Dire … la soustraction…

Serge Petit

Pendant les journées de Rennes, à l'occasion d'un débat sur les nouveaux programmes de l'école élémentaire, un collègue a dit qu'il était important de « dire ce que l'on voit et pas autre chose ». Cette réflexion intervenait à propos de la lecture des nombres. D'après ce collègue, on devrait dire « treize virgule zéro huit » pour lire le nombre qui s'écrit aussi 13,08 dans le système de numération décimale.

Une amorce de débat assez vif, rapidement avorté, a eu lieu ; l'heure de fin de séance ayant sonné et, comme il se doit, les participants aux Journées sont tenus de respecter les horaires…

Il me semble pourtant qu'il y a là matière à réflexion. L'origine de bien des erreurs des élèves, de bien des incompréhensions de leur part ne se trouve-t-elle pas dans la manière dont les enseignants disent les choses mathématiques, … les nombres (entiers, décimaux), certaines opérations, … ? La manière de dire est bien souvent une manière très experte, où les termes choisis sont ceux utilisés par tout un chacun dans la vie courante, parfois au détriment du sens qui, pour être bien en place chez l'adulte, reste en voie de construction chez l'élève. En quelque sorte, l'école ne devrait-elle pas être un lieu où plusieurs désignations des objets mathématiques, notamment des nombres, pourraient coexister de façon éphémère ? Un lieu dans lequel se forgerait, dans le temps, le langage souvent plus direct, plus effIcace, mais moins immédiatement porteur de sens, de l'adulte ?

Dans ces courtes notes, nous ne parlerons pas de manière générale ni de la désignation des nombres, ni du langage, mais nous tenterons de montrer le poids des mots dans la construction du sens. Nous prendrons ici l'exemple de la soustraction tant redoutée des enseignants, car difficile à enseigner. Nous parlerons ultérieurement de la division.

1. Dire la soustraction

1.1. Méthode experte

1.1.1. La pratique

Soit à effectuer la soustraction donnée ci-dessous. Nombreuses sont les personnes qui procèdent comme suit :

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & {}_{1}2 \\ - & & 7 & {}_{1}8 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Après avoir dit « 9 ôté de 2, je ne peux pas, j'emprunte une dizaine » et avoir ajouté les écritures des deux 1, le calculateur poursuit : « 9 ôté de 12, reste 3 » et écrit 3.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 0 & {}_1 2 \\ - & & 7 & {}_1 8 & 9 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

Il passe ensuite à la colonne suivante :

« 9 ôté de 0, je ne peux pas » [noter ici les sens différents pris par les deux 1 : le premier indique une dizaine et est relativement conforme à l'écriture usuelle, le deuxième doit s'ajouter au 8 pour donner 9 !].

« J'emprunte une dizaine (ou une centaine) » et de recommencer les écritures de petits 1.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & {}_1 0 & {}_1 2 \\ - & & {}_1 7 & {}_1 8 & 9 \\ \hline & & & & 3 \end{array}$$

Puis : « 9 ôté de 10 ça fait 1 », on écrit le 1 et de poursuivre « 8 ôté de 0, je ne peux pas » [ce fameux 8 qu'on ne voit pas !].
« J'emprunte une dizaine (ou un mille) » et d'écrire les petits 1.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 2 \\ - & {}_1 & {}_1 7 & {}_1 8 & 9 \\ \hline & & & 1 & 3 \end{array}$$

« 8 ôté de 10 ça fait 2 » et d'écrire le 2.
« 1 ôté de 1 ça fait 0 » et d'écrire ou de ne pas écrire le 0.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & {}_1 0 & {}_1 0 & {}_1 2 \\ - & {}_1 & {}_1 7 & {}_1 8 & 9 \\ \hline & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Le résultat est 213. Ouf !

Cette technique, que nous utilisons la plupart du temps, experte certes, outre qu'elle est difficilement compréhensible des élèves, n'a même pas le mérite de pouvoir se mimer facilement en classes.

Imaginons cependant la scène.

Un enfant, Jean, possède 1 002 objets (pépites) ; son camarade, Pierre, n'en a pas. Jean doit donner 789 pépites à Pierre.

Essayer de faire vivre cette opération aux enfants reviendrait à faire la chose suivante :

Jean à Pierre : « pour que je te donne les pépites que je te dois, il faut d'abord que tu me prêtes 10 pépites, je t'en rendrai une dizaine de plus ».

Pierre : « tu as de la chance, j'en ai treize. Je t'en prête dix (sous forme de dix pépites libres – non groupées dans une dizaine –) ».

Jean : « merci, tu vois je vais pouvoir te donner ce que je te dois, je te donnerai aussi une dizaine de plus » Jean donne 9 pépites à Pierre.

Pierre : « donne moi tout maintenant ».

Jean : « je ne peux pas, prête moi encore 100 pépites (dans dix boîtes de dix pépites), je t'en rendrai une centaine (dans un sachet contenant dix boîtes de dix pépites) ».

Pierre : « je ne les ai pas, je n'ai que trois pépites ».

Comment faire?

Par chance, Jacques passe près de Pierre et de Jean.

Pierre à Jacques : « tu pourrais pas me prêter cent pépites, juste pour un instant ? ».

Jacques : « oui ». Il s'exécute…

Jean donne 8 dizaines à Pierre.

Malheureusement, Jacques ne pourra pas lui prêter les mille pépites (sous forme de dix sacs de dix boîtes chacun) qu'il sollicite encore pour pouvoir mener à bien son opération. Il faut attendre que quelqu'un d'encore plus riche que Jacques passe dans les parages, emportant avec lui une bonne part de sa richesse, pour pouvoir éventuellement poursuivre l'opération. À moins peut-être d'aller dans une banque de pépites… Mais cela existe-t-il ?

Cette opération experte repose sur le fait que les écarts entre deux nombres ne changent pas si l'on ajoute ou retranche à chacun d'eux le même nombre. Pour mimer cette opération, il faut pouvoir disposer de 1 110 pépites supplémentaires. Ce qui n'est pas toujours le cas dans la pratique. Ici :

$$1\,002 - 789 = (((1\,002 + 10^{(1)}) + 100^{(2)}) + 1\,000^{(3)}) - (((789 + 10^{(4)}) + 100^{(5)}) + 1\,000^{(6)})$$

Au cas où la relation

$$x - y = (x + a) - (y + a)$$

aurait été mise en place en classe, un autre mode opératoire permettrait de trouver bien plus naturellement la solution : la balance.

(1) Sous la forme de dix pépites libres.
(2) Sous la forme de dix dizaines de pépites libres.
(3) Sous la forme de dix centaines de pépites.
(4) Sous la forme d'une dizaine de pépites.
(5) Sous la forme d'une centaine de pépites.
(6) Sous la forme d'un millier de pépites

	1 002	789
J'ajoute 1 aux deux termes, cela ne change pas le résultat :	1 003	790
J'ajoute 10 aux deux termes, cela ne change pas le résultat :	1 013	800
J'ajoute 200 aux deux termes, cela ne change pas résultat :	1 213	1 000
J'enlève 1000 aux deux termes, cela ne change pas le résultat :	213	0

Le résultat est 213.

Cette façon d'opérer est beaucoup plus simple et laisse à chaque enfant la liberté de procéder comme il le vit le mieux. Elle est peu enseignée, mais pourtant très proche des méthodes de calcul mental qui m'apparaît comme étant malheureusement trop absent dans les classes.

1.1.2. Le poids des signes

Revenons au début de l'opération et analysons le poids des mots dans l'expression « 9 ôté de 2, je ne peux pas, j'emprunte une dizaine ».

Cette expression renferme l'idée que l'on traite les opérations et les nombres colonne par colonne ; qu'un nombre est la juxtaposition de chiffres. Il n'a jamais été question d'ôter 9 de 2, mais de 1002. Est-ce impossible ? Bien évidemment non, et tous les élèves le diront : *« t'en as tout plein, tu peux »*.

Le même phénomène se reproduit dans les colonnes suivantes. Tout ce travail est effectué au détriment de l'expression du sens de ce qui est en jeu.

Ce faisant, on ôte, non pas 9 de 2, mais du sens aux opérations qui sont effectuées, au détriment de la compréhension de la technique par les élèves.

Et que dire des écritures comme 7 qu'il convient de lire, selon l'endroit où elles sont placées soit comme 17 soit comme 8 ! Redoutable maladresse sémiotique qui n'est pas sans poser de difficultés aux élèves.

La soustraction devient, ainsi pratiquée, un objet redoutable qu'il conviendra d'éviter, autant que faire se peut, ou de remettre à plus tard ; comme le font souvent les enseignants qui craignent de l'enseigner, comme le font les auteurs de programme qui en repoussent de plus en plus tard la mise en place. Le fait de repousser ce qui semble difficile à enseigner semble être une pratique constante du primaire au lycée. Certains professeurs de mathématiques n'ont-ils pas repoussé en fin d'année l'enseignement des probabilités, espérant peut-être même que, le gong ayant sonné, le collègue de la classe suivante s'en chargera ?

1.2. Dire la soustraction, méthode plus naturelle

1.2.1. Introduction

Reprenons cette soustraction, mais dans une classe où les élèves ont été habitués par le maître à dire et à se représenter les nombres sous des formes variées. Dans ce type de classes, le matériel utilisé pour introduire la numération de position est un matériel qui reprend exactement la structuration du système de numération décimale.

Les unités sont constituées par des pépites (petits cailloux peints à la bombe ou plus simplement gros haricots rouges, ou grains de maïs), les dizaines sont des boîtes de pellicules photo fermées, contenant effectivement une dizaine d'objets (quand elles sont fermées et aucun objet quand elles ne le sont pas), les centaines sont des petits sacs en toile fermés (moins bruyants que les sachets de supermarché) qui contiennent effectivement dix boîtes de pellicules photo, chacune enfermant effectivement dix pépites. Les mille sont des boîtes à chaussures qui contiennent…

Les représentations sémiotiques de ces groupements sont le gros point pour les unités, le dessin d'un boîte de pellicule, le dessin d'un sac en toile et celui d'un parallélépipède. Une unité sémiotique bien distincte des autres par objet représenté.

Ces représentations peuvent aider certains élèves à se forger des images mentales qui montreront leur efficacité dans le calcul mental(7).

1.2.2. La soustraction, sa mise en œuvre

On convient, pour des raisons évidentes (soustractions impossibles à effectuer sans retour arrière si l'on commence par les dizaines par exemple 53 – 27), et nous le montrons aux élèves, de commencer par servir les unités.

Il faut donc donner 9. Renvoyant au problème concret (haricots, pépites, …) :

Est-ce que je peux donner 9 ?

Bien sûr, il y en a beaucoup plus. Il y en a plus que mille… Mais il n'y en a que deux de libres(8). Comment faire ?

On prend une boîte de dix, on l'ouvre, on verse les dix haricots et on donne les neuf.

1002 c'est quoi?

C'est un mille et deux unités libres.

C'est quoi encore?

Cent dizaines et deux unités libres, etc.

Quand on a ouvert une boîte de dix, qu'est-ce qu'il reste ?

99 boîtes de dix (neuf dizaines libres, et 9 centaines libres qui font 90 dizaines).

L'opération suivante

(7) Un élève de fin de CP auquel il était demandé de calculer 57 – 19 nous a ainsi décrit sa manière de procéder : « J'ai cinq boîtes et sept. Je donne deux boîtes, il reste trois boîtes et sept. J'ouvre une boîte, je reprends un, j'ai trois boîtes et huit ». Tous ne peuvent pas faire ce type de travail, loin de là, mais l'illustration est si belle, même rare qu'elle méritait d'être partagée...

(8) On parle ainsi d'unités libres, de dizaines libres, de centaines libres, etc. Ce qui renvoie à l'expérience où on est obligé de toujours grouper par dix, mais il reste quelquefois des unités libres, des dizaines libres etc.

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ - & & 7 & 8 & 9 \\ \hline & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

se transforme donc en

$$\begin{array}{rcccc} & & 9 & 9 & 12 \\ & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ - & & 7 & 8 & 9 \\ \hline & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Et la suite du calcul devient facile. 12 unités libres moins 9 unités libres donnent 3 unités libres, 9 dizaines libres moins 8 dizaines libres donnent 1 dizaine libre, 9 centaines libres moins 7 centaines libres donnent deux centaines libres. D'où le résultat 213.

Remarque : le lecteur aura noté que nous ne parlons pas de colonne des unités, des dizaines, des centaines, etc. car ceci n'est qu'un excellent moyen pour que les élèves confondent nombre de dizaines et chiffre des dizaines, de même pour les centaines, … nous parlons d'unités libres (celles qui ne sont pas rangées dans les boîtes, de dizaines libres (celles qui ne sont pas dans les petits sacs), etc. Il nous semble aussi que les expressions comme *chiffre des dizaines*, *chiffre des centaines,* etc. devraient être évitées en classe. Elles ne servent strictement à rien sauf, par interaction avec le langage courant, à pousser les élèves à confondre chiffre des centaines avec nombre des centaines, etc. Pourquoi ne pas parler simplement directement du nombre de dizaines, nombre de centaines, …, seules notions importantes ?

1.2.3. Conclusion

Si je propose ici cette manière d'enseigner la soustraction et surtout cette manière de dire ce que l'on fait, c'est que j'ai constaté que les élèves auxquels elle est proposée sont généralement très rapidement capables de réaliser de telles opérations, notamment par le fait qu'elle peut se vivre, se mimer en classe, donc s'évoquer par la suite et qu'elle n'exige pas plus de matériel que le plus grand des deux nombres.

Cette façon de faire n'empêchera pas, ultérieurement, le maître de proposer la méthode plus experte analysée en début de texte ; méthode qui présente l'avantage d'une grande compacité dans l'écriture, très commode pour ceux qui souhaitent faire figurer les soustractions dans les techniques opératoires de la division.

2. Dire les nombres

2.1. Les entiers

Le fait de savoir dire les nombres de nombreuses manières différentes, le fait de ne pas parler de *chiffre des dizaines*, de *chiffre des centaines*, …, mais de nombre d'unités libres, nombre de dizaines libres, nombre de dizaines, nombre d'unités, nombre de centaines, …, ont des conséquences, à mon sens très positives, à la fois sur la compréhension du système de numération et sur la capacité à effectuer une soustraction.

Nous pensons donc qu'il est important de dire et de faire dire aux enfants, le plus souvent possible, les nombres sous de nombreuses formes différentes mettant en œuvre le nombre de centaines, de dizaines, etc. et de renvoyer (pour la construction d'images mentales) à un matériel qui reprend la structuration de la désignation des nombres dans le système de numération décimale. Les désignations des nombres par référence au matériel utilisé, permettent à certains élèves de construire du sens et ne seront que passagères. Elles ne doivent pas être bannies des pratiques des enseignants.

Sont, à notre sens, à éviter, au moment de la construction de la désignation des nombres, tous les matériels qui ne procèdent pas par groupements (abaques, matériel fondé sur les échanges, ...). Il ne permettent pas aux élèves de se forger une bonne représentation des groupements par dix (dix objets, dix dizaines, dix centaines, …).

Conclusion : il est donc fondamental de **dire ce que l'on ne voit pas**, mais que l'on peut voir si l'on renvoie l'élève au matériel utilisé ou à ses représentations figuratives.

2.2. Les décimaux

De même pour les décimaux. Dans le langage usuel 137,081 sera souvent dit « cent trente-sept virgule zéro quatre-vingt un. On lit ce que l'on voit écrit.

Ici aussi, on pourrait montrer l'intérêt de varier les désignations verbales et de dire par exemple :

« treize centaines et sept unités et quatre-vingt un millièmes » ou

« mille trois cent soixante-dix dixièmes et huit centièmes et un millième » ou

« cent trente sept mille quatre-vingt un millièmes » ou …

Là encore, il conviendrait de bannir les usages de « chiffre des dixièmes », « chiffre des centièmes », … que la manière usuelle de dire les nombres ne permet pas de repérer.

Ainsi, cette manière usuelle de dire 12,784 conduira l'élève à dire que le chiffre des centaines est 7.

Là encore, il est fondamental de **dire ce que l'on ne voit pas**. S'entraîner à le dire, c'est s'entraîner dans la construction du sens.