Sur l'introduction du calcul littéral

Ce texte est assez ancien puisque rédigé en 1988 sous l'égide du GREM (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques), chargé, après la COPREM et avant la création du Conseil National des Programmes, de la réflexion sur les programmes, de leur rédaction et de la production de documents d'accompagnement. Le GREM était alors placé sous la présidence de Christian Houzel.

Ce texte a ensuite été publié par l'IREM de Besançon en 1994 dans une brochure à diffusion restreinte comportant d'autres documents d'accompagnement du GREM réunis par Antoine Bodin. Il nous paraît aujourd'hui garder une grande actualité et peut servir de complément à des textes plus récents traitant du même sujet ou de sujets connexes dont en particulier le rapport sur le calcul produit par la commission présidée par J.-P. Kahane.

Daniel Reisz était à cette époque le rapporteur principal de ce texte. Il a bien voulu le reprendre aujourd'hui et y apporter quelques légères modifications.

Prélude

Comme le dit d'Alembert dans l'Encyclopédie, « *l'algèbre a proprement deux parties :*

1) la méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet ;

2) la manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes.

Bien que cette dernière partie soit la plus étendue et la principale… », nous allons ici surtout nous occuper de la première partie, mineure aux yeux de d'Alembert, mais qui pose des problèmes didactiques aigus et souvent non explicites.

Cependant qu'il soit bien entendu que si, ici, on abordera surtout les questions posées par le calcul littéral en tant que tel, il est primordial de rester convaincu que la fonction essentielle de l'algèbre élémentaire est de permettre de résoudre des problèmes ou en tout cas de les résoudre par des méthodes standardisées plus facilement que par des voies purement arithmétiques. Restreindre l'algèbre au calcul littéral serait donner dangereusement dans un travers déjà trop répandu dans notre enseignement.

Du IX^{e} siècle au début du XX^{e}, l'usage de symboles et de lettres pour le calcul a été très long à se mettre en place comme en témoigne l'aperçu historique donné à la fin de ce texte. Sans prôner un enseignement qui suivrait les sinuosités historiques, qu'elle nous éclairent au moins sur les difficultés que rencontrent les élèves derrière l'apparente limpidité des méthodes algébriques.

1. Quelques aspects didactiques

Calculer, surtout si on parle de calcul littéral, c'est transformer des écritures. Par essence même, le calcul oblige à pénétrer au cœur de deux difficultés concourantes des mathématiques : celle de l'abstraction et celle de l'apprentissage des règles de fonctionnement des concepts introduits. « Il y a un double travail de l'esprit, l'un de réduire les symboles en mots, qui sont eux-mêmes symboles, l'autre d'atteindre aux idées dont elles sont le signe », disait Hobbes.

Nous sommes confrontés dans ce domaine à deux abstractions successives (et parfois concurrentes), les NOMBRES et les LETTRES, que nos aînés n'ignoraient pas lorsqu'ils distinguaient l'algèbre « numéreuse » de l'algèbre « spécieuse ». Tout l'art d'enseigner revient donc à trouver un équilibre assurant la réversibilité des passages entre des situations dont les apprentissages propres présentent chacune de nombreuses difficultés de nature différente.

On a sans doute trop tendance à oublier qu'entre la situation *concrète*

$$3 \text{ lapins} + 4 \text{ lapins} = 7 \text{ lapins}$$

et l'égalité

$$3 + 4 = 7$$

qui servira tout aussi bien à abstraire

$$3 \text{ mètres} + 4 \text{ mètres} = 7 \text{ mètres},$$

(et que l'élève rapprochera tout naturellement et d'une certaine façon à tort de $3x + 4x = 7x$), il y a certainement une distance aussi grande mais d'une toute autre nature qu'entre les égalités

$$3 + 4 = 7$$

et

$$a + b = c.$$

Ces évidences une fois rappelées, reste entière la difficulté d'introduire le calcul littéral, d'apprendre ses règles de fonctionnement et de maintenir, voire renforcer le lien avec les problèmes dont il est issu et qu'il est censé résoudre plus aisément que l'arithmétique.

À cet égard, deux stratégies extrêmes ont été utilisées jusqu'ici au Collège.

La première consistait à ne pas parler d'algèbre et de calcul littéral, car on estimait que ces méthodes ne seraient pas efficaces pour la plupart des élèves et que le champ des problèmes où elles seraient vraiment utiles est trop restreint (le fameux *Ça ne sert à rien !*).

La seconde se proposait de faire fonctionner au maximum le calcul algébrique, même à vide, en espérant, qu'une fois l'outil assimilé, l'élève comprendrait son utilité et son efficacité (le fameux *Ça servira plus tard !*).

Une troisième stratégie, sous-jacente aux nouveaux programmes *(rappelons que ce texte date de 1988)*, bien qu'elle n'y soit pas explicitement énoncée, consiste à mener de front la mise en place du calcul littéral et son utilisation au sein de problèmes où il joue un rôle significatif, sans brûler d'étapes, ni du côté de l'abstraction, ni du côté des calculs, ni du côté de la complexité des situations mises en œuvre :

– En Sixième-Cinquième, on initie à l'usage et à la raison d'être des lettres,

– En Quatrième-Troisième, on initie à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques et aux techniques de calcul littéral, sans négliger, tout au long du premier cycle, la dialectique arithmétique-calcul algébrique.

A) Pour une démarche pragmatique

Malgré sa complexité – due, nous semble-t-il, à l'impossibilité de ramener les différents aspects à un seul point de vue –, l'utilisation du calcul littéral est l'un des domaines essentiels du cours de mathématiques en collège. Sans trop schématiser, on peut estimer que l'élève ne sait rien de ces techniques lorsqu'il entre en Sixième et qu'il doit absolument avoir acquis un minimum de compétences à sa sortie de Troisième.

Encore convient-il de s'accorder sur ces compétences. Il est assez facile de faire le tour des « savoirs » indispensables : équations du premier degré, identités remarquables, etc. Il est nettement plus difficile d'inventorier les « savoir-faire » et d'en délimiter les contours précis, sauf à se restreindre aux exercices internes à ce domaine (résolutions d'équations et de systèmes, factorisations, développements, …) qui ne devraient pas être un objectif en soi. Pas plus – mais est-il besoin de le dire ? – que la formalisation, ou même la simple élucidation des statuts d'inconnue, d'indéterminée ou de variable ne peuvent et ne doivent être envisagées comme des buts en soi au niveau de l'enseignement du collège (et sans doute du lycée).

Dans ces conditions, il est clair que la plus grande part de l'apprentissage du calcul littéral ne peut pas passer par de longues séances spécifiques sans risque de lasser l'élève et de lui donner une image fausse de ce secteur des mathématiques. Au contraire, il s'agit en fait essentiellement d'instiller progressivement l'habitude d'utiliser des lettres, d'abord comme notations puis comme objets de calculs au travers d'activités diverses (numériques ou géométriques).

En particulier, pour un niveau de classe donné, le degré de technicité visé en calcul algébrique et l'entraînement associé doivent correspondre au strict nécessaire permettant le traitement de situations ou de problèmes issus notamment d'autres secteurs des mathématiques ou d'autres disciplines. Le rôle du professeur est donc avant tout de trouver des activités à la fois suffisamment simples et suffisamment riches pour que tous les élèves puissent y participer, y voir un contenu, y trouver des motivations et de doser les approches pour recouvrir du mieux possible les divers aspects analysés plus haut. Mais une telle démarche est difficile et rares sont les manuels qui y contribuent.

Un premier but est sans doute d'habituer le plus tôt possible l'élève à remplacer des nombres par des lettres et, inversement, des lettres par des nombres de façon à préparer le passage vers les mises en équations, le calcul algébrique et les études de fonctions, et cela par petites touches, sans la moindre théorie ou formalisation.

Pour ce qui est du passage vers les mises en équations, s'il peut sembler naturel au professeur, il n'en demeure pas moins longtemps délicat à l'élève. En effet, lorsqu'on fait un raisonnement arithmétique, on part du connu pour aller vers l'inconnu.

Par exemple : « *On achète 18 bouteilles de vin par correspondance. Le prix du port est de 65 Francs. On a payé en tout 299 Francs. Quel est le prix d'une bouteille ?* »

• Prix de 18 bouteilles : 234 Francs (299 − 65 = 234).
• Prix d'une bouteille : 13 Francs (234/18 = 13).

Démarche algébrique

Lorsqu'on fait de l'algèbre, *on inverse la démarche* : en désignant le nombre inconnu par une lettre, on le manipule comme s'il était connu et on transpose l'énoncé sous une forme accessible à un traitement algébrique. On tient en effet le raisonnement suivant :
Si le prix d'une bouteille est x, alors on devra payer $x \times 18 + 65$, d'où l'équation :

$$18x + 65 = 299$$

que l'on résout de façon standard, en perdant de vue toute signification des nombres et des lettes manipulés.

L'un des premiers problèmes de l'enseignement sera d'aider l'élève à passer d'une démarche à l'autre. C'est d'autant plus difficile dans l'usage actuel que dans les premiers problèmes abordés, le raisonnement algébrique apparaît souvent comme artificiel, inutile, par rapport à un simple raisonnement arithmétique bien plus « parlant ».

Pour ce qui est du passage vers les *fonctions*, il nous paraît indispensable de donner l'habitude aux élèves d'en manipuler simultanément les différents aspects, comme les notions de courbe représentative, d'expression algébrique littérale, de tableaux de valeurs, etc. Plus que le schéma ensembliste, ce sont ces aspects, articulés autour des deux pôles fondamentaux à ce niveau que sont le dessin et la formule, qui contribueront à faire naître le concept de « fonction d'une variable ». Ainsi, la fonction

$$x \mapsto y = 5(x + 8)$$

n'est-elle vraiment comprise qu'à partir du moment où l'on est capable d'y associer d'une part :

– une loi de transformation faisant passer d'une valeur de x à un résultat y,
– une expression littérale, qui peut s'écrire $5(x + 8)$ mais aussi $5x + 40$, permettant non seulement d'expliciter la loi précédente mais aussi, selon les besoins, de remplacer y dans d'autres calculs, par exemple pour étudier l'équation $y = 1$. (Il est en effet important d'apprendre aux élèves à remplacer telle lettre par telle expression équivalente et *vice versa*, et d'interpréter ces différentes écritures en fonction de l'information qu'elles véhiculent).

d'autre part :

– un éventail de valeurs numériques donnant concrètement une idée de l'ordre de grandeur de y en regard de celui de x ;
– une courbe représentative illustrant le tableau précédent, ou permettant de lire graphiquement d'autres valeurs, qui deviendra peu à peu un « objet en soi » dont l'esthétique propre complète en particulier le canevas formé par les points connus.

L'apport des autres disciplines comme la physique, la géographie ou la biologie par exemple, n'est ici certainement pas négligeable, dans la mesure où l'on part de données numériques discrètes observées pour suggérer à tort ou à raison une loi continue, simplement connue par une courbe ou éventuellement explicitée par une formulation algébrique.

Notons à ce sujet qu'il existe d'autres sources de difficultés. Par exemple celles liées aux différences de notations, d'une discipline à l'autre. Les physiciens utilisent plutôt des *relations* entre des grandeurs variables. Lorsqu'ils emploient la notation fonctionnelle, en partant par exemple de la relation U = RI, c'est parce qu'ils veulent fixer leur attention sur telle ou telle grandeur variable. Ainsi ils étudieront et écriront avec leurs propres notations la fonction linéaire U(I) = RI, la fonction homographique I(R) = U/R ou encore la fonction linéaire I(U) = (l/R)U. L'ambiguïté apparaît par exemple dans le fait que les deux dernières fonctions s'écrivent souvent toutes deux sous la forme I = U/R.

Pour ce qui est du *calcul littéral*, on observera notamment que la lettre est tantôt « indéterminée », tantôt « inconnue », tantôt « variable ». Cela est intuitivement évident pour le professeur qui distinguera selon le contexte si dans des expressions telles que

$$x^2 + 7x - 2$$

ou

$$ax^2 + bx + c$$

x est un simple *nombre réel* qu'on élève au carré, qu'on multiplie par 7, etc. ou si x est une *indéterminée* lorsqu'il effectuera sur ces expressions différents calculs tels que

$$x^2 + 7x - 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{57}{4}$$

ou si x est une *inconnue* lorsqu'il sera en face de l'inéquation

$$x^2 + 7x - 2 \leq ax^2 + bx + c$$

ou encore si x est une *variable* lorsqu'il étudiera la fonction

$$x \mapsto y = x^2 + 7x - 2,$$

la difficulté didactique majeure étant qu'au sein d'un même problème, d'une même démarche, ces différents statuts peuvent intervenir et que les glissements d'un statut à l'autre sont souvent non explicites (et ne peuvent pas être explicités simplement aux élèves).

Il doit en aller de même dans le cas de relations plus complexes qui font appel à plusieurs lettres. Une formule comme

$$\mathrm{V} = \frac{\pi h}{3}(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}r + r^2)$$

donnant le volume d'un tronc de cône de hauteur h et de rayons des deux cercles de base R et r, mettant en jeu quatre lettres, n'a d'intérêt que si l'élève acquiert l'habitude d'y substituer des valeurs numériques pour la tester, puis pour l'utiliser. Il convient donc de faire *fonctionner* ce type de formules dans plusieurs directions : calculer une lettre à partir des autres, leur substituer des valeurs, ou d'autres expressions littérales, etc.

Combien d'élèves ont-ils l'idée de vérifier la justesse d'une factorisation en essayant avec des valeurs simples ? Et par ailleurs combien, après avoir établi à grand-peine une formule générale, reprennent le raisonnement au départ quand ils veulent obtenir le résultat numérique dans le premier cas rencontré ?

C'est précisément là une difficulté du calcul littéral – le « miracle » aussi bien entendu – car les formules conquièrent vite une autonomie. Encore faut-il que la lettre ne soit pas dès le départ déconnectée de la notion de nombre, que « l'algèbre » reste ancrée dans l'esprit de l'utilisateur sur la réalité numérique qu'elle permet de dépasser.

On pourrait d'ailleurs s'inspirer davantage dans l'enseignement de l'algèbre des pratiques de nos collègues physiciens ou des spécialistes en programmation, qui ne font qu'appliquer un judicieux conseil de Polya dans son ouvrage « How to solve it » : *Même si une situation est d'emblée numérique, il est souvent plus sûr, plus confortable, de conduire les calculs sous forme littérale, et ne revenir aux nombres qu'en fin de calcul*.

B) Trois aspects du calcul littéral

S'il est aisé de regrouper l'ensemble des techniques relatives aux calculs contenant des lettres sous le nom de *calcul littéral*, la description détaillée de ce domaine se heurte d'emblée à une difficulté majeure :
Comment définir et justifier l'usage même des *lettres* ? Quel statut convient-t-il de leur attribuer dès lors que l'on calcule avec elles comme s'il s'agissait de nombres, lettres et nombres se côtoyant par ailleurs dans les formules tout en y conservant leur nature propre ?
Comme on l'a vu plus haut, la réponse à cette question varie avec la position que l'on adopte, explicitement ou non, pour parler du calcul littéral lui-même. Elle dépend de façon essentielle du contexte dans lequel on se place et elle implique des choix plus ou moins conscients sur la présentation retenue, que ce soit dans la classe ou pour la rédaction d'un manuel.

Une façon de lever certaines ambiguïtés fondamentales est de clarifier ce qui touche aux notions d'inconnue, de variable et d'indéterminée correspondant à trois problématiques différentes. Insistons une fois encore sur le fait qu'il s'agit de contribuer à la réflexion des enseignants et non de sous-entendre qu'il y a lieu d'expliciter cela aux élèves, ni de suggérer telle ou telle stratégie pédagogique, telle ou telle hiérarchie. Notons aussi que nous laissons de côté d'autres notions, toutes aussi importantes, mais relevant encore d'autres problématiques : paramètres, constantes, …

1) La notion d'inconnue

Attachons-nous pour commencer à un exemple simple, utilisant la très vieille méthode *des fausses suppositions*. Considérons le problème suivant, un classique de l'ancien Certificat d'Études Primaire :

Une couturière fabrique des pantalons et des chemises.
Elle vend les pantalons 2,50 francs pièce et les chemises 1,50 francs pièce.
Sachant qu'elle a vendu cette année 100 pièces et quelle a reçu pour cela 210 francs, combien a-t-elle fabriqué de pantalons et de chemises ?

Comme on sait, le problème possède une « solution raisonnée » :

– La couturière a vendu 100 pièces ; s'il s'agissait de 100 chemises, elle aurait touché 150 francs ($100 \times 1{,}5$).
– Comme elle a touché 210 francs, elle a gagné 60 francs ($210 - 150$) de plus que si elle n'avait fait que des chemises.
– Or, chaque fois quelle vend un pantalon à la place d'une chemise, elle reçoit 1 franc ($2{,}5 - 1{,}5$) de plus.
– Il a donc fallu qu'elle vende ($60 / 1$) soit 60 pantalons (à la place des 60 chemises) pour recevoir les 60 francs supplémentaires ($100 - 60$).
– La couturière a donc vendu 60 pantalons à 2,5 francs et 40 chemises à 1,5 francs. Cela donne bien :

$$60 \times 2{,}5 + 40 \times 1{,}5 = 210.$$

Nous appellerons ce raisonnement la *méthode arithmétique* pour le distinguer comme on le fait classiquement de la *méthode algébrique* :

– Appelons x le nombre de chemises vendues par la couturière et y le nombre de pantalons.
– Comme la couturière a vendu 100 pièces en tout, on a :

$$x + y = 100.$$

– Comme chaque chemise vaut 1,50 francs, les x chemises ont rapporté $x \times 1{,}5$ francs, les y pantalons $y \times 2{,}5$ francs.
– La couturière ayant reçu 210 francs, on a :

$$1{,}5\,x + 2{,}5\,y = 210.$$

– Les nombres x et y cherchés sont donc solutions du système

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 1{,}5x + 2{,}5y = 210 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

Ces étapes franchies – celles de la mise en équation –, nous sommes dans le domaine du calcul littéral. Avant d'y pénétrer davantage arrêtons nous sur le passage du problème concret à sa formulation algébrique. Il met en effet en évidence l'un des points d'ancrage du calcul littéral au calcul numérique : la notions d'*inconnue*.

Malgré sa grande subtilité, la méthode arithmétique ne fait que paraphraser en langage concret la résolution suivante du système (S) :

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 1,5x + 2,5y = 210 \end{cases}$$

d'où on déduit :

$$\begin{cases} 1,5x + 1,5y = 150 \\ 1,5x + 2,5y = 210 \end{cases}$$

puis $y = 60$ qui, utilisé dans $x + y = 100$, fournit $x = 40$.

Mais le parallélisme des deux méthodes ne doit pas masquer leur différence : on a pris dans la deuxième la décision de calculer avec les nombres x et y de chemises et de pantalons sans les connaître. On s'est autorisé à les manipuler sans vergogne dans les opérations et les simplifications susceptibles de faire apparaître les solutions du système en oubliant complètement leur « sens ». Ce serait un lieu commun de souligner la puissance de cette démarche, la méthode arithmétique devenant vite étouffante lorsque les problèmes deviennent quelque peu complexes.

Ce processus d'abstraction qu'est la méthode algébrique est le prix à payer pour la mécanisation de la résolution. Mais ce serait une erreur d'oublier qu'elle repose sur un acte « contre nature », donc difficile à enseigner : en effet, en désignant le nombre inconnu par une lettre, on le manipule de fait comme s'il était connu. Calculer ainsi avec des nombres comme si on les connaissait alors que ce sont précisément ceux que l'on cherche, écrits sous forme de lettres, est une étape importante, aussi bien dans l'histoire des mathématiques que dans le développement de l'enfant. Il convient de la considérer à sa juste valeur si l'on veut maîtriser l'apprentissage du calcul littéral.

Inversement, à travers l'exemple du problème de la couturière, c'est une première lecture possible d'une équation (ou d'un système) qui est mise en évidence : les lettres peuvent y être considérées comme des « inconnues ». Qu'elles proviennent ou non d'un problème concret, elles sont alors pensées comme des nombres précis, désignés provisoirement par des lettres de façon que notre ignorance initiale n'empêche pas de les faire participer, au même titre que les données numériques du problème, à la succession des calculs qui mettront en lumière des relations plus simples.

Attirons l'attention sur le fait que nombre d'élèves ont déjà une perception du couple (équation, inconnue) à travers les « équations à trous », mais il faut précisément noter que le passage du « trou » à la « lettre » n'est pas aussi anodin qu'on veut bien le croire.

2) La notion d'indéterminée

La lecture précédente n'est cependant pas la seule possible.

Pour nous limiter au cas du système (S) rencontré plus haut, il est clair qu'une fois écrites les équations

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 1{,}5x+2{,}5y=210 \end{cases}$$

le problème acquiert une très grande autonomie par rapport à l’énoncé d’origine. Pendant toute la phase de résolution du système (S), la nature des données, les unités dans lesquelles elles étaient quantifiées n’auront plus aucune importance. De même, la méthode utilisée pour conduire les calculs n’aura en fait nul besoin de coller à un quelconque raisonnement arithmétique, comme c’était le cas avec la *méthode des fausses suppositions*. On imaginera en effet sans peine des manières de résoudre (S) où il deviendrait acrobatique ou illusoire de remplacer le traitement algébrique par un raisonnement « concret », en s’interdisant d’utiliser les nombres inconnus x ou y et en s’obligeant à rester à tout moment en prise directe avec des notions définissables dans le contexte de l’énoncé initial.

Une nouvelle différence fondamentale entre *méthode arithmétique* et *méthode algébrique* est en vérité qu’*une difficulté est remplacée par une autre* : à la *combinatoire* du raisonnement concret – qui demande d’agencer des idées en rapport direct avec le nombre réel – succède une *nouvelle combinatoire* beaucoup plus formelle qui nécessite d’enchaîner des opérations élémentaires sur des expressions littérales. Ce nouvel univers a ses règles propres. Il a aussi une logique et une existence didactiques propres particulièrement sensibles dans une multitude d’activités scolaires, comme par exemple les exercices de factorisation d’expressions polynomiales parfois égrenés indéfiniment pour eux-mêmes.

De la même façon, on sait bien que le « théorème » : si $ad - bc \neq 0$, alors

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ed-bf}{ad-bc} \\ y=\dfrac{af-ec}{ad-bc} \end{cases}$$

apporterait sans effort la solution aux multiples soucis de bien des couturières !

Mais les lettres ont acquis entre temps un autre statut : « inconnues » au stade précédent, elles sont devenues désormais des « indéterminées », pour ne pas dire tout simplement des « lettres », et n’ont plus vraiment besoin de représenter des nombres particuliers, encore moins des valeurs privilégiées, précises mais inconnues. Pratiquement, seules les règles de calcul autorisées comptent. Il s’agit d’établir des « identités », des « formules » dans lesquelles la substitution de valeurs numériques constitue une phase secondaire, extérieure en quelque sorte au calcul littéral.

On sait bien entendu, étant donnée la puissance de l’outil algébrique, la place tenue par cet aspect du calcul littéral en mathématiques. Pourtant la place qu’il a prise dans l’enseignement, au détriment trop souvent du moindre raisonnement ou même de la phase de mise en équation, nous paraît excessive mais s’explique sans doute en grande partie par le coté sécurisant, normatif, facilement évaluable de cette *technologie du calcul algébrique*.

Encore convient-il de garder à l'esprit, d'abord qu'il n'est pas si facile pour les élèves d'accepter sans motivations les règles d'un jeu aussi abstrait, ensuite que la puissance de cet outil n'a d'intérêt que dans la mesure où l'on sait le mettre en œuvre dans des problèmes qui, sans être compliqués, ne se réduisent pas à de simples exercices formels.

3. La notion de variable

Si historiquement la lettre est d'abord apparue comme une inconnue, et si, parmi les différents usages qui sont faits des lettres en calcul algébrique, ceux d'inconnue puis d'indéterminée semblent être perçus en premier par l'élève, il nous faut cependant aborder un troisième aspect du calcul littéral, la notion de *variable*.

Pour l'élève, la lettre ne pouvant bien souvent remplacer qu'un nombre singulier, ce passage est difficile. Reprenons par exemple la méthode algébrique de résolution pour le problème de la couturière. Nous aurions pu dire :

– le nombre total N de pièces vendues en un an par la couturière dépend du nombre x de chemises et du nombre y de pantalons. Il est donné par :

$$N = x + y.$$

- de même, la somme P perçue pour la vente de ces pièces est fonction des nombres x et y, et se calcule sous la forme :

$$P = 1{,}5x + 2{,}5y.$$

– le problème revient donc à trouver les valeurs qu'il faut donner à x et y pour avoir :

$$N = 100 \text{ et } P = 210.$$

On aboutit certes au même système (S), mais l'introduction des nouvelle lettres N et P est loin d'être un simple jeu d'écriture. D'abord ces deux lettres ne peuvent en aucun cas bénéficier du statut d'*inconnue* au sens du premier paragraphe ; ensuite les valeurs cherchées pour x et y se trouvent placées dans un très large éventail de valeurs possibles, parmi lesquelles les solutions n'ont plus qu'un intérêt secondaire ; enfin, contrairement au cas des indéterminées, apparaît une hiérarchie faisant que les valeurs de certaines lettres dépendent de celles qui sont affectées aux autres. Le problème de la couturière se trouve tout entier dans la fonction :

$$(x,y) \mapsto (N,P)$$

qui permet d'étudier la portée des hypothèses, pour peu qu'on s'efforce de faire varier x et y, mais on s'éloigne là de ce qu'il est habituel d'enseigner à des débutants en algèbre.

La démarche a changé : le calcul littéral n'est plus ici une fin en soi, il est au service d'une autre notion, celle de *fonction*, et même si celle-ci n'est pas au centre de ce texte, signalons toutefois plusieurs points qui nous paraissent essentiels :

– l'élève rencontre surtout hors de l'enseignement mathématique des relations entre plusieurs variables, et il ne faut pas oublier que privilégier l'une de ces variables, considérer les valeurs prises par une autre, sont des démarches difficiles ;

– les représentations graphiques jouent un rôle fondamental, en particulier pour passer de la fonction « formule », en faisant fonctionner une expression littérale comme un programme de calcul, à la fonction « correspondance arbitraire », et il paraît indispensable de donner aux élèves l'habitude de manipuler conjointement dessins et formules.

C'est alors la fonction qui devient le véritable objet de l'étude et qui entretient des rapports naturels avec le problème concret. On remarquera d'ailleurs ici comme précédemment le passage fréquent par une étape où les lettres perdent pour un temps leur signification « concrète », pour ne la retrouver qu'au moment de la conclusion.

Parallèlement, les lettres acquièrent un nouveau statut. On devra désormais prendre en compte les *variations* des valeurs possibles, leur ordre de grandeur, et leur influence sur l'ordre de grandeur du résultat, l'influence éventuelle de la restriction des variations de x à certains intervalles, pour ne citer que quelques exemples.

Envisageons ces trois aspects du calcul littéral sur un exemple simple. Supposons qu'un problème aboutisse à l'équation :

$$x\,(x+3) = 10 \qquad \text{(E)}$$

Un peu d'habitude pourra amener à écrire plus ou moins directement

$$x\,(x+3) - 10 = x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5).$$

Nous avons eu recours ici au statut d'*indéterminée* pour transformer l'équation (E) et mettre en évidence les solutions. Il est clair que cette factorisation n'aurait eu aucun sens si x devait être pensé, d'un bout à l'autre du calcul, comme égal à une des valeurs inconnues puisque l'on aurait alors factorisé un membre nul !

Cela n'aurait pas été nécessairement le cas si nous avions résolu l'équation (E) en disant :

Soit x la valeur cherchée. Comme

$$x\,(x+3) = 10,$$

on a :

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$$

soit

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

ce qui implique :

$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

etc.

où on est resté dans le registre de l'*inconnue*.

Enfin, par comparaison, le point de vue des fonctions demandera de prendre en compte l'infinité des valeurs possibles de la « variable » x : on décide alors d'étudier directement la fonction :

$$x \mapsto y = x\,(x + 3)$$

pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle prend la valeur 10. Ou, autre stratégie, chercher l'intersection des courbes d'équations :

$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = 10 - 3x.$$

II. Quelques suggestions, quelques exemples

Nous devons constater que nombre d'élèves ont des difficultés à maîtriser le calcul littéral élémentaire et ne franchissent pas le passage à l'algèbre dont il est question plus haut. Les conditions actuellement difficiles de l'enseignement (effectifs, hétérogénéité, horaires insuffisants, …) ne facilitent pas les choses, mais au-delà de ce contexte il s'agit de toute façon d'une des difficultés majeures de l'apprentissage des mathématiques du collège et du lycée. Il ne faut donc pas s'étonner si beaucoup auront besoin de périodes de maturation plus ou moins longues à différents niveaux d'approfondissement et si à des périodes de progrès peuvent succéder des périodes de stagnation, voire de recul, d'où l'importance d'un suivi et d'un réinvestissement de ces acquisitions sur des périodes assez longues de la scolarité.

Quelques « conseils » dont on peut imprégner les élèves à des niveaux divers :

– *passer des lettres aux nombres :*
  - – vérifier les étapes d'un calcul littéral en donnant des valeurs numériques particulières aux lettres,
  - – vérifier la solution d'une équation,
  - – lorsque deux expressions algébriques sont trouvées égales (à la suite d'un développement, d'une factorisation, …), faire un programme de calcul pour chacune d'elles et vérifier que ces deux programmes donnent les mêmes résultats pour différentes valeurs numériques données aux lettres ;

– *passer des nombres aux lettres :*
  - – lorsqu'un même calcul doit être effectué pour différentes valeurs d'une grandeur, repérer où intervient cette grandeur et la remplacer par une lettre (ceci est détaillé dans les deux exemples qui suivent) ;
  - – vérifier une conjecture en utilisant des lettres :
    par exemple, si je prends trois nombres consécutifs
    - • le carré de celui du milieu diminué du produit des deux extrêmes semble me donner toujours un résultat égal à 1,
    - • la différence des carrés des termes extrêmes semble être toujours égale à quatre fois le terme du milieu ;

– *se poser et résoudre des problèmes dont la solution arithmétique est complexe :*
  - – l'inconnue intervient des deux côtés du signe = (Exemple : on a multiplié un nombre par 1,5, on a retranché 5 au résultat, on trouve alors le nombre dont on est parti ; quel est ce nombre ?),

– il y a deux inconnues,

– l'équation est de degré supérieur à 1 ;

– entraîner les élèves au calcul littéral dans des cas suffisamment simples pour se prêter facilement à des vérifications et qui vont effectivement servir dans des problèmes rencontrés à ce niveau.

Mais, comme pour tous les grands paliers de l'activité mathématique où l'hétérogénéité des modes d'appropriation est considérable, il est essentiel que l'enseignement sache « laisser du temps au temps » : c'est une affaire de programmes, c'est aussi une affaire de pratique pédagogique.

Venons-en à quelques exemples. Supposons qu'on propose à l'élève le problème suivant :
Un rectangle a une largeur de 5 cm ; on augmente sa longueur de 8 cm, on obtient alors un rectangle d'aire 87 cm^2. Quelle est la longueur du rectangle initial ?

Souvent, l'élève reste bloqué, et souvent ce blocage est dans un premier temps dû à une mauvaise compréhension de l'énoncé, et un travail préalable de *reformulation* est nécessaire. On peut ensuite lui proposer une démarche *expérimentale* :

– Donner à ce rectangle une longueur quelconque, le dessiner, ainsi que le deuxième rectangle, et calculer l'aire du second. Si on a par exemple une longueur de 10 cm, on obtient : $18 \times 5 = 90$.

– On peut alors demander d'où vient la valeur 18. C'est 10 + 8, d'où l'écriture :

$$(10 + 8) \times 5 = 90.$$

Avec 7 cm, on obtient : $(7 + 8) \times 5 = 75$, etc.

– On peut ici faire pointer quelle est la valeur qui *varie* d'un calcul à l'autre, et la remplacer par x pour obtenir une formule valable pour tous les calculs :

$$S = (x + 8) \times 5.$$

– On pourra ensuite rassembler les résultats dans un tableau et faire une représentation graphique.

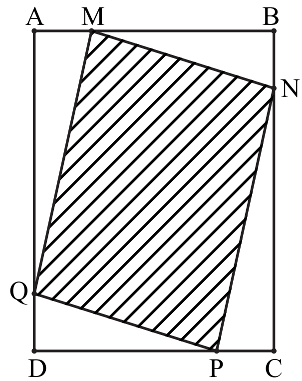
– On écrira enfin l'équation du problème :

$$(x + 8) \times 5 = 87$$

qu'on pourra d'abord résoudre de façon approchée à l'aide du tableau ou de la représentation graphique.

L'idée de faire « varier » la longueur va probablement faciliter le passage vers les fonctions et l'appropriation de la démarche algébrique : « appelons x la longueur cherchée… ».

Si la notion de variable ne semble pas s'imposer complètement au collège, elle est omniprésente au lycée. Or, nombre d'élèves arrivent en seconde avec de grosses difficultés dès qu'il s'agit de lettres, spécialement comme variables. Voici un exemple qui peut permettre d'amener cette notion et de la rattacher aux questions de formules algébriques, représentations graphiques, programmes de calcul. Cet exemple est tiré d'un exercice figurant dans le fascicule « Faire des Mathématiques en Classe de Seconde » de 1'I.R.E.M. de Poitiers.



ABCD est un rectangle de dimensions :

$$AB = 3$$

$$BC = 4$$

M, N, P, Q sont quatre points tels que :

$$AM = BN = CP = DQ = x.$$

Calculer x pour que MNPQ ait une aire égale à 9.

Très souvent, devant un tel problème, les élèves ne font rien. On peut alors dégager quelques étapes significatives :

– *une phase d'exploration numérique à connotation fonctionnelle :*

- On peut donner à chaque élève une valeur différente de AM et leur demander de calculer l'aire hachurée.
- Ensuite, on rassemblera les résultats dans un tableau, puis on fera une représentation graphique où chaque élève aura « son » point. On pourra déjà répondre de façon approchée à la question posée.
- On pourra aussi demander « Comment avez-vous calculé cette aire ? » Sans effectuer les calculs, voici ce que l'élève pour lequel AM = 0,5 peut répondre :

$$\text{aire AMQ} = \frac{0{,}5 \times 3{,}5}{2}$$

$$\text{aire CNP} = \text{aire AMQ}$$

donc

$$\text{aire AMQ} + \text{aire CNP} = 0{,}5 \times 3{,}5.$$

- D'où vient cette valeur : 3,5 ? C'est (4 – 0,5), et la somme de ces deux aires est :

$$0{,}5 \times (4 - 0{,}5).$$

On opère de même pour les deux autres rectangles : 0,5 × (3 – 0,5), puis on fait la somme :

$$0{,}5 \times (4 - 0{,}5) + 0{,}5 \times (3 - 0{,}5),$$

qu'on retranche de 12, pour obtenir :

$$12 - [0{,}5 \times (4 - 0{,}5) + 0{,}5 \times (3 - 0{,}5)]$$

- Faire remarquer la valeur qui varie d'un calcul à l'autre, la faire souligner.

– *une phase d'algébrisation* à partir de la mise en évidence de l'ossature commune des calculs précédents.

On est en mesure de donner la formule algébrique :

$$12 - [x\,(4 - x) + x\,(3 - x)].$$

L'avantage d'une telle formule est qu'elle va permettre, à l'aide des règles du calcul algébrique, d'être transformée.

– *le registre formel*.

La lettre devient alors une indéterminée, et on obtient ainsi :

$$2x^2 - 7x + 12.$$

Chaque terme ne représente plus rien de concret (perte de sens), mais le calcul sera plus rapide, plus condensé.

Chaque élève peut être invité à vérifier cette formule pour « sa » valeur de x.

On peut résoudre le problème posé en étudiant la *fonction* :

$$x \mapsto 2x^2 - 7x + 12.$$

On peut aussi le résoudre en résolvant l'*équation* :

$$2x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Il existe, bien sûr, de nombreux exemples à fabriquer sur cette idée.

III. Remarques historiques

L'idée de travailler avec une inconnue (de nature géométrique ou numérique) en la manipulant comme un objet connu est la base de la méthode d'analyse opposée à la synthèse dans la mathématique grecque (cf. préface du livre VII de Pappus). Diophante d'Alexandrie (3^{e} siècle ?), dans ses Arithmétiques, désigne l'inconnue du problème par le mot $\alpha\rho\iota\theta\mu o\zeta$ (« nombre (inconnu) ») et ses puissances reçoivent des désignations particulières ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$, $\kappa\upsilon\beta o\zeta$) pour carré et cube, etc. Dans les manuscrits, ces mots sont généralement abrégés par des signes conventionnels, mais il ne faut pas y voir un véritable symbolisme algébrique.

L'algèbre proprement dite a été inventée au neuvième siècle par al-Khwarizmi. Son traité introduit le concept fondamental d'équation et développe une théorie des équations de degré 1 ou 2 ; le terme connu y est compté en dirham, l'inconnue s'appelle la *chose* et son carré le *bien* (la *richesse*). Les termes sont répartis de part et d'autre du mot « égale » de manière que tous les coefficients soient positifs, le tout s'exprimant sous forme d'un discours. Exemple : « un bien et trois choses sont égales à cinq » pour l'équation $x^2 + 3x = 5$. La théorie s'applique aussi bien à des problèmes arithmétiques (où la chose est un nombre) qu'à des problèmes géométriques (où la chose est, par exemple, la longueur d'un segment ou encore une aire).

Les générations suivantes ont enrichi l'algèbre avec les puissances supérieures de l'inconnue et en particulier l'étude des équations du troisième degré. En l'absence de méthode algébrique de résolution (comme pour le degré 2), les mathématiciens arabes du douzième siècle ont développé des méthodes géométriques de résolution (intersection de coniques) ainsi que des méthodes numériques approchées (type « Ruffini-Horner »). Ainsi Omar Khayyam assimile les grandeurs géométriques de diverses espèces (longueurs, aires, volumes) à une même grandeur de référence, la longueur d'un segment, une unité ayant été choisie, processus qui sous-entend une *numérisation* du problème. Ainsi un segment de longueur 1 peut aussi être considéré comme représentatif d'un rectangle d'aire 1. À côté de la théorie des équations, s'est développé, dès le dixième siècle, un calcul sur les polynômes par analogie avec le calcul sur les entiers ; un polynôme est noté par un tableau présentant la liste des coefficients des puissances successives. Dans ce type de calcul, il n'y a pas d'inconnue à rechercher : nous sommes dans un contexte d'*indéterminées* comme pour des polynômes.

À la même époque, on rencontre aussi en Inde et en Chine des pratiques de nature algébrique, avec le concept d'inconnue et la résolution d'équations algébriques (degré 2 en Inde, résolu algébriquement ; degré quelconque dans la Chine du treizième siècle, résolu numériquement par la méthode de Ruffini-Horner). Contrairement à la tradition arabe, on utilise sans réticence les coefficients négatifs.

Le Moyen Âge européen est l'héritier de l'algèbre arabe ; elle faisait partie des pratiques enseignées et développées par les *maestri d'abaco* du nord de l'Italie (14e-16e siècles). Ce développement a conduit, au début du seizième siècle, à la découverte de la résolution algébrique des équations de degré 3 et 4 (Scipione del Ferro, Ferrari). L'inconnue s'appelle encore la « chose » (italien *cosa*, d'où en allemand *Coss*, en latin *res* ; Cardan dira aussi *positio*), son carré le « cens » (italien *censo*, latin *census*, allemand *Zensus* ; chez Cardan *quadratum*) et son cube le « cube ». Chaque auteur choisissait un système d'abréviations pour ces termes et pour les opérations auxquelles ils sont soumis. La notation exponentielle des puissances apparaît d'abord chez N. Chuquet (Triparty en la science des nombres, 1484). Elle trouve peut-être son origine dans la pratique des tableaux arabes. On la retrouve chez Bombelli (1572), puis chez Stevin et A. Girard au début du dix-septième siècle.

Un pas nouveau sur la voie du symbolisme algébrique est franchi par F. Viète (In artem analyticem, 1591). Celui-ci cherchait à reconstituer l'analyse des anciens Grecs en prenant Diophante comme modèle. Il distinguait trois étapes : la zététique, consacrée à la mise en équation du problème ; la poristique, étudiant la vérité du résultat à partir de l'équation ; l'exégétique ou méthode de résolution des équations. Quand il traitait d'équations numériques, il notait l'inconnue N (numerus), son carré Q (quadratus), etc. ; par exemple *1Q+2N aequatur 20* pour $x^2 + 2x = 20$. Mais à côté des calculs numériques (logistica numerosa), il a développé une algèbre littérale (logistica speciosa) où il notait par des voyelles A, E, I, etc. des quantités inconnues et par des consonnes B, C, D, etc. des quantités connues mais non spécifiées : par exemple *A quad.+B2 in A aequatur C plano* est l'équation que nous écririons aujourd'hui $x^2 + 2bx = c$. Les quantités considérées par Viète sont toujours géométriques, de diverses espèces : longueurs, aires, volumes, et il impose à toutes ses expressions la loi d'homogénéité (ainsi, dans l'équation précédente, tous les termes représentant des aires si A est une longueur inconnue ; les coefficients B et C sont donc respectivement une longueur et une aire, d'où le qualificatif plano accolé à C).

Cette algèbre littérale a permis d'explorer les relations entre les coefficients et les racines ; Viète énonce ces relations pour les degrés ne dépassant pas 5 et A. Girard (Invention nouvelle en l'Algèbre, 1629) les donne en toute généralité. Ceci le conduit à concevoir que toute équation de degré n a n racines, pas forcément toutes réelles :

en vue d'avoir des énoncés généraux, il introduit des racines « impossibles » en les notant par des lettres sur lesquelles on calcule comme s'il s'agissait de quantités réelles.

Descartes était arrivé à une formulation analogue, on la trouve dans sa Géométrie (1637), où sont utilisées des notations pratiquement identiques à celles que nous avons conservées : les inconnues sont notées par les dernières lettres de l'alphabet x, y, z, tandis que les paramètres (quantités connues mais non spécifiées) sont notées par les lettres du début : a, b, c ou du milieu : f, g, h ou m, n, p. Les puissances sont écrites exponentiellement : xx pour x^2, puis x^3, x^4, etc. Descartes invente la méthode des coefficients indéterminés pour résoudre l'équation de degré 4 (en écrivant un polynôme de degré 4 comme produit de deux polynômes de degré 2 dont il faut chercher les coefficients) ; cette méthode met en évidence le caractère tout à fait relatif de la distinction entre *inconnue* et *paramètre*. Les quantités considérées par Descartes sont toujours géométriques, mais il montre comment on peut toujours les représenter par des segments une fois que l'unité de longueur a été choisie. C'est une étape essentielle dans la voie de la numérisation du continu.

Les notations de Descartes ont été reprises par les créateurs du calcul différentiel et intégral, Newton et Leibniz. Dans ce calcul, x, y ou z ne sont plus des inconnues que l'on recherche, mais plutôt des indéterminées ou des variables que l'on manipule et qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Newton enrichit le calcul des polynômes en l'étendant au calcul des séries entières (Methodus fluxionum et serierum infinitarum, 1671) ; sa conception des quantités fluentes est proche de notre idée de variable et de fonction. Le terme même de fonction a été introduit par Leibniz (1692), puis précisé par Jean Bernoulli (1718) et par Euler (1748) qui en a fait le concept fondamental du calcul infinitésimal.

Dans sa première conception, Euler considère qu'une *variable* est une quantité indéterminée ou universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées (y compris imaginaires). Géométriquement, une *variable* est représentée par un point de la droite. Une *fonction* d'une variable est une « expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité et de nombres ou de quantités constantes ». Géométriquement, elle est représentée par sa courbe dans le plan. Des problèmes de physique mathématique l'ont conduit à une autre conception, moins formelle, selon laquelle une fonction est définie par sa courbe, « décrite par le tracé libre de la main ». La réconciliation de ces deux conceptions a été un des problèmes fondamentaux de l'Analyse mathématique jusqu'au début du vingtième siècle.