À propos des aires (2)

Présentation des activités

Groupe « Activités mathématiques au collège »

Le premier document paru dans le n° 438 du Bulletin Vert proposait un texte général sur la notion d'aire et un premier ensemble d'activités sur la mesure d'une aire par dénombrements d'unités à l'aide de différents réseaux (mailles carrées, triangulaires ou hexagonales), débouchant sur le dénombrement de centimètres carrés.
Voici une série d'autres activités concernant les aires. Compte tenu des connaissances mises en œuvre, ces activités vont du CM à la Cinquième. Nous les présentons dans l'ordre des niveaux auxquels elles s'adressent. Mais une activité prévue au niveau n peut très bien être proposée en réactivation ou remédiation au niveau $n + 1$, voire $n + 2$. L'objectif essentiel de toutes ces activités est de donner de bonnes images mentales sur les aires, leur comparaison, leur mesure, de faciliter une bonne appropriation des formules usuelles mais aussi d'apprendre à s'en passer.

Ce document propose deux approches indépendantes et complémentaires : l'une utilisant la proportionnalité entre les aires et les masses dans des conditions précisées, et l'autre utilisant des transformations de surfaces aussi bien matérielles que géométriques.
La première approche permet, avec une balance de type Roberval, de comparer des aires, mais aussi de les mesurer à partir d'une série « d'aires marquées ». La comparaison par pesée prend tout son sens lorsque des surfaces voisines ont des formes telles qu'elles ne peuvent être « incluses » l'une dans l'autre par superposition.
La deuxième approche propose quelques calculs d'aires à partir de puzzles plus ou moins classiques tels que le Tangram, le Paratonnerre, le Lutin et le Tente-Patience. L'utilisation de puzzles pour faire passer multitude de notions mathématiques n'est plus à prouver. De nombreuses publications de l'APMEP, entre autres, permettent de réinvestir des connaissances tant géométriques que numériques (calcul fractionnaire notamment). Libre à vous de faire reproduire puis construire chacun des puzzles proposés sur papier quadrillé épais (de type bristol) ou d'envisager leur réalisation en cours de technologie sur plexiglas par exemple. Différents réseaux sont à votre disposition sur le site de l'APMEP : http://www.apmep.asso.fr.
Ici, il n'est pas question de créer de nouvelles figures avec les pièces initiales (voir pour cela les brochures « Jeux 5 » pour le Tangram et « Jeux 6 » pour les trois autres puzzles), mais de s'intéresser aux aires des différentes pièces, de les comparer entre elles et de les exprimer en fonction d'une unité d'aire donnée.

Aires par pesées

Les deux activités proposées, l'une plutôt en Sixième et l'autre plutôt en Cinquième, traitent de la comparaison et de la mesure d'aires par pesées. Une telle méthode nécessite bien sûr des conditions précises qui permettent de valider les observations effectuées. Ainsi, la première activité fait découvrir aux élèves la nécessaire homogénéité des matériaux utilisés et l'obligation d'une même épaisseur des plaques découpées. Le travail se poursuit alors avec les comparaisons de masses, donc d'aires, et de mesures à l'aide des « aires marquées ». La fiche proposée en Cinquième fait intervenir les éléments du triangle (base et hauteur) et leur place dans le calcul des aires. Pour ces deux activités, il est conseillé d'organiser le travail de la classe en groupes, d'une part pour éviter d'avoir à mettre en œuvre trop de matériels et d'autre part pour susciter et faciliter les débats qu'une telle situation nécessite.

Les documents en annexe de l'activité Sixième proposent :
- une série « d'aires marquées » : 1u, 2u (2), 5u en plexiglas (voir avec les collègues de technologie pour la découpe précise avec les robots) ou « Gerflex » (magasin de bricolage : chute ou dalles de sols), utilisés aussi pour l'activité de Cinquième.
- sept pièces d'aires quelconques ; quatre doivent être découpées dans le matériau choisi et sont de formes différentes, trois sont de forme identique. Deux de ces trois formes doivent être découpées dans des épaisseurs différentes du matériau choisi précédemment et la troisième doit être réalisée dans un autre matériau. Ces trois pièces permettent de définir les conditions dans lesquelles l'aire est proportionnelle à la masse.

La balance de Roberval peut éventuellement être récupérée dans les laboratoires de physique. On en trouve en plastique dans des catalogues de matériel pédagogique.
Pour l'activité Cinquième, des bandes de 4 et 8 cm de largeur et d'environ 20 cm de longueur sont à découper dans du « Gerflex » et à distribuer à chaque groupe d'élèves.

Pour les activités suivantes, nous n'avons pas voulu surcharger les figures par un excès de codages, surtout en Sixième. Aussi il faut convenir avec les élèves que les figures sont ce qu'elles paraissent être (parallélogramme, rectangle, losange, carré, triangle isocèle, etc.), que les propriétés apparentes (parallélisme, orthogonalité, égalité de longueurs, etc.) sont réelles. Il sera utile de faire cette mise au point avec les élèves, d'autant plus, qu'en d'autres circonstances, on leur demandera de ne pas utiliser une propriété qui « se voit » sans l'avoir démontrée.

Le Tangram.

Cette activité a été conçue essentiellement pour le niveau CM. Mais elle a aussi sa place en Sixième puisque la notion d'aire est en cours d'acquisition en Primaire. Pour cette activité, il faut prévoir de photocopier le puzzle pour que les élèves ne découpent pas celui de la feuille d'activité. Pour répondre aux questions, ils ont ainsi la possibilité de se référer directement au dessin de la feuille ou d'utiliser les pièces découpées s'ils en éprouvent la nécessité.
- Les assemblages différents de deux mêmes pièces (C et E) permettent de renforcer l'idée que des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire. C'est le cas des pièces D, F et G.
- Le recouvrement de la pièce A (ou B) à l'aide des pièces D, E et C, (F, E et C, ou G, E et C) prépare l'étape suivante sur la mesure des aires des différentes pièces.

– Une dernière étape permet de réinvestir, de façon plutôt heuristique, cette notion de mesure d'une aire en réalisant des figures d'aires données.

Puzzles et mesures d'aires.

Il s'agit toujours de mesure d'aires par dénombrement d'unités. Mais, d'un puzzle à l'autre, la difficulté est croissante. Cette activité, extraite de la brochure « Jeux 6 » s'adresse plutôt à des élèves de Sixième. Mais elle peut être adaptée au CM, les compétences qu'elle développe étant aussi travaillées à ce niveau.
Pour le « Paratonnerre », si certaines pièces de même aire peuvent être repérées par superposition (A et C, F et G), d'autres nécessitent le passage à la mesure (B et D en particulier).
Pour le « Lutin », la superposition des pièces E et D n'est pas évidente pour de jeunes élèves. Mais un découpage mental de chacune des deux pièces apporte la solution. Le découpage, plus délicat, des pièces A et C peut être fait de plusieurs façons et peut donc être à l'origine d'un débat très intéressant.
La particularité de l'activité sur le « Tente-Patience » réside dans l'utilisation de fractions d'unités (des demis et des quarts) pour mesurer l'aire des pièces.
Les planches de figures relatives à ces puzzles et proposées à la suite de cette activité sont aussi extraites de la brochure « Jeux 6 ».

Même aire.

L'objectif de cette activité est d'utiliser les mesures de longueurs pour calculer les aires en se ramenant encore à un rectangle. Cette activité peut donc être proposée en Sixième, mais aussi en Cinquième, en introduction au calcul de l'aire du triangle. Les découpages pourront être source d'échanges sur les méthodes utilisées. Les résultats numériques dépendant de la qualité des découpages et des mesures nécessairement approchées seront, bien sûr, source de débats. Plusieurs découpes sont possibles. Les élèves peuvent montrer leur solution à toute la classe, en ombres chinoises, à l'aide du rétroprojecteur. Il suffit de poser les pièces sur la plage du rétroprojecteur.

Problèmes d'aires

La résolution des petits problèmes de ce document fait appel à la propriété essentielle de l'aire du triangle : « Deux triangles ayant une même base et une même hauteur, ont la même aire ». Il n'y a donc ici aucun calcul !
Il est important de faire faire aux élèves les deux premiers problèmes avant de donner l'un ou l'autre des trois suivants. Ces deux premiers problèmes jettent les bases de résolution des autres qui sont un peu plus complexes. Remarquons qu'on peut ne pas connaître la formule de l'aire du triangle pour résoudre le premier problème, l'aire du triangle étant la moitié de l'aire du parallélogramme.

De nombreuses publications existent : des problèmes sur les aires ou des démonstrations par les aires. On peut consulter le site « Publimath » de l'APMEP à ce sujet : http://publimath.univ-lyon1.fr/.

Aires : Comparaison, Évaluation

1) Conditions nécessaires à l'évaluation d'une aire par pesée

Par superposition, retrouve comment ont été fabriquées les « aires marquées ». Les pièces 2, 6 et 7(1) ont-elles la même aire? Ont-elles la même masse ? Pourquoi ? Déduis-en les conditions nécessaires pour que la pesée permette d'évaluer des aires.

2) Comparaison des aires des pièces 1, 2, 3, 4 et 5

Pesée par comparaison :

Range les pièces dans l'ordre croissant de leurs aires. Écris les résultats et note la méthode.

Pesée en utilisant les unités :

Pièce	P1	P2	P3	P4	P5
Aire	Al	A2	A3	A4	A5
Masse					

Retrouves-tu le rangement précédent ?`

3) Évaluation de l’aire des pièces en fonction des « aires marquées »

Sachant que $u = 4$ cm^2, donne une valeur des aires

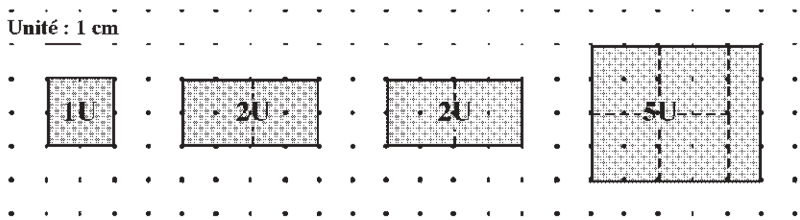
	Aire	Mesure en cm^2
A1	$7u$	28
A2		
A3		
A4		
A5		

Aires : Comparaison, Évaluation Annexe

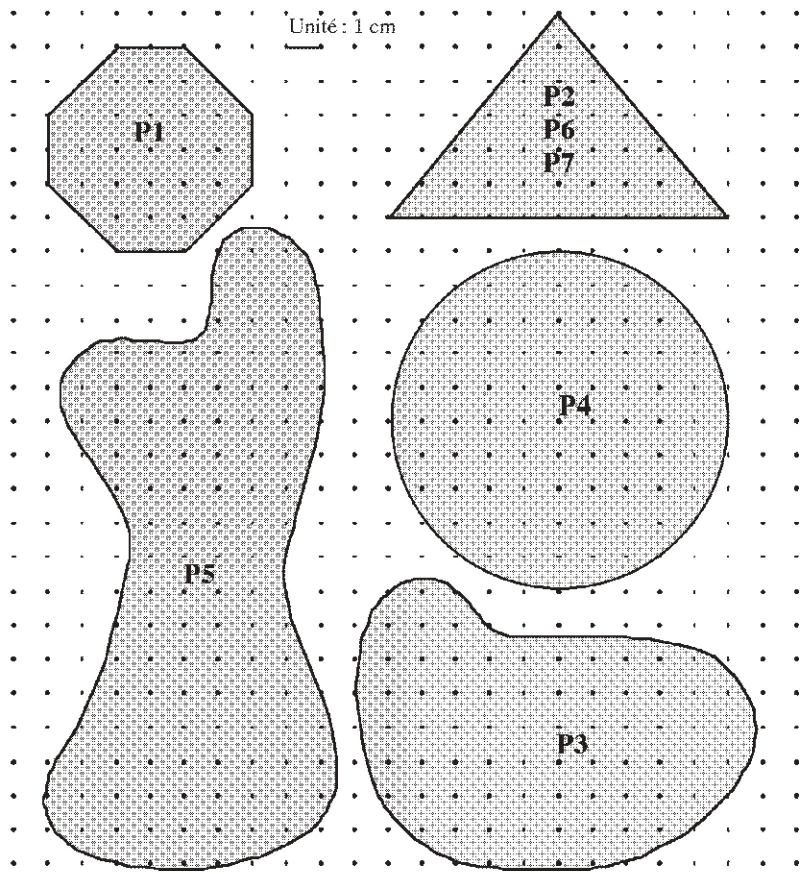
Les pièces ci-dessous ont été testées aux dimensions indiquées avec du gerflex. Le plus simple est de les reproduire sur une feuille de papier petits carreaux, de coller cette feuille sur du gerflex et de découper les pièces. Mais, du fait de la proportionnalité, tout autre agrandissement (voisin de l'échelle 1 pour que la sensibilité de la balance puisse détecter les différences de masse) convient.

(1) Lire attentivement la présentation initiale !

Les « aires marquées »



Les pièces

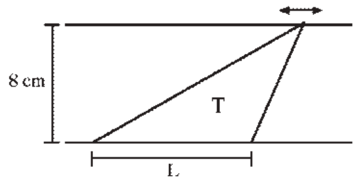


N.B. Les conditions de reproduction ne respectent pas l'échelle : l'unité, bien que marquée 1 cm, n'est donc pas « physiquement » égale à 1 cm.

Approche de la formule de l'aire du triangle

Tu vas découper quatre triangles T_1, T_2, T_3 et T_4 dans les bandes de gerflex que tu as reçues. Sur la bande de largeur 8 cm, dessine les triangles T_1 et T_2 de la façon suivante:

T_1 et T_2 ont deux sommets sur un même côté de la bande. La distance entre ces sommets est $L_1 = 10$ cm pour T_1 et $L_2 = 5$ cm pour T_2. Le troisième sommet de chaque triangle est sur l'autre côté de la bande. Écris son nom sur chaque triangle (voir le dessin ci-contre).



Dessine de la même manière, sur la bande de largeur 4 cm, les triangles T_3 et T_4 en choisissant $L_3 = 10$ cm pour T_3 et $L_4 = 5$ cm pour T_4. Écris son nom sur chaque triangle.

1°) Découpe ces quatre triangles, pèse-les avec les aires marquées et range-les dans l'ordre croissant de leurs aires.

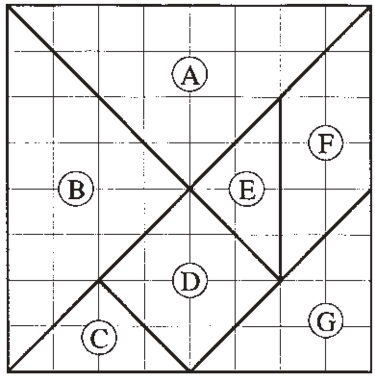
2°) Compare tes triangles avec ceux du même nom d'un autre groupe. Sont-ils superposables ? Ont-ils la même aire ?

3°) Comment varie l'aire du triangle suivant les dimensions utilisées précédemment ?

4°) Complète le tableau suivant par les dessins de triangles et l'indication de leurs aires.

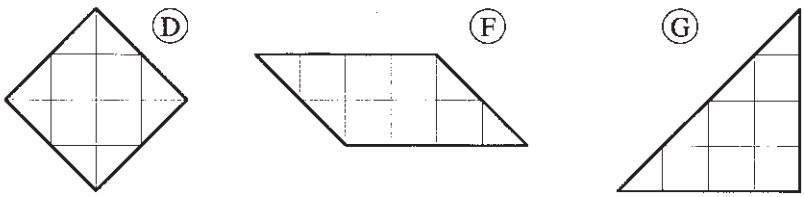
Distance entre les deux sommets (base) / Largeur de la bande (hauteur)	L	2L	3L
h	Aire : *a*	Aire :	Aire :
2h	Aire :	Aire :	Aire :
3h	Aire :	Aire :	Aire :

Le TANGRAM



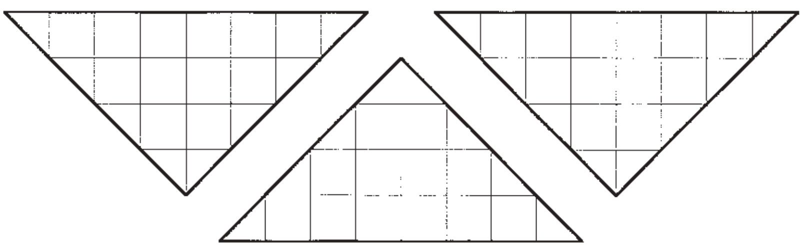
* Les sept pièces du TANGRAM sont désignées par les lettres de A à G.
Découpe les sept pièces de ce puzzle et indique celles qui sont superposables.

* Utilise les pièces C et E pour réaliser la pièce D, puis la pièce F, puis la pièce G.
Dessine sur les figures ci-dessous les assemblages que tu as trouvés.



* Qu'en déduis-tu pour les aires des pièces D, F et G?

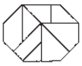
* Choisis, parmi les pièces C, D, E, F et G, celles qui te permettent de réaliser la pièce A (ou B). Utilise les figures ci-dessous pour représenter les assemblages que tu as trouvés.



* L'aire de la pièce C est choisie comme unité d'aire. Indique dans les cases ci-dessous le nombre d'unités d'aire de chacune des pièces du Tangram.

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐ G ☐

* À l'aide des pièces du Tangram, réalise une figure qui a une aire de 5 unités.
Réalise une autre figure qui a une aire de 6, puis une autre qui a une aire de 7.
Dessine sur une feuille quadrillée les figures que tu as obtenues.

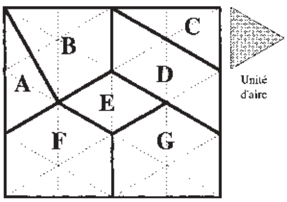


Puzzles et mesures d'aires

Voici trois puzzles que tu pourras reproduire sur du papier cartonné en les agrandissant pour réaliser de nombreuses figures.

Mais auparavant, fais l'activité qui t'est proposée ci-dessous. Elle te permettra de mieux connaître les pièces de ces puzzles.

Le Paratonnerre



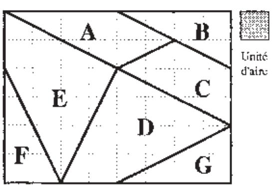
1) Ce puzzle a été construit sur la base d'un réseau triangulaire, et le triangle équilatéral est choisi comme unité d'aire.

Observe les sept pièces de ce puzzle, indique celles qui ont la même aire et donne cette aire avec l'unité indiquée. Donne alors l'aire totale de ce puzzle.

2) On choisit maintenant le losange (la pièce E) comme unité d'aire.

Donne les aires de chacune des pièces dans cette nouvelle unité. Contrôle tes résultats à l'aide de ceux de la question précédente.

Le Lutin



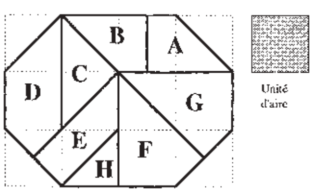
1) Ce puzzle a été construit sur la base d'un réseau carré, et le carré est choisi comme unité d'aire.

Pourquoi peut-on affirmer que les pièces D et E ont la même aire, sans déterminer cette aire ?

2) Dessine un découpage des pièces A et C qui montre que ces deux pièces ont la même aire. Donne cette aire dans l'unité indiquée.

3) Donne l'aire de chaque pièce de ce puzzle et celle du puzzle. Contrôle ce dernier résultat en calculant l'aire d'une autre manière.

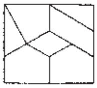
Le Tente - Patience



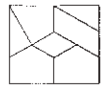
1) Ce puzzle a été construit sur la base d'un réseau carré, et le carré est choisi comme unité d'aire.

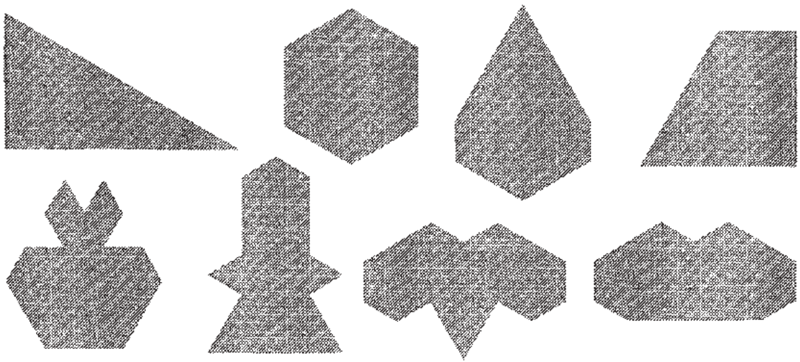
Écris, sous la forme d'un entier ou d'une fraction, l'aire de chacune des pièces de ce puzzle.

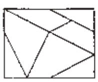
2) À l'aide des résultats précédents, trouve l'aire totale du puzzle. Contrôle ton résultat en calculant cette aire d'une autre manière.



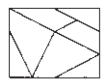
Paratonnerre

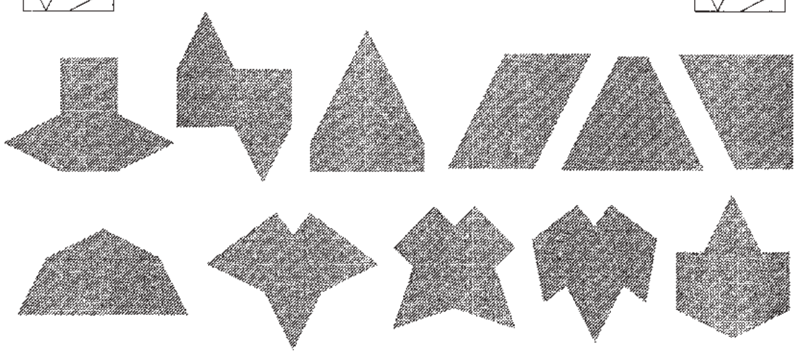


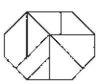




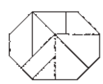
Lutin

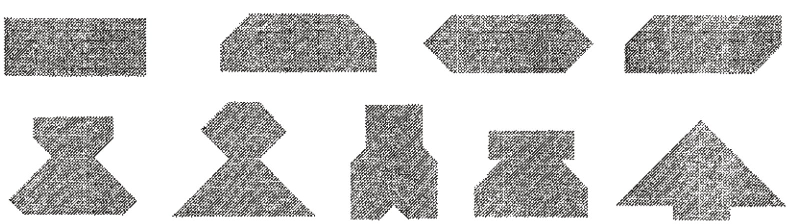


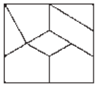




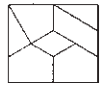
Tente-patience

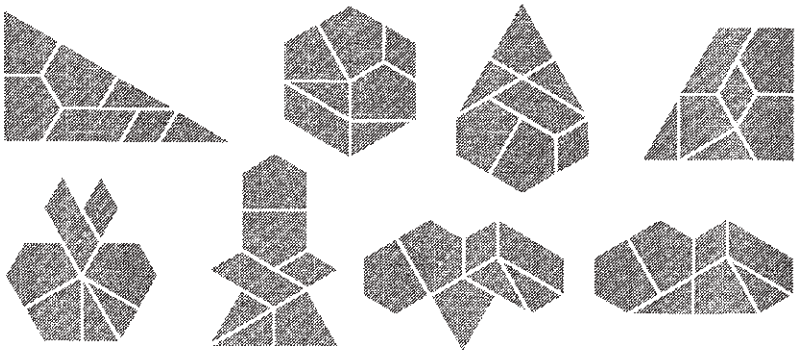


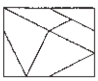




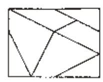
Paratonnerre

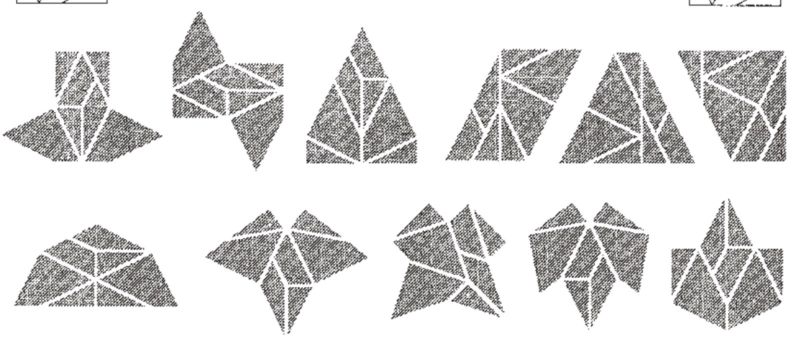


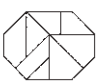




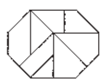
Lutin

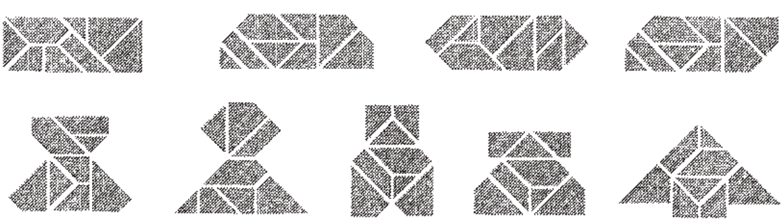






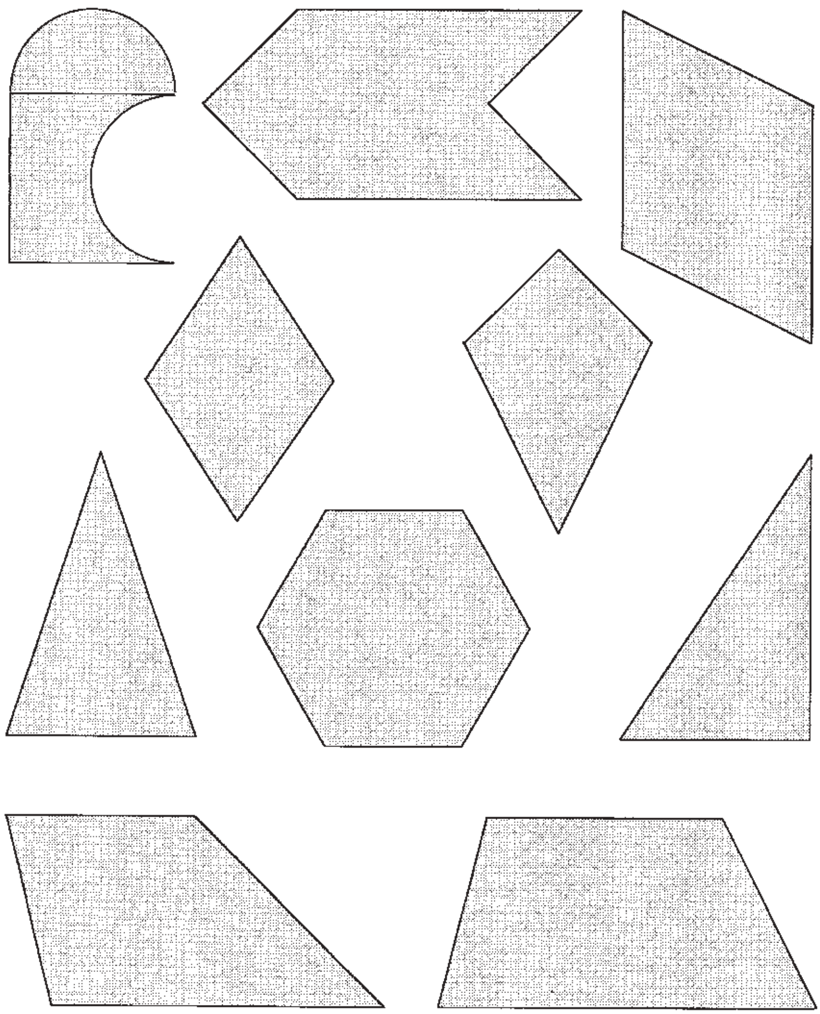
Tente-patience





Même aire

1) Par découpage et recomposition, ramène chaque figure proposée à un rectangle *(avant de découper, trace soigneusement les traits qui te seront utiles)*.
2) Fais les mesures nécessaires pour calculer ces aires.

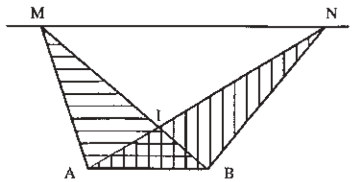


Problèmes d'aires

1

1°) Que dire des aires des triangles MAB et NBA ?

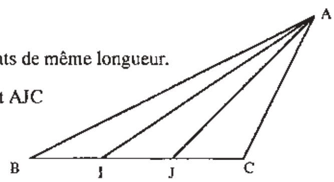
2°) Que dire des aires des triangles MAI et NBI ?



2

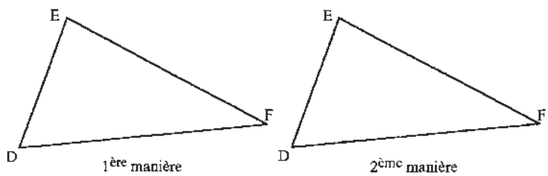
Le côté [BC] du triangle ABC a été partagé en trois segments de même longueur.

Pourquoi peut-on affirmer que les trois triangles ABI, AIJ et AJC ont la même aire ?



3

Partage le triangle EDF en quatre triangles de même aire, de deux manières différentes. (Justifie tes constructions)

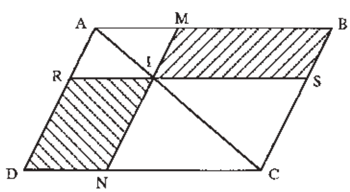


Peux-tu trouver d'autres manières de partager ce triangle en quatre triangles de même aire ?

4

ABCD est un parallélograme. I est un point de la diagonale [AC]. Par le point I, on trace les segments [MN] et [RS] respectivement parallèles aux côtés [AD] et [AB] du parallélogramme ABCD.

Montre que les deux parallélogrammes hachurés MBSI et NDRI ont la même aire.



5

LMNP est un trapèze de bases [LM] et [NP]. R est le milieu de la base [LM] et S est le milieu de la base [NP].

Montre que les deux trapèzes hachurés LRSP et RMNS ont la même aire.