Donner du sens au calcul algébrique en classe de seconde

Rémy Bellœil

Résumé :
Que signifie donner du sens au calcul algébrique ?
Que faire lorsque l'on constate une telle lacune parmi ses élèves de seconde ?
Cet article raconte ce que j'ai fait pour essayer de remédier à cette situation.
Les quatre annexes sont les activités ou les recherches menées dans cette classe.

Au cours de l'année scolaire 2001/2002, j'ai été particulièrement surpris du manque de signification du calcul algébrique pour les élèves de ma classe de seconde. Certes, il s'agissait d'une classe à option IGC ce qui n'est pas en général le signe d'une grande culture mathématique, cela n'empêchera pas plusieurs d'entre eux de postuler pour l'entrée dans une première S, et pour les autres, la nécessaire utilisation de formules explicites, voire implicites dans l'utilisation d'un tableur.

Les résultats des évaluations internationales montrent aussi que nos élèves manquent d'initiatives en mathématiques. Face à cela, j'ai voulu proposer à mes élèves des exercices concrets pour les amener à mieux comprendre le rôle du calcul littéral. Bien sûr, il y a eu aussi des exercices répétitifs classiques, et dans le cadre de l'aide individualisée j'ai dû rappeler à un élève que l'utilisation de la calculatrice ne dispensait pas d'apprendre ses tables de multiplication. Je passe aussi sur les activités et exercices classiques de comparaison de tarifs, de lecture de graphiques que l'on trouve dans tous les manuels.

La première activité algébrique que je vous propose, a été demandée en dehors des cours (annexe 1). Elle consiste en un problème de trains. Elle est évidemment une représentation très simplifiée de la réalité puisque les trains y roulent à une vitesse uniforme de 100 km/h, sans accélérations ni ralentissements (autrement dit, la vitesse moyenne arrondie remplace la vitesse réelle). En dépit des indications supplémentaires fournies en classe, il m'a fallu réaliser le graphique avec les élèves pour qu'ils aboutissent à quelque chose. Impossible ensuite d'obtenir une véritable mise en forme des résultats, sauf à leur dicter pas à pas ce qu'il fallait écrire. Cette activité du premier trimestre m'avait passablement inquiété alors qu'elle ne me semblait pas très éloignée de ce qui est demandé au brevet des collèges. Bien sûr, on peut trouver des raisons dans l'intervention de la variable de temps qui n'est pas facile à utiliser, dans la conversion d'une vitesse de km/h en km/min et des coefficients non entiers (tous les trains ne roulent pas à 60 ou 120 km/h !). En fait, elle montre essentiellement que les élèves de seconde ne sont généralement pas capables en début d'année de définir une fonction pour résoudre un problème de rencontre de trains.

Après avoir travaillé sur la notion de fonctions et de proportionnalité, j'ai proposé la deuxième activité (annexe 2) dont le but est de faire le lien entre des formules ou des situations classiques et la notion de fonction. Cette activité a été perturbée par des mouvements de grève des lycéens dans mon établissement. Cependant, j'en garde l'impression que quelques élèves ont su répondre correctement ; cela reste inquiétant pour la majorité, mais cela m'a quand même rassuré. Il me semble que répondre correctement à ces questions est un objectif raisonnable pour la classe de seconde.

Les devoirs communs à toutes les classes de seconde font souvent intervenir des figures géométriques comportant une longueur x qu'il faut utiliser pour calculer une aire et pour laquelle on cherche graphiquement un minimum ou un maximum. Nous avons donc mené quelques activités de ce type que l'on peut trouver dans les manuels. Même si elles sont indispensables à la formation, elles apparaissent aux élèves comme des exercices scolaires sans aucune autre signification.

Dans le même temps, j'ai lu dans la presse les comptes-rendus des évaluations internationales et j'ai cherché à mieux comprendre cette « absence d'initiatives des élèves français en mathématiques ». J'ai alors proposé l'activité pommiers et conifères pendant 2 heures en classe (annexe 3). Il s'agit de prévoir l'évolution du quotient du nombre de pommiers répartis dans un carré par rapport au nombre de conifères situés sur les côtés de ce carré. Il est apparu clairement que la notion de variable n'était toujours pas assimilée. Dans un premier temps les élèves n'ont pas compris que la figure proposée n'était qu'un cas parmi d'autres et qu'il fallait réaliser d'autres figures pour comprendre le problème et non pas lire seulement le résultat sur celle-ci. Puis beaucoup ont cru spontanément à la proportionnalité entre le nombre de pommiers ou de conifères et la longueur du côté du carré. Après avoir demandé et organisé la réalisation de plusieurs figures, et écrit au tableau les résultats dans chaque cas, l'idée que le nombre de pommiers était lié au carré de la longueur du côté du verger est apparue, ainsi que l'utilisation d'une formule. L'intérêt de l'introduction d'une variable numérique pour résoudre le problème est enfin constaté et a été noté. L'utilisation plus systématique du logiciel Géoplan aurait-elle permis un meilleur détachement par rapport à la figure initiale ? Certains de mes collègues ayant davantage travaillé dans cette voie, c'est avec cette idée que j'ai conçu l'activité suivante.

L'activité présentée dans l'annexe 4, a été proposée comme une narration de recherche. Autrement dit, j'attendais surtout des élèves qu'ils écrivent ce qu'ils avaient essayé de faire plus que le résultat lui-même (qui en fait n'est accessible que par lecture graphique). Le travail a été donné avant les vacances de février, puis réclamé avec encore une semaine de délai après ces vacances. Au retour des vacances, quatre élèves (sur 34) avaient manifestement travaillé sur le problème. L'une a pensé utiliser l'arithmétique pour décomposer un nombre représentant l'aire d'un rectangle et retrouver ainsi des dimensions entières. Idée astucieuse que j'ai montré à toute la classe en indiquant pourquoi elle ne pouvait répondre au problème. L'un des défauts évident pour moi, mais que je n'ai pas signalé, était justement l'absence d'utilisation d'une lettre. Une autre avait commencé des calculs algébriques délicats faute d'une variable adaptée. En présentant ces exemples et en les commentant un peu, puis en laissant encore un peu de temps aux élèves, j'espérais qu'ils auraient compris ce que j'attendais d'eux sur la base des exemples. Une autre élève m'a présenté des calculs, sans doute faits par quelqu'un de sa famille avec utilisation des formules du trinôme, en me disant qu'elle ne les avait pas compris. Elle avait cependant fait des calculs algébriques sans réussir à aboutir. Je l'ai incitée à mettre au clair ce qu'elle avait fait en lui assurant que je ne lui en demandais pas plus. Un élève postulant pour une première scientifique a demandé « Peut-on utiliser des lettres pour faire des calculs ? ». Je lui ai conseillé de relire les conclusions des activités que nous avions faites qui pourraient lui sembler du même type que ce problème. Une semaine plus tard, les exemples que j'avais montrés ont été copiés, déformés, rarement améliorés sans qu'il y ait eu davantage de travail de recherche. Et l'idée de l'introduction d'une lettre pour faciliter la résolution d'un problème ne semblait pas avoir beaucoup progressé. Deux élèves ne m'ont toujours rien rendu dont une ira en première scientifique (contre mon avis).

En conclusion, prendre l'initiative d'introduire une lettre ou une fonction pour résoudre un problème est loin d'être une évidence pour les élèves de seconde. Pour développer cette capacité, les activités que je propose sont des outils qui nécessitent d'être modifiés pour s'adapter aux élèves de la classe. Je voudrais insister sur l'importance de soumettre aux élèves, dans le courant de la classe de seconde, des problèmes où les variables et les fonctions ne sont pas données au départ dans l'énoncé. Bien entendu, l'élève ne progressera que s'il accepte de s'impliquer personnellement dans la recherche de la solution du problème.

Annexe 1

Les gares de Rennes et du Mans sont distantes de 150 km.
À midi (0 h), un train « Rapido » part de Rennes pour aller au Mans sans arrêt à la vitesse de 100 km/h.
Il s'arrête pendant 5 minutes et revient à Rennes à la vitesse de 120 km/h.
Un autre train « Expresso » part du Mans à 1h de l'après-midi pour rejoindre Rennes à la vitesse de 100 km/h.
Par ailleurs « Rapido » croise (ou dépasse) un train de marchandises à 1 h et à 2 h 30 min.

a) Faire un graphique pour déterminer à quelle heure, et où, les trains « Rapido » et « Expresso » vont se croiser.
Définir précisément les fonctions utilisées, leurs expressions et leurs intervalles de définition(*).

b) Déterminer par le calcul à quel instant et à quelle distance de Rennes, les trains « Rapido » et « Expresso » vont se croiser.

c) Dans quel sens va le train de marchandises ? Quelle est sa vitesse ? À quelle heure arrivera-t-il à la prochaine gare ? À quelle heure est-il parti de l'autre gare ?

d) À quelle heure « Expresso » a-t-il croisé le train de marchandises ?

(*) Il sera sans doute plus commode d'écrire les temps en minutes et les vitesses en km/min.
Pour le graphique, on prendra un petit carreau pour 5 minutes.

Éléments de réponse

a) Soit f la fonction qui à l'instant t en minutes associe la distance entre le train « Rapido » et la gare de Rennes en km.
Pour parcourir les 150 km de Rennes au Mans, à la vitesse de 100 km/h, il lui faudra 1,5 h soit 90 min.

Sa vitesse en km/min sera : $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$.

Ainsi sur l'intervalle [0 ; 90], $f(t) = \frac{5}{3}t$.

Sur [90 ; 95], $f(t) = 150$.
Pour parcourir les 150 km à la vitesse de 120 km/h, soit 2 km/min, il lui faudra 75 min.
Ainsi sur [95 ; 170], $f(t) = 150 - 2(t - 95) = -2t + 340$.
Finalement f est définie sur [0 ; 170] avec trois formules différentes.

Soit g la fonction qui à l'instant t en minutes associe la distance entre le train « Expresso » et la gare de Rennes en km.
À la vitesse de 100 km/h, il faudra 90 min au train « Expresso » pour atteindre la gare de Rennes.

g est définie sur [60 ; 150] par $g(t) = 150 - \frac{5}{3}(t - 60) = 250 - \frac{5}{3}t$.

b) D'après le graphique, les trains se croisent à un instant t compris dans l'intervalle [0 ; 90].
Pour déterminer t par le calcul, il suffit de résoudre :

$$\frac{5}{3}t = 250 - \frac{5}{3}t.$$

Ce qui conduit à $t = 75$, puis $f(75) = 125$. Ainsi les deux trains se croisent à 1 h 15min à 125 km de Rennes.

c) Ayant placé sur le graphique les deux points de rencontre entre le train Rapido et le train de marchandises, on constate que celui-ci se dirige vers Rennes.
$f(60) = 100$ et $f(150) = 40$.

Donc le train de marchandises a parcouru 60 km en 90 min, soit $\frac{2}{3}$ km/min ou 40 km/h.
À $t = 150$, il lui reste 40 km à parcourir pour atteindre Rennes, il y arrivera donc 60 min plus tard, à $t = 210$, c'est-à-dire à 3 h 30 min.

À $t = 50$, il avait déjà parcouru 50 km, ce qui lui avait demandé 50 : (2/3) = 75 min, il était donc parti de Le Mans à midi moins 25.

d) Soit h la fonction qui à l'instant t en minutes associe la distance entre le train de marchandises et la gare de Rennes en km.

$$h(t) = 100 - \frac{2}{3}(t - 60) = 140 - \frac{2}{3}t.$$

On résout $h(t) = g(t)$, ce qui équivaut à $140 - \frac{2}{3}t = 250 - \frac{5}{3}t$ et à $t = 110$.

Le train « Expresso » dépasse le train de marchandises à 1h 50min (et à $\frac{200}{3} \approx 67$ km de Rennes).

Commentaires

On peut aussi suggérer aux élèves de choisir un petit carreau pour 5 km, ce qui facilitera la lecture des coefficients directeurs. En fait, si les élèves n'ont pas déjà vu un certain nombre de définitions de fonctions, il faut les aider pour la première question ; par exemple, en leur proposant plusieurs définitions possibles. Ils pourront ainsi prendre conscience qu'une définition par la distance parcourue en fonction du temps écoulé depuis le départ n'est d'aucune utilité pour trouver où et quand les trains se croisent.

Annexe 2

Compléter le tableau suivant et faire un graphique pour chaque fonction.

Fonction étudiée. Soit f la fonction qui représente :	N°	Intervalle I et schéma $x \mapsto y$	**Fonction Affine**		**Non Affine**	**Variations**		
			Proportionnalité	Non Prop.		Croissante sur I	Décroissante sur I	Autre
le Volume d'eau, en cm^3, en fonction de la hauteur h, en cm, de l'eau dans un récipient cylindrique d'une hauteur totale de 20 cm.	1							
le Volume d'eau, en cm^3, en fonction de la hauteur h, en cm, de l'eau dans un verre à pied conique d'une hauteur totale de 5 cm	2							
la distance D, en m, parcourue par un véhicule qui se déplace à la vitesse constante de 90 km/h pendant 1 heure en fonction du temps t, en minutes, depuis le départ.	3							
la distance D, en m, qui reste à parcourir d'un véhicule qui se déplace sur une ligne droite à la vitesse constante 90 km/h pendant 1 heure en fonction du temps t, en minute, depuis le départ.	4							
la distance D, en m, parcourue par une rame de métro d'une station à une autre en fonction du temps t en secondes, avec une accélération pendant 15 secondes, une vitesse constante pendant 30 secondes et une décélération pendant 15 secondes.	5							
l'altitude h (en cm) par rapport au sol d'un objet lâché sans vitesse et qui tombe pendant 3 secondes, en fonction du temps écoulé depuis le lâcher (en s).	6							
dans un magasin donné, le prix p (en euro) des carottes en fonction de la masse m (en kg) pour une quantité inférieure ou égale à 20 kg.	7							
la hauteur h en cm de la mer à Saint-Malo par rapport au niveau de référence des cartes, en fonction de l'heure t entre minuit et midi.	8							
la hauteur h, en cm, de mercure dans un thermomètre gradué de -5 à 50, en fonction de la température t en °C.	9							
l'angle géométrique A (en degrés) entre les aiguilles d'une montre entre minuit et 2 heures en fonction du temps t (en minutes).	10							
l'angle géométrique A (en degrés) entre les aiguilles d'une montre entre minuit et minuit 30 en fonction du temps t (en minutes).	11							

Éléments de réponse

Fonction étudiée. Soit f la fonction qui représente :	N°	Intervalle I et schéma $x \mapsto y$	**Fonction Affine** Proportionnalité	**Fonction Affine** Non Prop.	**Non Affine**	**Variations** Croissante sur I	**Variations** Décroissante sur I	**Variations** Autre
le Volume d'eau, en cm^3, en fonction de la hauteur h, en cm, de l'eau dans un récipient cylindrique d'une hauteur totale de 20 cm.	1	[0 ; 20] $h \mapsto V$	Oui	Oui		Oui		
le Volume d'eau, en cm^3, en fonction de la hauteur h, en cm, de l'eau dans un verre à pied conique d'une hauteur totale de 5 cm	2	[0 ; 5] $h \mapsto V$			Oui	Oui		
la distance D, en m, parcourue par un véhicule qui se déplace à la vitesse constante de 90 km/h pendant 1 heure en fonction du temps t, en minutes, depuis le départ.	3	[0 ; 60] $t \mapsto D$	Oui	Oui		Oui		
la distance D, en m, qui reste à parcourir d'un véhicule qui se déplace sur une ligne droite à la vitesse constante 90 km/h pendant 1 heure en fonction du temps t, en minute, depuis le départ.	4	[0 ; 60] $t \mapsto D$		Oui			Oui	
la distance D, en m, parcourue par une rame de métro d'une station à une autre en fonction du temps t en secondes, avec une accélération pendant 15 secondes, une vitesse constante pendant 30 secondes et une décélération pendant 15 secondes.	5	[0 ; 3] $t \mapsto h$			Oui		Oui	
l'altitude h (en cm) par rapport au sol d'un objet lâché sans vitesse et qui tombe pendant 3 secondes, en fonction du temps écoulé depuis le lâcher (en s).	6	[0 ; 20] $m \mapsto p$			Oui		Oui	
dans un magasin donné, le prix p (en euro) des carottes en fonction de la masse m (en kg) pour une quantité inférieure ou égale à 20 kg.	7	[0 ; 12] $t \mapsto h$	Oui	Oui		Oui		
la hauteur h, en cm, de la mer à Saint-Malo par rapport au niveau de référence des cartes, en fonction de l'heure t entre minuit et midi.	8	[0 ; 12] $t \mapsto h$			Oui			Oui
la hauteur h en cm du mercure dans un thermomètre gradué de –5 à 50, en fonction de la température t en °C.	9	[–5 ; 50] $t \mapsto h$	Oui	Oui		Oui		
l'angle géométrique A (en degrés) entre les aiguilles d'une montre entre minuit et 2 heures en fonction du temps t (en minutes).	10	[0 ; 120] $t \mapsto A$			Oui			Oui
l'angle géométrique A (en degrés) entre les aiguilles d'une montre entre minuit et minuit 30 en fonction du temps t (en minutes).	11	[0 ; 30] $t \mapsto A$	Oui	Oui		Oui		

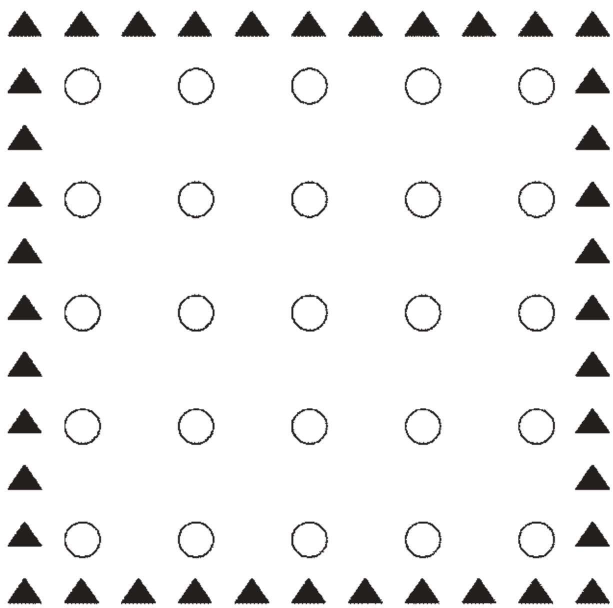
Commentaires

L'idée est de relier les notions de fonctions, de graphiques, de proportionnalité ou non, dans des cas concrets pour permettre aux élèves d'effectuer plus facilement des transferts d'une discipline à l'autre, avec la Physique notamment. En Physique les phénomènes linéaires regroupent toutes les fonctions affines. C'est pourquoi il n'est pas question de fonctions linéaires dans ce tableau mais de proportionnalité. Il ne s'agit pas de remettre en cause la définition de fonction linéaire, et son intérêt en mathématique. Il est donc souhaitable de discuter avec le professeur de Physique et de préciser aux élèves que le mot « linéaire » a un sens différent en Mathématique et en Physique.
Après avoir débuté l'activité en classe et demandé aux élèves de terminer en réalisant des graphiques « possibles », il peut être utile de leur proposer, pour la correction, une série « classique » de graphiques à associer à des fonctions.

Annexe 3

Un agriculteur construit des vergers carrés entourés de conifères. Pour protéger efficacement les pommiers du verger contre le vent, la distance entre deux conifères doit être de 1 mètre. Pour fournir une bonne production, les pommiers doivent être distants de 2 mètres les un des autres, et de 1 mètre des conifères.

Le dessin ci-dessous montre la disposition du verger pour un carré de 10 m de côté ; les conifères sont représentés par des triangles et les pommiers par des cercles.



La question est de savoir comment évolue le nombre de pommiers par rapport à celui des conifères lorsque le côté du carré augmente à partir de 10 m.

Plusieurs réponses sont proposées :
A. Il augmente jusqu'à 2 pommiers pour 1 conifère.
B. Il diminue jusqu'à 1 pommier pour 2 conifères.
C. Il reste à peu près égal à 5 pommiers pour 8 conifères.
D. Il augmente même au delà de 2 pommiers pour 1 conifère.
E. Il diminue même en dessous de 1 pommier pour 2 conifères.
Donnez votre réponse, éventuellement distincte des réponses proposées, et justifiez-la.

Éléments de réponse

Sur la figure fournie, il y a 40 conifères et 25 pommiers, soit un rapport de 25/40 = 5/8 pommier par conifère.
Si l'on double la longueur du côté, on obtient 80 conifères pour 100 pommiers.
Si le côté mesure $2n$ mètres (n entier naturel supérieur ou égal à 5), on obtiendra $4 \times 2n$ conifères pour n^2 pommiers.
Le rapport du nombre de pommiers par conifère est donc $n^2/(8n) = n/8$. Ce rapport augmente lorsque le côté du carré augmente et dépasse 2 dès que n dépasse 16, c'est-à-dire dès que le côté du carré dépasse 32 m. La bonne réponse est la réponse D.

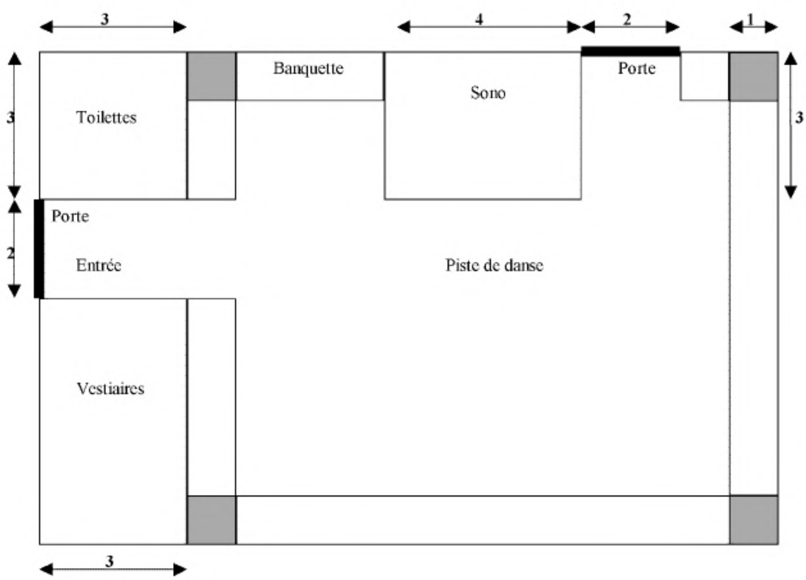
Commentaires

Ce travail, inspiré par un résultat d'enquête internationale, a été réalisé en classe, les élèves cherchant d'abord seuls puis en discutant avec leurs voisins. Bien que ce travail ait été réalisé après que les élèves aient travaillé sur la notion de fonction, y compris avec des exemples concrets, ils n'ont pas perçu véritablement la variable, et surtout, ils n'ont pas fait spontanément de nouveaux dessins. Pour la plupart, il semblait évident que doubler la longueur du côté doublerait le nombre de conifères et le nombre de pommiers, et cela même si plusieurs d'entre eux connaissaient la propriété : « Lorsqu'on multiplie la longueur du côté d'un carré par k, son aire est multipliée par k^2 ». Ici le nombre de conifères est à peu près proportionnel à la longueur du côté du carré et le nombre de pommiers à l'aire de ce carré (pour être sûr d'obtenir une relation proportionnelle, on peut préciser que le longueur du côté du carré est un nombre pair de mètres).
Une étape importante dans la résolution est donc la réalisation d'une figure correcte avec un côté plus grand. Au bout d'un certain temps de recherche, on pourra organiser des réalisations de ces figures avec 16 m, 20 m, 24 m, … en distribuant le travail et noter en retour le nombre d'arbres de chaque type pour chaque longueur proposée. Les élèves peuvent alors trouver facilement les formules et le rapport. Le but de l'activité est que les élèves eux-mêmes passent de l'aspect numérique à l'aspect littéral, c'est-à-dire qu'ils décident de donner un nom à la longueur du côté (ou la moitié s'ils sont astucieux) et qu'ils s'en servent pour répondre au problème posé. Ainsi le professeur doit pousser les élèves vers cette invention en s'interdisant de donner un nom au côté avant que des élèves ne l'aient fait eux-mêmes.

La conclusion de cette activité devrait être :
Pour résoudre ce problème la bonne idée était de donner un nom à la longueur du côté et de trouver une formule pour calculer le nombre de conifères et le nombre de pommiers.
C'est cette conclusion qu'il faut mettre en évidence et faire écrire aux élèves, plus que la propriété mathématique rappelée plus haut.

Annexe 4 : la salle de bal

La salle de bal est rectangulaire, le rapport de la longueur sur la largeur est 2/3. Elle comporte deux portes de 2 m de large, des toilettes de 3 m sur 3 m et un vestiaire large de 3 m ; ces deux pièces sont placées de part et d'autre de la porte qui délimite l'entrée. Il y a aussi un espace pour la sono ou les musiciens, de 3 m sur 4 m, le long d'un mur. La piste de danse est entourée d'une banquette de 1 m de large qui longe le mur, les toilettes et le vestiaire, mais ne se prolonge pas devant ni derrière la sono. On compte qu'une place assise nécessite 50 cm de largeur sur la banquette, et qu'un danseur occupe 2 m^2. Personne ne peut s'asseoir aux quatre coins de la banquette, et il faut exclure de la piste de danse la banquette, la sono, l'entrée et laisser une distance de 1 m devant la sortie de secours.
a) Déterminer les dimensions de la salle pour qu'elle puisse contenir au moins 50 danseurs avec au moins 50 places assises.
b) Précisez selon les dimensions de la salle, s'il y aura davantage de places assises ou de danseurs.



Éléments de réponse

a) Soit x la demi-largeur de la salle en mètres. La largeur est alors $2x$ et la longueur $3x$. La banquette est constituée de 4 parties, en supposant que le Nord est en haut de la feuille, la longueur des parties est :

– pour la banquette Nord :	$3x - 3 - 4 - 2 - 2 \times 1 =$	$3x - 11$
– pour la banquette Sud :	$3x - 3 - 2 \times 1 =$	$3x - 5$
– pour la banquette Ouest :	$2x - 2 - 2 \times 1 =$	$2x - 4$
– pour la banquette Est :	$2x - 2 \times 1 =$	$2x - 2$
Total :		$10x - 22$

Il y a 2 places par mètres, ce qui fait : $20x - 44$ places (environ, il faudrait arrondir à une unité près par défaut dans les calculs intermédiaires).
L'aire de la salle de danse en m^2 est : $(3x - 5)\,(2x - 2) - 2 \times 4 = 6x^2 - 16x + 2$.
Le nombre de danseurs que peut accueillir la piste de danse est :

$$\frac{6x^2 - 16x + 2}{2} = 3x^2 - 8x + 1.$$

Pour qu'il y ait au moins 50 places assises, il faut que : $20x - 44 \geq 50$, c'est-à-dire $x \geq 4{,}7$.
Pour disposer de la place suffisante pour 50 danseurs, il faut que : $3x^2 - 8x + 1 \geq 50$. En utilisant un tableau de valeurs de la calculatrice, on voit qu'il faut que $x \geq 5{,}59$ (la racine du trinôme correspondant est environ 5,589).
On peut arrondir à 5,6 m. Ainsi, la pièce devra faire 11,2 m de large et 16,8 m de long pour accueillir 50 danseurs et leur fournir au moins une place assise (il y aura en fait 68 places assises dans ce cas).
b) Le nombre de places assises et le nombre de places pour les danseurs ne sont pas proportionnelles entre eux. Le rapport du nombre de places assises sur le nombre de danseurs n'est donc pas constant.
Le nombre de places assises étant une fonction affine de x et celui du nombre de danseurs étant une fonction polynôme de degré 2, ce dernier dépassera le premier lorsque x sera assez grand (le coefficient de x^2 est positif). Plus simplement, l'observation des graphiques et des tableaux de valeurs montre que le nombre de danseurs dépasse celui des places assises à partir de $x \approx 7{,}3$ (la racine du trinôme correspondant est environ 7,270), c'est-à-dire pour une pièce de 14,6 m de large et 21,9 m de long. Pour cette valeur, il y aura 101 danseurs et autant de places assises.

NB. Si on compte les 2 m^2 entre les banquettes et devant la porte d'entrée, les réponses sont :
a) $x \approx 5{,}55$; **b)** $x \approx 7{,}2$ (100 danseurs).

Commentaires

Volontairement on n'a pas désigné une inconnue x pour traiter le problème. Décider que la longueur est $3x$ et la largeur $2x$ est une initiative que doit prendre l'élève, quitte à ce que ce coup de pouce lui soit suggéré : il est important que définir la variable fasse partie de la résolution du problème. Tant qu'on n'a pas créé la variable pour traduire l'énoncé, on n'a pas complètement compris le rôle de l'algèbre dans la résolution du problème.

La figure initiale a pour dimension 15 m sur 10 m. Elle permet d'accueillir 36 danseurs avec 56 places assises. Un élève qui pense que le nombre de danseurs est proportionnel à la largeur de la salle, devrait donc proposer les dimensions :

$\frac{50}{36} \times 10 \approx 13{,}9\,\text{m}$ et $\frac{50}{36} \times 15 \approx 20{,}8\,\text{m}$.

S'il ne s'intéresse qu'aux dimensions de la piste de danse (10 × 8 sur le dessin), il devrait proposer :

$\frac{50}{36} \times 8 + 2 \approx 13{,}1\,\text{m}$ et $\frac{50}{36} \times 10 + 5 \approx 18{,}9\,\text{m}$; dans ce cas, il n'y a plus le rapport 2/3 entre la largeur et la longueur. Pour le retrouver, il pourra proposer l'une de ces dimensions et calculer l'autre de sorte à conserver le rapport 2/3, c'est-à-dire 13,1 m sur 19,7 m ou 12,6 m sur 18,9 m.

L'utilisation d'un coefficient $\sqrt{\frac{50}{36}}$ fournit des résultats assez proches de la réponse à la question **a)**.

Cet exercice peut être utilisé pour une narration de recherche. Plus que la bonne réponse, on demande alors à l'élève de raconter comment il a cherché. L'intérêt est de pouvoir discuter sur les procédés de résolution et de permettre à tous de donner une réponse. De plus, cette réponse ne peut alors être recopiée textuellement sur le devoir d'un autre. Il faut demander d'y inclure les éventuelles premières recherches infructueuses qui seront riches d'enseignement.