Nous publions ci-dessous avec plaisir la rectification proposée par notre collègue Jacques Bouteloup.

Elle concerne en effet une notion fondamentale, celle de parité, qui explique à merveille les célèbres « jeux de Nim ».

À propos du jeu de Nim ordinaire inverse

Jacques Bouteloup

L'ouvrage récemment réédité « Avec des nombres et des lignes »(1) *par A. Sainte-Laguë comportait dans son édition originale une erreur qui a été recopiée*. Elle se situe en haut de la page 94, à propos de ce jeu, que Sainte-Laguë appelle de son autre nom « Fan-Tan ». Comme on trouve là une application très simple et intéressante de l'écriture d'un entier en base 2, j'ai pensé qu'il était bon de faire paraître une rectification à ce sujet.

J'ai découvert en fait l'erreur dans l'édition originale il y a bien longtemps. À cette époque, le jeu en question fut rendu célèbre par le film « L'année dernière à Marienbad », où deux protagonistes jouaient à ce jeu. J'écrivis à ce sujet un article dans le bulletin de l'A.P.M.E.P d'octobre 1961. Plus tard, je signalai de nouveau l'erreur dans un article consacré à divers jeux de Nim en août 1991 dans « Quadrature ».

Pour le lecteur non au courant, je rappelle brièvement qu'on considère un certain nombre de tas d'objets, le nombre d'objets de chaque tas étant arbitraire. À tour de rôle, chacun des deux joueurs doit enlever un nombre quelconque d'objets d'un tas et d'un seul (au minimum 1, au maximum tous ceux du tas). Celui qui prend le dernier objet présent est le gagnant dans le Nim direct, le perdant dans le Nim inverse.

La stratégie du Nim direct est obtenue en considérant les positions du « noyau » : pour cela, on écrit les nombres d'objets des tas en base 2, les uns au-dessous des autres. On considère les totaux d'unités de même ordre. Les positions du noyau sont celles pour lesquelles tous les totaux sont pairs (notamment la position vide) (cf. encadré 1). On voit aisément qu'on peut toujours en jouant constituer une telle position à partir d'une qui n'appartient pas au noyau (cf. encadré 2), et qu'inversement, partant d'une position du noyau, on forme nécessairement une

Encadré 1

Supposons, par exemple, que nous ayons quatre rangées de 9, 5, 5 et 2 objets respectivement. Ces nombres d'objets s'écriront respectivement 1 001, 101, 101 et 10 dans le système binaire. De là les « totaux d'unités du même ordre » : 1, 2, 1, 3. Il ne s'agit donc pas d'une position du « noyau ».

(1) Ouvrage co-diffusé par l'APMEP sous le nº 903 (page 25 de la plaquette « Visages … ».

Encadré 2

• *Reprenons l'exemple de l'encadré précédent :*
– enlever, par exemple, un objet au premier tas lui laisse huit objets et les « totaux par unités du même ordre » donnent alors le triplet (3, 1, 2) qui n'est toujours pas dans le noyau ;
– mais, si l'on enlève 7 objets du premier tas, il en reste 2, d'écriture binaire 10 et les « totaux par unités du même ordre » donnent alors le triplet (2, 2, 2) qui appartient au noyau.
• *Comment trouver la « bonne » transformation conduisant au noyau :*
– on considère le premier total impair à partir de la gauche et on agit sur l'un des tas qui y interviennent en transformant en 0 le 1 correspondant. Sur notre exemple, le seul tas en jeu était le premier, écrit 1 001, à transformer donc, déjà, en 001, ce qui enlèverait 8 objets ;
– on agit ensuite autant que nécessaire sur les autres chiffres, ici pour ajouter 1 en second ordre et enlever 1 au premier. D'où l'écriture finale 010, qui laisse 2 objets : on n'en enlèvera que 7.

position n'appartenant pas à ce noyau. Il en résulte que si les deux joueurs connaissent cette stratégie, celui qui est amené à jouer à partir d'une position n'appartenant pas au noyau gagne en formant une position du noyau (cf. encadré 3).

Encadré 3

Toujours sur notre exemple, avec un joueur A « initié » et un autre B, et la position initiale 9, 5, 5, 2, A commençant :
A → 2, 5, 5, 2 (2, 2, 2)
B → 2, 2, 5, 2 (1, 3, 1)
A → 2, 2, 2, 2 (4, 0)
B → 0, 2, 2, 2 (3,0)
A → 0, 0, 2, 2 (2,0)
B → 0, 0, 1, 2 (1,1)
A → 0, 0, 1, 1 (0,2)
et A gagne au coup suivant.
On constate que A construit ainsi une suite de positions du noyau appelée à se terminer par des zéros uniquement lorsque A enlève le dernier objet présent.

AUTRE EXEMPLE :

Position initiale 7, 6, 5, soit 111, 110, 101 en base 2 et les « totaux d'unités du même ordre » : (3, 2, 2).
A → 3, 6, 5 (2, 2, 2) en agissant sur le premier tas,
ou A → 7, 2, 5 (2, 2, 2) en agissant sur le deuxième tas,
ou A → 7, 6, 1 (2, 2, 2) en agissant sur le troisième tas.
Prenons la première éventualité, puis B → 3, 0, 5 (1, 1, 2). Alors A → 3, 0, 3 (2, 2,), etc.

II est alors normal d'appeler une telle position « gagnante », les positions du noyau étant appelées « perdantes ». En fait, certains auteurs emploient la terminologie inverse, appelant « gagnante » une position du noyau car elle l'est pour celui qui la forme. Sainte-Laguë parle de même de position « bonne ».

L'erreur classique consiste alors à dire qu'on passe à la stratégie de Nim inverse en remplaçant « pairs » par « impairs ». La faute apparaît facilement car, si le total le plus à gauche vaut 1, correspondant donc à un seul tas, on peut diminuer ce tas pour faire disparaître le 1 sans changer les autres unités, et obtenir ainsi une position à totaux tous impairs si l'initiale l'était. L'une des hypothèses caractérisant un noyau n'est plus vérifiée.

J'ai alors découvert, et ce fut l'objet de mon article, qu'il suffit d'employer la même stratégie pour l'inverse que pour le direct tant qu'il reste au moins deux tas de plus d'un objet. Si vous êtes en train de gagner ainsi au Nim direct, c'est vous qui recevez le premier une position ne comportant plus qu'un seul tas de plus d'un objet. En effet, il lui correspond au moins un total 1 hors du total le plus à droite, et les totaux ne sont pas tous pairs. Vous changez alors de tactique par rapport au direct, supprimant complètement ce tas, ou y laissant un objet, de façon à offrir à votre adversaire un nombre impair de tas de 1, position visiblement perdante.

Dans mon article, je donnais plusieurs exemples. En voici un, A gagnant à partir d'une position *a priori* gagnante, les coups de B ayant été tirés au sort. J'ai indiqué le nombre d'objets de chaque pas, en séparant par des virgules (le quadruplet suivant le nom d'un joueur est celui sur lequel il va agir) :
A (9,5,5,2) → B (2,5,5,2) → A (2,2,5,2) → B (2,2,2,2) → A (0,2,2,2) → B (0,0,2,2) → A (0,0,1,2) → B (0,0,1,1) dans le cas direct, (0,0,1,0) dans le cas inverse.

Bien entendu, cette faute n'entache pas la valeur du livre remarquable de Sainte-Laguë. Les plus grands font des erreurs

De très nombreux aspects de jeux de Nim s'étant introduits, il apparaissait intéressant de mettre en évidence ceux présentant une stratégie analogue consistant à jouer « comme au direct » pendant « un certain temps ». Un exemple remarquable en est le jeu de Wythoff (dit « Jeu des deux tas d'or ») pour lequel j'ai fait un article dans le bulletin de 1'A.P.M.E.P de Juin 1983. J'ai fait une étude systématique de jeux que j'ai appelés « normaux » présentant cette particularité. On en trouvera quelques exemples dans l'article cité de Quadrature. Il y en a beaucoup plus dans mon ouvrage sur les jeux de Nim (édité chez A.C.D.S.)[(2)]. Mais l'édition en ayant été ratée, les pages se détachent. Pour celui qui n'accepte pas de compulser un ouvrage vite devenu un tas de feuilles, il est donc déconseillé de se procurer ce livre.

(2) « Les jeux de Nim », par Jacques Bouteloup. Éditions A.D.C.S. (BP 222. 80002 Amiens Cedex 1) en 1996. 360 pages en A5.