté par 0,666 666 666 666 67. Elle calcule avec 14 chiffres significatifs, le dernier chiffre est le résultat d'un arrondi et elle affiche le résultat avec 10 chiffres significatifs, après avoir arrondi.

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 7
2*ANS – 2/3 ENTER	0.666 666 666 7
ANS – 0.666 666 666 6 = 6.663 E–11	6.663 E–11 sont les chiffres cachés de v_0

On conclut : $v_0 \neq v_1$ mais $v_1 = v_2$ (faites le calcul) et donc $v_{50} = v_1$. La suite v est stationnaire à partir de $n = 1$.

Pour la suite w :

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 7 c'est w_0
2*(ANS – 1/3) ENTER	0.666 666 666 7 c'est w_1
ANS – 0.666 666 666 6 ENTER	6.668 E–11 sont les chiffres cachés de w_1
2/3 ENTER 2*(ANS – 1/3) ENTER 2*(ANS – 1/3) ENTER	0.666 666 666 7 c'est w_2
ANS – 0.666 666 666 6	6.667 E–11 sont les chiffres cachés de w_2

$w_{50} = 11.925\ 665\ 74$

La suite paraît croissante vers $+\infty$.

2) HP 40

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 667 c'est v_0
2/3 – 0.666 666 666 666	0.000 000 000 001 pas de chiffres cachés

Donc HP 40 n'a pas de chiffre caché. Elle calcule avec des nombres arrondis et elle affiche le résultat après avoir arrondi.

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 667 c'est v_0
2*ANS – 2/3 ENTER	0.666 666 666 663 c'est v_1
ENTER	0.666 666 666 663 c'est v_2

On conclut : $v_0 \neq v_1$ mais $v_1 = v_2$ et $v_{50} = v_1$, donc v est stationnaire.

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 ENTER	0.666 666 666 667 c'est w_0
2*(ANS – 1/3) ENTER	0.666 666 666 668 c'est w_1
ENTER	0.666 666 666 670 c'est w_2

w_{50} = 1 126.566 573 51
La suite paraît croissante vers $+\infty$, comme sur TI 83+ mais les valeurs obtenues sur TI 83+ et sur HP 40 sont nettement différentes. L'une travaille avec 14 chiffres significatifs, l'autre avec 12 chiffres significatifs.

3) CASIO GRAPH100

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 EXE	0.666 666 666 7 c'est v_0
2/3 – 0.666 666 666 6	6.666 6 E–11 sont les chiffres cachés de v_0

Donc la Casio Graph100 a des chiffres cachés. Elle travaille avec 15 chiffres significatifs sans arrondir et affiche le résultat avec 10 chiffres après l'avoir arrondi.

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 EXE	0.666 666 666 7 c'est v_0
2*ANS – 2/3 EXE	0.666 666 666 7 c'est v_1
ANS – 0.666 666 666 6	6.6664 E–11 sont les chiffres cachés de v_1
2/3 EXE 2*ANS – 2/3 EXE 2*ANS – 2/3 EXE	0.666 666 666 7 c'est v_2

v_2 = 0.666 666 666 7
v_2 est apparemment égal à v_1 mais si on regarde ses chiffres cachés, on voit que :
v_1 = 0.666 666 666 666 64 et v_2 = 0.666 666 666 666 54
On trouve : v_{50} = –4.962 603 803
avec les chiffres cachés : v_{50} = –4.962 603 802 623 98.

La suite v semble décroître vers $-\infty$.

On a $\frac{2}{3} = w_0 = u_0$.

On tape	On obtient à l'affichage
2/3 EXE	0.666 666 666 7 c'est w_0
2*(ANS – 1/3) EXE	0.666 666 666 7 c'est w_1
ANS – 0.666 666 666 6	6.6666 E–11 sont les chiffres cachés de w_1

On trouve $w_1 = w_0$ (même affichage et même chiffres cachés) donc $w_{50} = w_0$. La suite w est stationnaire.

Conclusion

En ce qui concerne l'objectif « distinguer un nombre de ses valeurs approchées », on conclut : $\frac{2}{3}$ est différent de 0,6666666667. C'est sans importance si je suis en train de mesurer trois tables placées côte à côte. Cela peut devenir grave si les différences « s'accumulent » comme dans la situation suivante : si je dis « le pneu de ma voiture est aujourd'hui le même qu'hier, juste un peu plus usé » , en refaisant le même raisonnement tous les jours, je dirai « le pneu de ma voiture est le même qu'il y a 4 ans » alors qu'il a peut-être de bonnes raisons d'éclater.

En ce qui concerne les réactions des élèves devant leur calculatrice, on voit qu'ils sont très étonnés de trouver des suites qui divergent là où ils s'attendaient à trouver une suite stationnaire mais que, s'ils ont à l'affichage :

$$v_1 = 0{,}6666666667, \quad v_2 = 0{,}6666666667, \quad v_{50} = 0{,}6666666667$$

ils continuent à écrire sur leur feuille :

$$v_1 = \frac{2}{3}, \quad v_2 = \frac{2}{3}, \quad v_{50} = \frac{2}{3}.$$

L'identification entre 0.6666666667 et $\frac{2}{3}$ a la vie dure ; il est vrai que $\frac{2}{3}$ est plus vite écrit que 0,6666666667.

Les résultats affichés ne sont pas forcément conformes aux résultats théoriques mais ces différences entre résultats théoriques et résultats obtenus à la calculatrice s'expliquent, comme on l'a vu dans l'étude des suites $u_{n+1} = 2u_n - \frac{2}{3}$.

L'article de Jacques Verdier intitulé « Les calculatrices n'ont pas toujours raison » (Bulletin vert, n° 440) explique lui aussi des résultats surprenants obtenus sur calculatrices.

Il n'est pas nécessaire de connaître en détail le fonctionnement de chaque calculatrice (arrondis, chiffres cachés, stockage en mémoire, calculs en binaire et conversion), mais il faut bien comprendre que, si elle n'est pas programmée en calcul formel, elle ne fait pas de façon absolument fiable le calcul algébrique.