Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux, voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »… si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice.

De juin 2000 à décembre 2002, la rubrique a pris du retard : c'est seulement maintenant que nous publions les solutions d'énoncés parus en 1999. C'est pourquoi j'ai quasiment interrompu la publication de nouveaux énoncés, bien que plusieurs lecteurs m'aient fait des propositions intéressantes, je les prie de m'en excuser. Ce retard pouvant être résorbé en 2003, je reprends dès maintenant la publication de nouveaux énoncés.

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

Nouveaux énoncés

Énoncé n° 293 (Pierre BORNSZTEIN, 95 - Pontoise)

Initialement, n oiseaux se trouvent chacun à un sommet d'un polygone régulier à n côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis, après quelque temps, ils reviennent se poser un sur chaque sommet du polygone, mais pas nécessairement sur leurs positions initiales. Trouver tous les $n > 0$ pour lesquels il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles, tous deux rectangles ou tous deux obtusangles.

Énoncé n° 294 (Pierre SAMUEL, 92 - Bourg la Reine)

Étant donné un entier p non nul, peut-on déterminer tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $xy + p$ divise $x^2 + y^2$? Que peut-on dire du quotient $\dfrac{x^2+y^2}{xy+p}$?

Solution des problèmes précédents

Énoncé n° 283

(d'après Congrès MATh.en.JEANS, 29 mars 1999, collège L'Ardillière de Nézant de 95-Saint-Brice & collège de 95-Montmorency)

Comment doit-on plier en deux un triangle pour que l'aire du polygone (de 3 à 7 côtés) résultant de ce pliage soit minimale ?

Solution

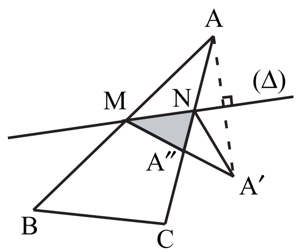
Le véritable auteur du problème (formulé plus généralement : cf http://www.mjc-andre.org/pages/amej/sujets/pliage/sujet.htm), c'est Olivier Bodini. « Ce n'est pas un problème lié à mes recherches, précise-t-il dans un mél. En fait, je cherchais pour les jeunes un indice de dissymétrie attractif. Le rapport de l'aire P du pliage optimal sur l'aire S du triangle me paraissait assez pertinent. Un corollaire du problème est de déterminer un triangle le plus dissymétrique possible. En d'autres termes, $\frac{1}{2} \leq \frac{P}{S} \leq x$, que vaut x ? Il existe dans la littérature d'autres indices de dissymétrie comme l'aire du plus grand ensemble symétrique inclus. Je pense que cela diffère peu de ce que je propose ».

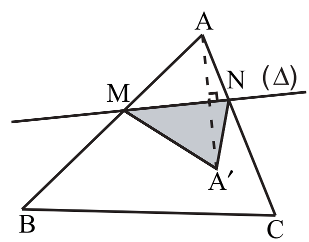
Il est audacieux de proposer ainsi à des collégiens un problème relativement ouvert, et c'est pour encourager les initiatives de MATh.en.JEANS (http://mathenjeans.fr.st) visant à « mettre les jeunes aux prises avec d'authentiques problèmes » que j'ai sélectionné cet énoncé. Avec une approche empirique, les élèves élaborent des stratégies de recherche, apprenant à cerner les concepts manipulés. En 1997, les élèves de Première du lycée Jules Ferry de Coulommiers (77) avaient déjà travaillé le sujet dans le cas où la partie repliée restait intérieure au triangle, et concluaient « Étude du deuxième cas [la pliure ne passe pas par un sommet] : nous n'avons pas eu le temps de démontrer un résultat semblable au premier cas, mais il semble que la bissectrice ne soit pas toujours la meilleure façon de plier le triangle » (Pliage d'un triangle, in *Actes MeJ 1997*, p. 125-127, ou sur Internet : http://mathenjeans.free.fr/actespdf/97125127.pdf).

En 1999, les collégiens de quatrième de St-Brice et de Montmorency (95) se limitaient au triangle rectangle (http://www.mjc-andre.org/pages/amej/edition/9901plit/99plitri.html), concluant : « Mais bien des questions restent encore. Nous avons fait l'hypothèse, après de nombreuses manipulations, que c'était forcément une bissectrice qui était la réponse dans le cas des triangles rectangles. Mais nous n'en sommes pas vraiment certains puisque nous ne l'avons pas démontré. Et que se passe-t-il si le triangle n'est pas rectangle ? ». Ce problème a été repris en 2002 dans ces mêmes collèges, une terminologie a émergé : pour un pliage donné, $2 - \frac{2P}{S}$ peut être appelé « rendement du pliage », et son maximum, pour un triangle donné, « pliabilité » du triangle. Si l'on généralise le problème, la pliabilité d'un quadrilatère ou d'un convexe quelconque est-elle au moins égale à celle d'un triangle ?

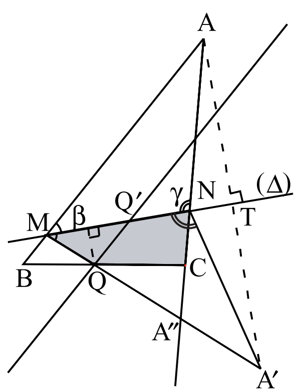
Sans aller jusque là, rien que l'énoncé formulé dans la présente rubrique, dans le cas du triangle quelconque, est redoutable. Même un habitué de la géométrie du triangle et de l'étude de fonctions se perd facilement dans des calculs rébarbatifs, et pour cause ! Seul René Manzoni (76-Le Havre) a pris la peine de rédiger une solution complète, pour constater que, contrairement aux attentes, le meilleur pliage n'est pas nécessairement selon une bissectrice du triangle.

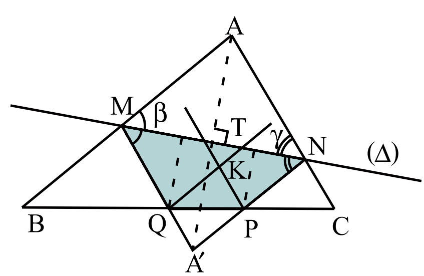
Pour être rigoureux, on ne peut pas faire l'économie de l'étude systématique de tous les pliages possibles. Soit donc ABC un triangle. Classiquement, on notera a = BC, b = CA, c = AB les longueurs de ses trois côtés, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$ ses trois angles, S son aire et S(Δ) l'aire du « triangle replié » autour de la droite (Δ) – droite que nous appellerons désormais, comme MATh.en.JEANS 1997, « pliure ». On supposera que le triangle n'est pas isocèle, sinon la meilleure pliure serait bien évidemment l'axe de symétrie. Cela étant dit, il est clair que la pliure (Δ) coupe deux des côtés du triangle, que nous supposerons être]AB] et]AC], sans exclure le cas où cette droite passe par B ou C.





Appelons M et N les intersections de (Δ) avec]AB] et]AC] respectivement, A′ le symétrique de A par rapport à (Δ). Choisissons une direction de droite, et déplaçons (Δ) parallèlement à cette direction, en partant de A. Deux cas se présentent : soit la perpendiculaire à (Δ) issue de A est extérieure au triangle (premier cas), soit elle est intérieure (deuxième cas) – le cas limite où (Δ) est perpendiculaire à l'un des côtés du triangle étant en définitive le plus intéressant. Dans le premier cas, on peut supposer, quitte à permuter B et C, que c'est]NA′] qui est extérieur au triangle, [MA′] coupant (AC) en A″. Notons que, dans ce premier cas, l'angle $\widehat{A}$ est nécessairement aigu. Dans les deux cas, lorsque (Δ) est suffisamment proche de A, le triangle replié est privé d'un secteur triangulaire MNA″ (premier cas) ou MNA′ (deuxième cas), de forme constante, dont l'aire, proportionnelle à MN^2, croît jusqu'à ce que A′, A″ ou (Δ) traverse [BC].

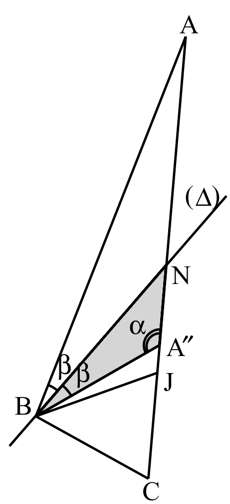




Si A′ ou A″ traverse [BC] avant (Δ), le triangle replié est alors privé d'un quadrilatère MNCQ dans le premier cas (Q = (MA′) ∩ (BC)), MNPQ dans le second (P = (NA′) ∩ (BC)), dont l'aire peut passer par un maximum avant que l'un des points M ou N n'atteigne B ou C. Dès lors, le meilleur pliage est réalisé soit pour une pliure passant par un sommet B ou C, soit lorsque ce quadrilatère MNCQ ou MNPQ est d'aire maximale, ce que nous déterminerons d'abord pour une direction de droite donnée, ensuite indépendamment de cette direction.

Un mot, pour commencer, du cas particulier où la pliure passe par un sommet, bien qu'on puisse aussi l'aborder comme un cas limite du cas général que nous traiterons par la suite. Pris isolément, ce cas présente une réelle difficulté : on ne peut pas affirmer que la meilleure pliure passant par B est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B}}$, car si, par exemple, $a = 2$, $b = 17$ et $c = 18$, le pliage selon la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B}}$ a un rendement de 20 % alors que le pliage selon la médiane a un rendement supérieur à 25 %. Mais, dans cet exemple, le rendement du pliage selon la bissectrice de $\widehat{\mathrm{A}}$ est supérieur à 97 %, et en règle générale le rendement du pliage selon une droite passant par un sommet est toujours inférieur au rendement du pliage selon une bissectrice : comment formuler cela de manière démontrable ?

Rappelons que le pied J de la bissectrice issue de B partage AC dans le rapport $\dfrac{\mathrm{JC}}{\mathrm{JA}} = \dfrac{a}{c}$. Quitte à permuter A et C, supposons $a < c$. Si N est sur [JC], la pliure (Δ) = (BN) ampute le triangle d'une surface incluse dans BNC, *a fortiori* dans BJC, et le rendement : $2 - \dfrac{2\mathrm{S}(\Delta)}{\mathrm{S}}$ de ce pliage est manifestement inférieur au rendement $\dfrac{2a}{a+c}$ du pliage selon (BJ). Mais quand N est sur [JA], la pliure ampute le triangle de la surface BNA″. Posons $\beta = \widehat{\mathrm{ABN}} = \widehat{\mathrm{NBA''}}$. Si l'on fait tourner (BN) d'un angle infinitésimal dβ, BA″ tourne de 2dβ et l'aire de BNA″ s'accroît de $\left(-\dfrac{\mathrm{BN}^2}{2}\right)\mathrm{d}\beta + \mathrm{BA''}^2\,\mathrm{d}\beta$: elle sera monotone sur $\left[0, \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}\right]$ sauf s'il existe des points N de [AJ] pour lesquels $\mathrm{BN} > \mathrm{BA''}\sqrt{2}$, auquel cas elle atteindra son maximum pour l'un des triangles BNA″ vérifiant $\mathrm{BN} = \mathrm{BA''}\sqrt{2}$. Appelons $\mathrm{BN_0A_0}$ ce triangle optimal. L'aire de ce triangle sera $\dfrac{\mathrm{A_0N_0}}{\mathrm{AC}} \cdot \mathrm{S}$, et le rendement de n'importe



quel pliage selon une droite passant par B sera majoré par :

$$2\frac{A_0N_0}{AC} \le 2\frac{A_0N_0}{AA_0}.$$

Or

$$\frac{BN_0}{BA} = \frac{\sin\widehat{A}}{\sin\left(\widehat{A}+\beta\right)},$$

et si l'on appelle α l'angle $\widehat{BA_0A}$,

$$\frac{BN_0}{BA_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\widehat{A}+\beta\right)}.$$

Comme $\widehat{A} + \alpha = \pi - 2\beta$, $\sin\widehat{A} + \sin\alpha = 2\cos\beta \cdot \sin(\widehat{A} + \beta)$, donc

$$\frac{BN_0}{BA_0} + \frac{BN_0}{BA} = 2\cos\beta < 2.$$

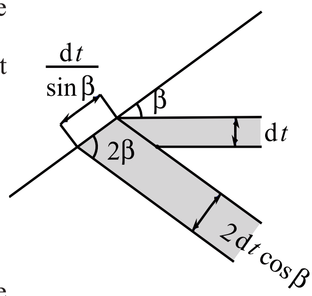
Si $\dfrac{BN_0}{BA_0} = \sqrt{2}$, $\dfrac{BN_0}{BA} < 2-\sqrt{2}$, donc $\dfrac{BA_0}{BA} < \sqrt{2}-1$ et

$$2\frac{A_0N_0}{AA_0} = 2\frac{BA_0}{BA_0+BA} < 2-\sqrt{2}.$$

En d'autres termes, le rendement du pliage selon une droite passant par B est soit inférieur au rendement du pliage selon la bissectrice de $\widehat{B}$, soit inférieur à $2-\sqrt{2}$. Par ailleurs, dans tout triangle, le pliage selon la meilleure bissectrice a un rendement supérieur à $3-\sqrt{5}$, donc *a fortiori* à $2-\sqrt{2}$. Supposons $a < b < c$. Les pliages selon les bissectrices ont pour rendements : $\dfrac{2a}{a+b}$, $\dfrac{2a}{a+c}$ et $\dfrac{2b}{b+c}$, le meilleur est $\dfrac{2a}{a+b}$ si $b^2 \le ac$, $\dfrac{2b}{b+c}$ si $b^2 > ac$. Mais, en utilisant l'inégalité triangulaire, si $b^2 \le ac < a(a+b)$, $\dfrac{b}{a}$ est compris entre les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, donc $\dfrac{2a}{a+b} > 3-\sqrt{5}$. Si $b^2 \ge ac > (c-b)c$, c'est $\dfrac{2b}{b+c}$ qui est supérieur à $3-\sqrt{5}$, ce qui achève la démonstration de ce cas particulier.

Intéressons-nous désormais au cas général. Soit T le projeté orthogonal de A sur (Δ), β l'angle $\widehat{NMA}$ et γ l'angle $\widehat{ANM}$ (cf. dernière figure de la page 109). Lorsque AT augmente d'une grandeur infinitésimale dt, le triangle AMN s'accroît d'une bande de largeur dt et de longueur MN. Le point M se déplace sur AB de : $\dfrac{dt}{\sin\beta}$, et le triangle BMQ décroît d'une bande de longueur MQ et de largeur :

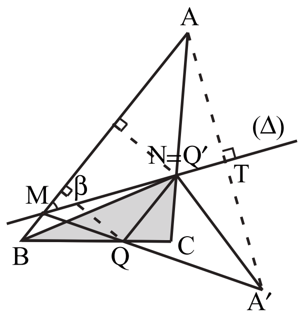
$$\sin 2\beta \cdot \frac{dt}{\sin\beta} = 2\,dt\cdot\cos\beta.$$



Dans le premier cas, où $\gamma \geq \dfrac{\pi}{2}$, l'aire du triangle replié vaut :

$$S(\Delta) = \text{aire(AMN)} + \text{aire(BMQ)},$$

elle décroît tant que MN − 2MQ cos $\beta < 0$ et atteint son minimum quand MN − 2MQ cos $\beta = 0$. Or, si on appelle Q′ le point où la parallèle à (AB) passant par Q coupe (MN), MQ′ = 2MQ cos β : le minimum est donc atteint lorsque Q′ = N, ce qui se produit nécessairement, car (QQ′) // (AB) coupe (MN) extérieurement au triangle si A″ = C = Q, intérieurement si N = C (Q sur]BC[) ou M = B = Q = Q′. En ce minimum, (NQ) étant parallèle à (AB), les triangles BMQ et BMN ont même base BM et même hauteur, donc même aire ; l'aire du triangle replié vaut donc



$$S(\Delta) = \text{aire(AMN)} + \text{aire(BMQ)} = \text{aire(ABN)} = \frac{\text{AN}}{\text{AC}}\cdot S.$$

Par ailleurs, dans le triangle AMN, $\dfrac{\text{AM}}{\sin\beta} = \dfrac{\text{MN}}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{2\,\text{MQ}\cdot\cos\beta}{\sin\widehat{A}}$ et, d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{\text{NQ}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{NC}}{\text{AC}}$, de sorte qu'en appelant x la longueur AN, $\text{MQ} = \text{NQ} = \dfrac{c}{b}(b-x) = \dfrac{x\sin\widehat{A}}{\sin 2\beta}$. On en déduit : $x = \dfrac{bc\sin 2\beta}{c\sin 2\beta + b\sin\widehat{A}}$, et le rendement maximal d'un pliage selon une droite de cette direction vaut :

$$s(\beta) = 2 - \frac{2x}{b} = \frac{2b\sin\widehat{A}}{c\sin 2\beta + b\sin\widehat{A}}.$$

Si maintenant on fait varier β, $s(\beta)$ est maximum lorsque $\sin(2\beta)$ est minimum. Or β varie de $\dfrac{\widehat{B}}{2}$ à $\dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$: si $\beta < \dfrac{\widehat{B}}{2}$, (Δ) coupe [BC] avant A″ et nous n'avons jamais de quadrilatère MNCQ ; si $\beta > \dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$, $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui correspond au second cas. Si maintenant $\dfrac{\widehat{B}}{2} > \dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$, ce premier cas n'est jamais réalisé : soit (Δ) coupe [BC] avant A″, soit (AT) est intérieur au triangle. Dans le cas présent, où $\dfrac{\widehat{B}}{2} < \dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$ (soit $\widehat{C} > \widehat{A}$), 2β décrit l'intervalle $\left[\widehat{B}, \pi - 2\widehat{A}\right]$ inclus dans $[0,\pi]$, sur lequel la fonction sinus est concave, elle atteint donc son minimum en l'une des extrémités de l'intervalle, mais pas nécessairement en $\beta = \dfrac{\widehat{B}}{2}$: pour peu que $\pi - 2\widehat{A} > \pi - \widehat{B}$, soit $\widehat{B} > 2\widehat{A}$, le minimum est atteint en $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$, c'est-à-dire lorsque la pliure est perpendiculaire à (AC). En $\beta = \dfrac{\widehat{B}}{2}$, comme $b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}$, $s(\beta) = \dfrac{2a}{c+a}$, ce qui correspond au pliage selon la bissectrice de B. Mais en $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{A}$,

$$s(\beta) = \frac{2a}{2c\cos\widehat{A} + b} = \frac{2b^2}{2b^2 + c^2 - a^2},$$

ce qui peut fort bien être supérieur.

Résultat surprenant car, dans ce cas, la pliure optimale n'est pas une droite remarquable du triangle : certes, le point N est conjugué harmonique de A par rapport au milieu de [AC] et au pied de la hauteur, mais que dire de plus ? Nous appellerons une telle pliure « perpendiculaire optimale », et l'exemple $a = 3$, $b = 6$ et $c = 4$ (ou le triangle rectangle $a = 20$, $b = 29$, $c = 21$) suffit à montrer qu'une perpendiculaire optimale peut effectivement être meilleure que toutes les bissectrices. Il aurait été intéressant de signaler un tel exemple aux élèves pour les amener à préciser les conditions de validité de leurs résultats et faire avancer leur recherche.

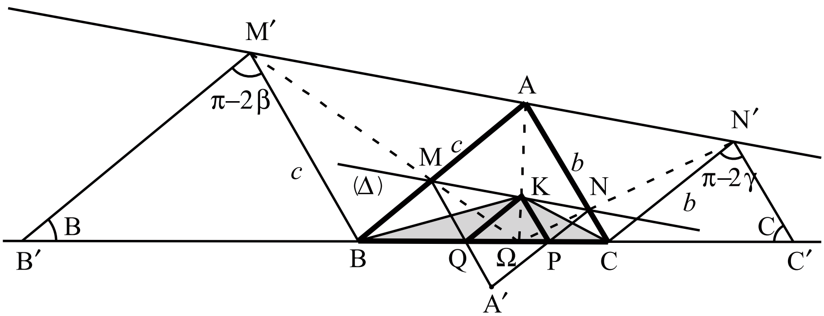
Cela étant dit, n'oublions pas notre deuxième cas, où la droite (AT), perpendiculaire à (Δ), est intérieure au triangle. Nous avons alors trois triangles à considérer, AMN, BMQ, CNP, et quand AT augmente de $\mathrm{d}t$, l'aire de AMN s'accroît de $\mathrm{MN} \cdot \mathrm{d}t$, l'aire de BMQ décroît de $\mathrm{MQ} \cdot (2\mathrm{d}t \cdot \cos \beta)$ et l'aire de CNP décroît de $\mathrm{NP} \cdot (2\mathrm{d}t \cdot \cos \gamma)$, de sorte que la somme :

$$\mathrm{S}(\Delta) = \mathrm{aire(AMN)} + \mathrm{aire(BMQ)} + \mathrm{aire(CNP)}$$

continuera de décroître tant que $\mathrm{MN} < 2\mathrm{MQ} \cdot \cos \beta + 2\mathrm{NP} \cdot \cos \gamma$: si la parallèle à (AC) passant par P et la parallèle à (AB) passant par Q se coupent en K, cette condition équivaut au fait que K est entre (Δ) et (BC), le minimum de $\mathrm{S}(\Delta)$ étant atteint lorsque K est sur (Δ). Or les triangles KQP et ABC ont leurs côtés parallèles : il existe une homothétie de centre Ω et de rapport k transformant KQP en ABC. Par ailleurs, (KQ) et (KP) étant parallèles à (AB) et (AC), les triangles KBM et KCN ont même aire respectivement que QBM et PCN, et l'aire du triangle replié vaut :

$$\mathrm{S} - \mathrm{aire(KBC)} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \mathrm{S},$$

vu que la hauteur de KBC est k fois plus petite que la hauteur de ABC. Cette aire est l'aire minimale du triangle replié selon une droite de cette direction, et si l'on fait varier la direction, elle est elle-même minimale lorsque k est minimal.



Il suffit donc de calculer k, le point K étant sur (Δ). L'homothétie transformant KQP en ABC transforme les points M, N, B, C en respectivement M′, N′, B′, C′, et :

$k = \dfrac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC}}$. Mais en outre : BM′ = c, donc $\mathrm{B'B} = \dfrac{c}{\sin\widehat{\mathrm{B}}}\sin(2\beta)$, et de même

$\mathrm{CC'} = \dfrac{b}{\sin\widehat{\mathrm{C}}}\sin(2\gamma)$, soit

$$k = 1 + \frac{c^2\sin(2\beta) + b^2\sin(2\gamma)}{ac\sin\widehat{\mathrm{B}}},$$

vu que $b\sin\widehat{\mathrm{C}} = c\sin\widehat{\mathrm{B}}$. Comme $\beta + \gamma = \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}}$, on peut poser $\beta = \widehat{\mathrm{B}} + \theta$ et $\gamma = \widehat{\mathrm{C}} - \theta$ pour constater que k est une fonction concave de θ qui atteint son minimum en une extrémité de l'intervalle de définition. En effet, θ varie de $\sup\left(\widehat{\mathrm{C}} - \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2}\right)$ à $\inf\left(\dfrac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{B}}, \dfrac{\widehat{\mathrm{C}}}{2}\right)$, de sorte que 2β et 2γ sont toujours compris entre 0 et π : tous les termes de k sont donc positifs et la dérivée seconde,

$$\frac{-4c^2\sin(2\widehat{\mathrm{B}} + 2\theta) - 4b^2\sin(2\widehat{\mathrm{C}} - 2\theta)}{ac\sin\widehat{\mathrm{B}}}$$

est manifestement négative. Or la borne inférieure de l'intervalle de définition correspond à une perpendiculaire à (AC) si $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{C}}$, la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B}}$ sinon, et la borne inférieure à une perpendiculaire à (AB) si $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{B}}$, la bissectrice de $\widehat{\mathrm{C}}$

sinon. En définitive, la meilleure pliure ne peut être qu'une bissectrice ou une perpendiculaire optimale.

Reste à voir laquelle de ces trois droites, pour un triangle donné, est la meilleure pliure (Δ_0), puis, pour n'importe quel triangle, par quoi est minoré la pliabilité : $2-\dfrac{2\mathrm{S}(\Delta_0)}{\mathrm{S}}$ et si ce minorant est atteint. Je dis « ces trois droites » car il est clair que, parmi toutes les permutations possibles des trois points A, B, C, seules deux bissectrices (Δ_A) et (Δ_B) et une perpendiculaire optimale (Δ_1) sont à prendre en compte. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, pour avoir une perpendiculaire optimale (Δ) de rendement :

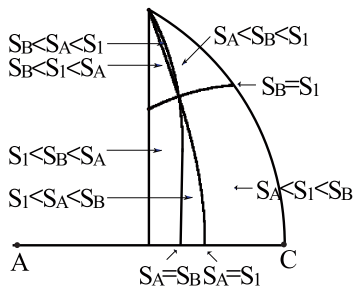
$$2-\frac{2\mathrm{S}(\Delta)}{\mathrm{S}}=\frac{2b^2}{2b^2+c^2-a^2},$$

il faut que $\widehat{\mathrm{C}} > \widehat{\mathrm{A}}$, sinon les droites de direction (Δ) traverseraient le point B avant que A″ ait atteint C. D'ailleurs, si $c < a$, le rendement ci-dessus serait supérieur à 1, ce qui est absurde. Mais il faut aussi que : $b > a$, sans quoi on n'aurait pas : $\dfrac{2b^2}{2b^2+c^2-a^2}<\dfrac{2a}{a+c}$ – qui implique $b^2 > a(a+c) > ab$ – et la bissectrice issue de B serait meilleure que cette perpendiculaire optimale. a est donc le plus petit des trois côtés, et b le plus grand, sinon le rendement $\dfrac{2b^2}{2b^2+c^2-a^2}$ du meilleur pliage perpendiculairement à (AC) serait moins bon que le rendement $\dfrac{2c^2}{2c^2+b^2-a^2}$ du meilleur pliage perpendiculairement à (AB). Par ailleurs, lorsque $b > c > a$, la bissectrice (Δ_C) de l'angle C ne peut pas être la meilleure bissectrice. En définitive, si l'on suppose $b > c > a$, la pliabilité $2-\dfrac{2\mathrm{S}(\Delta_0)}{\mathrm{S}}$ du triangle ne peut être que l'une des trois valeurs : $\dfrac{2c}{b+c}$, $\dfrac{2a}{c+a}$ ou $\dfrac{2b^2}{2b^2+c^2-a^2}=\dfrac{2b}{2c\cos\widehat{\mathrm{A}}+b}$. Comme la fonction $\dfrac{2}{x+1}$ est décroissante, il suffit, pour les départager, de comparer : $\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{c}{a}$ et $\dfrac{2c\cos\widehat{\mathrm{A}}}{b}$.

Si l'on positionne A en (0, 0) et C en (1, 0), en donnant à B des coordonnées (x, y) avec $y > 0$, on a : $b = 1$, donc la condition $b > c > a$ équivaut à : $x > \dfrac{1}{2}$ et $x^2 + y^2 < 1$. La condition : $\dfrac{b}{a} < \dfrac{c}{a}$ est vérifiée à droite de la courbe :

$$y^2 = \frac{1}{2} - x^2 \pm \sqrt{\frac{5}{4} - 2x}\ ,$$

qui admet deux tangentes verticales, en $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0\right)$ et en $\left(\frac{5}{8}, \frac{\sqrt{7}}{6}\right)$. On voit se profiler le nombre d'or et la suite de Fibonacci : $\frac{5}{8}$ est une bonne approximation de $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le nombre d'or réapparaît lorsqu'on étudie : $\frac{c}{a} < \frac{2c\cos\widehat{A}}{b}$, qui est vérifié au dessus de la courbe : $y^2 = x^2\frac{3-2x}{2x+1}$ (trisectrice de Mac-Laurin). Nous avons vu que B appartient à cette courbe lorsque l'angle $\widehat{B}$ est le double de l'angle $\widehat{A}$ ($b = 2a\cos\widehat{A}$) : la courbe coupe donc l'axe $x = \frac{1}{2}$ (soit $a = c$) en $y = \frac{1}{2}$ ($\widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{2}$), et le cercle $x^2 + y^2 = 1$ (soit $b = c$), en $x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ($\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$, $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{2\pi}{5}$). Enfin, la troisième condition : $\frac{b}{c} < \frac{2c\cos\widehat{A}}{b}$ est vérifiée à droite de la courbe : $y^2 = \frac{1}{4x^2} - x^2$, qui admet une tangente verticale en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.



Ces trois courbes ont un point commun : il existe un triangle non équilatéral pour lequel $\frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{2c\cos\widehat{A}}{b} = r$, où $r = 1{,}220\ 744\ 084\ 605\ 759\ 475\ 361\ 685\ 349\ 108\ \ldots$ est la racine positive de : $x^4 - x - 1 = 0$. En effet, si l'on pose $c = ax$, la double égalité ci-dessus équivaut à : $b = ax^2$ et $2\cos\widehat{A} = x^2$, donc d'après Al Kashi,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} = a^2\,(x^4 + x^2 - x^5),$$

soit

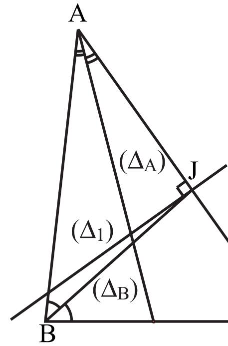
$$(x-1)(x^4 - x - 1) = 0.$$

L'équation est résoluble par radicaux

$$r = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{1}{2u} - \frac{u^2}{4}}$$

avec:

$$u^2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{849}+9}{18}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{849}-9}{18}}$$



Triangle admettant trois pliures optimales (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_1).

et le point B a pour coordonnées : $\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3-r}}{2r}\right)$. Ce triangle pathologique est intéressant, car son meilleur pliage s'obtient selon trois droites totalement différentes, qui ne sont même pas concourantes, preuve qu'on ne peut pas résoudre ce problème de pliage avec un argument simple – en vertu du principe qu'un résultat simple peut s'obtenir par une démonstration compliquée, mais qu'un résultat compliqué ne peut pas s'obtenir par une démonstration simple. Si l'on définit le rendement du pliage $2 - \frac{2\,\mathrm{S}(\Delta)}{\mathrm{S}}$ comme fonction du point T par exemple – en permettant à T de s'éloigner indéfiniment de A, (Δ) pouvant couper]BC[–, sur chaque demi-droite issue de A, ce rendement décrira trois axes de parabole bien raccordés, alternativement convexes et concave. Mais la surface globale aura des bosses et des singularités, sans parler du cas où T tend vers A (René Manzoni a réalisé un premier dessin de cette surface par ordinateur, entre autres dans le cas : $a = 41$, $b = 61$, $c = 50$). Parmi les différents extrema locaux, plusieurs sont susceptibles d'être l'extremum global, à tel point que cet extremum global est atteint trois fois pour un même triangle pathologique. Je ne vois donc pas comment on pourrait, dans le cas général, départager ces extrema sans les calculer explicitement.

Toujours est-il que la position de B par rapport aux trois courbes de la page 116 permet de comparer les trois aires $\mathrm{S_A} = \mathrm{S}(\Delta_A)$, $\mathrm{S_B} = \mathrm{S}(\Delta_B)$ et $\mathrm{S_1} = \mathrm{S}(\Delta_1)$, et en particulier de dire laquelle des trois droites (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_1) est la meilleure pliure (Δ_0) : dans les deux domaines de droite, c'est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{A}}$, (Δ_A) ; dans les deux domaines du haut à gauche, c'est la bissectrice de $\widehat{\mathrm{B}}$, (Δ_B) ; et dans les deux domaines du bas à gauche, c'est la perpendiculaire optimale (Δ_1). Quand la meilleure pliure (Δ_0) est (Δ_1), $\frac{2c\cos\widehat{\mathrm{A}}}{b} = 2x$ est majoré par $\sqrt{2}$. De même, quand $(\Delta_0) = (\Delta_A)$, on a notamment : $\frac{b}{c} < \frac{2c\cos\widehat{\mathrm{A}}}{b}$, soit : $\frac{b^2}{c^2} < 2\cos\widehat{\mathrm{A}}$, donc $\frac{b}{c} < \sqrt{2}$. Et (Δ_0) n'est la bissectrice (Δ_B) que si $\frac{c}{a} < \frac{2c\cos\widehat{\mathrm{A}}}{b}$ et $\frac{c}{a} < \frac{b}{c}$, ce qui entraîne, en multipliant membre à membre : $\left(\frac{c}{a}\right)^2 < 2\cos\widehat{\mathrm{A}}$, donc en définitive $\frac{c}{a} < \sqrt{2}$. Comme $\mathrm{S_B} < \mathrm{S_1}$

nécessite $\widehat{\mathrm{A}} > \frac{\pi}{5}$, on peut même améliorer largement cette dernière majoration.

En fin de compte, la plus petite pliabilité $2 - \frac{2\mathrm{S}(\Delta_0)}{\mathrm{S}}$ d'un triangle vaut $2\left(\sqrt{2}-1\right)$, correspondant à $\mathrm{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, donc à un triangle dégénéré. Le fait que l'extremum d'un tel indice de dissymétrie soit atteint pour un triangle dégénéré me semble assez prévisible, mais je ne voudrais pas généraliser hâtivement.

Énoncé n° 284 (Michel Lafond, 21-Dijon)

Trouver un polynôme P(x) à coefficients entiers n'ayant aucune racine rationnelle et tel que pour tout entier n, il existe un entier m pour lequel P(m) soit divisible par n.

Solution

J'aurais dû préciser, comme l'avait fait l'auteur : « pour tout entier n non nul… ». Mille excuses.

Outre la solution de l'auteur, j'ai reçu des réponses de René Manzoni (76-Le Havre) et de Pierre Samuel (92-Bourg la Reine), et deux solutions fausses.

Les trois solutions justes sont structurées de la même manière :

- On construit un polynôme qui, pour tout nombre premier p, admette une racine modulo p.
- On prouve que, pour tout p premier et tout j entier, ce polynôme admet une racine modulo p^j.
- On prouve que, pour tout n entier non nul, il admet une racine modulo n.

Mais elles présentent des variantes qu'il convient de souligner, dans la première partie (concernant notamment les « premiers nombres premiers ») et dans la seconde.

Pour construire le polynôme, on fait appel à quelques connaissances sur les résidus quadratiques. Dire que r est résidu (quadratique) modulo p signifie que r est premier avec p et que le polynôme $x^2 - r$ s'annule dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Si $p \geq 3$ est premier, $x^2 - r$ admet 0 ou 2 racines, il existe donc $\frac{p-1}{2}$ résidus modulo p ; le produit de deux résidus $r = x^2$ et $r' = x'^2$ est un résidu $rr' = (xx')^2$. Le produit d'un résidu par un non-résidu est donc un non-résidu, et le produit de deux non-résidus est un résidu.

Si l'on trouve trois entiers r_1, r_2, r_3 (non carrés parfaits) tels que pour tout nombre premier p, l'un d'entre eux soit résidu quadratique, pour tout p premier le polynôme $(x^2 - r_1)(x^2 - r_2)(x^2 - r_3)$ s'annulera modulo p bien qu'il n'ait pas de racine rationnelle. René Manzoni rappelle que si p est de la forme $4k + 1$ (resp. $8k + 3$,

$8k+7$), -1 (resp. -2, $+2$) est résidu modulo p. Reste le nombre premier 2 : pour trouver un polynôme qui s'annule modulo tout nombre premier impair et modulo toute puissance de 2, il multiplie $(x^2+1)(x^2+2)(x^2-2)$ par (x^3+3). Pierre Samuel écrit, lui, que si $p \equiv 1$ (4), -1 est un carré modulo p ; si $p \equiv 1$ (3), -3 est un carré modulo p, et si $p \equiv -1$ (12), 3 est un carré modulo p. Mais pour que le polynôme convienne également aux nombres premiers 2 et 3, il choisit en définitive : $(x^2+1)(x^2+3)(x^2-3)(6x^2+x+4)$.

L'auteur du problème résout astucieusement cette difficulté des « premiers nombres premiers » : en utilisant seulement le fait que le produit de deux non-résidus est un résidu, il constate que, si p est un nombre premier autre que 2 ou 7, soit 2 est résidu modulo p, soit -7 est résidu, soit tous deux sont non-résidus auquel cas leur produit -14 est résidu. Il construit ainsi le polynôme $(x^2-2)(x^2+7)(x^2+14)$ dont l'avantage est que, modulo 7, 2 est résidu ($3^2 \equiv 2 \pmod 7$), mais surtout que x^2+7 peut être divisible par n'importe quelle puissance de 2 (on a par exemple : $181^2+7=2^{15}$), ce qui n'est pas le cas de x^2+1 ni même de x^2+3. Point n'est besoin d'un facteur supplémentaire pour englober les cas $p=2$ ou 7.

Ceci nous amène à la seconde partie de la démonstration. Le fait que, pour tout j, il existe un entier x tel que x^2+7 soit divisible par 2^j se démontre par récurrence sur $j \geq 3$. Si $x^2+7 = q\,2^j$, soit q est pair et x^2+7 est divisible par 2^{j+1}, soit q et x sont impairs et 2^{j-2} pair, auquel cas

$$(x+2^{j-1})^2+7=(x^2+7)+2^J x+2^{2j-2}=(q+x+2^{j-2})\,2^j$$

est divisible par 2^{j+1}. Mais la récurrence ne peut commencer qu'à $j=3$: $1^2+7=8$, alors que x^2+3 ou, *a fortiori*, x^2+1 n'est jamais divisible par 8. C'est ce qui conduit René Manzoni à introduire le facteur x^3+3 : la même démonstration par récurrence prouve qu'il peut être divisible par n'importe quel 2^J, si ce n'est que pour x^3+3, la récurrence peut démarrer à $j=1$.

Pierre Samuel énonce à ce sujet un lemme très général : si un polynôme $P(x)$ à coefficients entiers admet une racine simple a modulo p ($P'(a)$ non divisible par p), il admet, pour tout exposant j, une racine simple a_j modulo p^j ($P'(a_j)$ non divisible par p). Récurrence similaire à celle ci-dessus : pour tout polynôme P à coefficients entiers, $P(x+y)=P(x)+y\,P'(x)+y^2\,S(x,y)$ où $S(x,y)$ est un polynôme à coefficients entiers. Donc si $P(a_j)=bp^j$, $P(a_j+sp^j) \equiv (b+sP'(a_j))p^j \pmod{p^{2j}}$: $P'(a_j)$ étant inversible modulo p, il existe s tel que $b+sP'(a_j)$ soit divisible par p, donc $P(a_j+sp^j)$ par p^{j+1}. On pose alors $a_{j+1}=a_j+sp^j$, et comme $a_{j+1} \equiv a_j \pmod p$, $P'(a_{j+1}) \equiv P'(a_j) \pmod p$, donc $P'(a_{j+1})$ n'est pas divisible par p. Lorsque $p=2$, ce lemme ne s'applique pas à x^2+1, ni même à x^2+7, qui admettent 1 pour racine double: $P'(1) \equiv 0 \pmod 2$, mais il s'applique à x^3+3. Lorsque $p=2$ ou $p=3$, il s'applique à $6x^2+x+4$. Lorsque $p \neq 2$, il s'applique à x^2-2 (resp. x^2+7, x^2+14, x^2+1, x^2+2, x^2+3, x^2-3) si 2 (resp. -7, -14, -1, -2, -3, $+3$) est résidu, ce qui achève la seconde partie des trois démonstrations ci-dessus.

La troisième partie repose sur le lemme chinois. Si $n=p_1^{j_1}p_2^{j_2}\dots p_k^{j_k}$, alors il existe $a_1, a_2, \dots, a_k$ tels que $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_k)$ soient divisibles respectivement par $p_1^{j_1}$, $p_2^{j_2}$, …, $p_k^{j_k}$. Mais comme $p_1^{j_1}$, $p_2^{j_2}$, …, $p_k^{j_k}$ sont deux à deux premiers entre eux, il existe un entier m tel que $m \equiv a_1 \pmod{p_1^{j_1}}$, $m \equiv a_2 \pmod{p_2^{j_2}}$, …, $m \equiv a_k \pmod{p_k^{j_k}}$, ce qui prouve que P($m$) est divisible par $p_1^{j_1}$, $p_2^{j_2}$, …, $p_k^{j_k}$, donc par n, leur PPCM.

L'auteur proposait même un exemple numérique pour $n = 1998 = 2 \times 3^3 \times 37$ (le problème était posé en 1999, mais 1999 était un nombre premier !), avec $P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 7)(x^2 + 14)$.

- Modulo 2, $-7 \equiv 1$ est résidu (en fait, P(x) est pair pour tout x).
- Modulo 3, $-14 \equiv 1$ est résidu : $1^2 + 14$ étant divisible par 3, l'un des trois nombres $1^2 + 14$, $4^2 + 14$, $7^2 + 14$ (à savoir $7^2 + 14$) est divisible par 3^2, et l'un des trois nombres $7^2 + 14$, $16^2 + 14$, $25^2 + 14$ (en l'occurrence $16^2 + 14$) est divisible par 3^3.
- Modulo 37, c'est -7 qui est résidu: $17^2 \equiv -7 \pmod{37}$,

Il suffit donc que : $m \equiv 1 \pmod 2$, $m \equiv 16 \pmod{27}$ et $m \equiv 17 \pmod{37}$, soit : $m = 2u + 1 \equiv 16 \pmod{27}$, donc : $u = 27v - 6$, et $m = 54v - 11 \equiv 17 \pmod{37}$, $27v \equiv 14$, $9v \equiv 17$ et $v \equiv 6 \pmod{37}$, donc $v = 37w + 6$ et $m = 1\,998w + 313$. Effectivement P(313) est divisible par 1998. Comme 2003 est lui aussi premier, je me suis intéressé à $n = 2\,002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$: m doit être congru à $\pm 5 \pmod{13}$, $\pm 2 \pmod{11}$, ± 3 ou $0 \pmod 7$, ± 1 ou $0 \pmod 2$, vu le rôle particulier que jouent 2 et 7 dans le polynôme P : $n \equiv 31 \pmod{1\,001}$ convient, mais $n \equiv 112 \pmod{1\,001}$ convient tout autant.

Si l'on remplace la condition « polynôme sans racine rationnelle » par « polynôme sans racine entière », René Manzoni signale l'énoncé 6/249 de Sierpinski, *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*, qui prouve (à l'aide du lemme chinois ci-dessus) que « la congruence $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0$ [m] admet des solutions $x \in \mathbf{Z}$ quel que soit m ($m \in \mathbf{N}$) bien que l'équation $6x^2 + 5x + 1 = 0$ n'admette pas de solution $x \in \mathbf{Z}$ ». Avec la condition « polynôme sans racine rationnelle », l'auteur du présent énoncé a trouvé un polynôme solution de degré 6. On peut prouver que, sous cette condition, il n'existe pas de solution du second degré. En effet, considérons un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$. Soit son discriminant $b^2 - 4ac$ est un carré parfait d^2, et le trinôme admet deux racines rationnelles. Soit $b^2 - 4ac = -d^2 < 0$, et un nombre premier $p \equiv 3 \pmod 4$ ne divisant pas d ne peut pas diviser $(2ax + b)^2 + d^2 = 4a(ax^2 + bx + c)$. Soit dans la décomposition en facteurs de $b^2 - 4ac$, l'un au moins des facteurs premiers p admet un exposant impair j : en ce cas, $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être divisible par p^{j+1}, sinon $4a(ax^2 + bx + c) + (b^2 - 4ac) = (2ax + b)^2$ serait divisible par p^j et pas par p^{j+1}, ce qui est absurde vu que j est impair.

Maintenant, existe-t-il des polynômes solutions de degré 3, 4 ou 5 ? Avis aux amateurs…