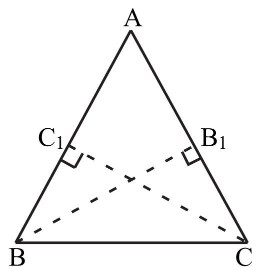
Triangle isocèle ou non

Jean de Biasi(*)

Un triangle isocèle ABC de sommet A (AB = AC) admet un axe de symétrie : la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$, qui est également hauteur et médiatrice du côté opposé [BC]. L'existence de cette symétrie montre que, respectivement, les *hauteurs*, les *médianes*, les *bissectrices intérieures* relatives aux sommets B et C sont égales (de même longueur). Il en est de même pour les *bissectrices extérieures* sauf si le triangle est équilatéral car dans ce cas ces bissectrices sont parallèles aux côtés opposés et donc de « longueur infinie ».
Qu'en est-il des réciproques ?

1. Si un triangle a deux hauteurs égales il est isocèle.

Soient B_1 et C_1 respectivement les pieds des hauteurs issues de B et de C. Si $BB_1 = CC_1$ les deux triangles rectangles BCB_1 et BCC_1 ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal et sont donc égaux. Il en résulte $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et le triangle ABC est isocèle de sommet A.



Remarque. Cette propriété se démontre également en considérant l'égalité $AB \cdot CC_1 = AC \cdot BB_1$ obtenue en exprimant de deux façons le double de l'aire du triangle ABC.

2. Si un triangle a deux médianes égales il est isocèle.

Démontrons ce résultat de plusieurs façons.
A′, B′, C′ sont les milieux des trois côtés.

– *Avec le centre de gravité* :

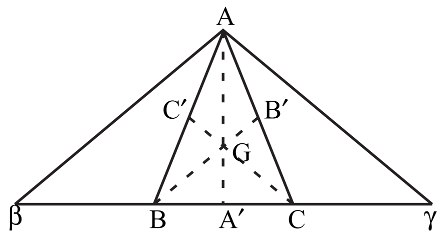
Les médianes BB′ et CC′ se coupent en G centre de gravité du triangle ABC. Comme G est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir du sommet correspondant, l'égalité BB′ = CC′ implique l'égalité GB = GC. La droite (GA′), qui est également la droite (AA′), est donc la médiatrice de [BC] et le triangle ABC est ainsi isocèle de sommet A.

– *Avec le théorème des milieux* :

Soit β et γ respectivement les symétriques de C par rapport à B et de B par rapport à C.

(*) IREM de Toulouse

[BC] et $[\beta\gamma]$ ont le même milieu, A′.
(BB′) [resp. (CC′)] est droite des milieux dans le triangle $\mathrm{A}\beta\mathrm{C}$ (resp. $\mathrm{A}\gamma\mathrm{C}$). Par suite $\mathrm{A}\beta = 2\mathrm{BB}'$ et $\mathrm{A}\gamma = 2\mathrm{CC}'$ et $\mathrm{BB}' = \mathrm{CC}'$ implique donc $\mathrm{A}\beta = \mathrm{A}\gamma$.
Le triangle $\mathrm{A}\beta\gamma$ est ainsi isocèle de sommet A ; (AA') est donc médiatrice de $[\beta\gamma]$ et par suite de [BC] et le triangle ABC est isocèle de sommet A.



– *Avec le théorème de la médiane* :

On pose traditionnellement : BC = *a*, CA = *b*, AB = *c*.

Ce théorème donne les égalités : $c^2 + a^2 = \dfrac{b^2}{2} + 2\mathrm{BB}'^2$ et $a^2 + b^2 = \dfrac{c^2}{2} + 2\mathrm{CC}'^2$.

De BB′ = CC′ découle alors immédiatement $b = c$.

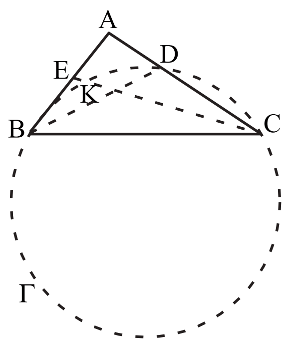
3. Si un triangle a deux bissectrices intérieures égales il est isocèle.

La démonstration de cette propriété n'est pas aussi simple que pourrait le laisser penser l'analogie avec les deux résultats qui précèdent.

– *Par la contraposée* :

Montrons que l'inégalité des angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ implique l'inégalité des bissectrices intérieures BD et CE.

Supposons $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ aigus et $\widehat{\mathrm{B}} > \widehat{\mathrm{C}}$ (si l'un de ces angles était obtus le triangle n'aurait pas beaucoup de chances d'être isocèle de sommet A).
Soit Γ le cercle circonscrit au triangle BCD et K le point en lequel (CE) recoupe ce cercle.



On a $\widehat{\mathrm{DBK}} = \widehat{\mathrm{KCD}} = \dfrac{\widehat{\mathrm{C}}}{2}$, puis $\widehat{\mathrm{BCD}} < \widehat{\mathrm{KBC}}$ car $\widehat{\mathrm{C}} < \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} + \dfrac{\widehat{\mathrm{C}}}{2}$.

Il en résulte $\overset{\frown}{\mathrm{BD}} < \overset{\frown}{\mathrm{CK}}$, d'où : BD < CK.

Or $\widehat{\mathrm{DBK}} = \dfrac{\widehat{\mathrm{C}}}{2} < \dfrac{\widehat{\mathrm{B}}}{2} = \widehat{\mathrm{DBE}}$ et K est entre C et E.
Il en résulte CK < CE et, en définitive, BD < CE.

– *Par le calcul* :

D, pied de la bissectrice intérieure issue de B, étant barycentre de (C, c), (A, a), on a l'égalité $c\text{DC} - a\text{DA} = 0$ et, comme DC + DA = b, il en résulte $\text{DC} = \dfrac{ab}{c+a}$ et $\text{DA} = \dfrac{bc}{c+a}$.

Grâce à la formule de Leibniz, $c\text{CB}^2 + a\text{AB}^2 = (c+a)\text{BD}^2 + c\text{DC}^2 + a\text{DA}^2$, on obtient :

$$\text{BD}^2 = ca\frac{(c+a)^2 - b^2}{(c+a)^2}$$

et, de manière analogue, pour la bissectrice intérieure issue de C :

$$\text{CE}^2 = ab\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}.$$

Si les bissectrices intérieures BD et CE ont la même longueur on a :

$$ab\,[(a+b)^2 - c^2](c+a)^2 - ca\,[(c+a)^2 - b^2](a+b)^2 = 0$$

d'où :

$$(b-c)(a+b+c)[a^3 + a^2(b+c) + 3abc + bc^2 + cb^2] = 0.$$

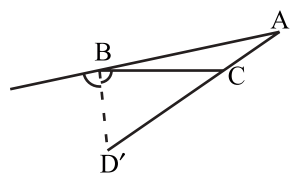
Il en résulte $b = c$ et le triangle ABC est isocèle de sommet A.

4. Et si un triangle a deux bissectrices extérieures égales ?

4.1. Étude générale

Supposons le triangle ABC non isocèle de sommet B ($c \neq a$). Dans ce cas la bissectrice extérieure de l'angle de sommet B coupe (AC) en un point D′, barycentre de (C, c), (A, $-a$).

Un calcul analogue au précédent conduit alors à la valeur :



$$\text{BD}'^2 = ca\frac{b^2 - (c-a)^2}{(c-a)^2}$$

et, pour la bissectrice extérieure issue de C (si $a \neq b$) :

$$\text{CE}'^2 = ab\frac{c^2 - (a-b)^2}{(a-b)^2}.$$

BD′ = CE′ équivaut à :

$$ca\,[b^2 - (c-a)^2](a-b)^2 = ab\,[c^2 - (a-b)^2](c-a)^2.$$

a est non nul et, évidemment, cette égalité est satisfaite pour $b = c$. Après quelques calculs elle prend alors la forme équivalente :

$$(b-c)(b+c-a)[bc(b+c-3a) + a^2(b+c) - a^3] = 0.$$

Remarque : cette relation se déduit de celle du paragraphe précédent en remplaçant a par $-a$.

Pour un triangle non isocèle de sommet A ($b \neq c$) et non aplati ($b + c - a \neq 0$), elle se réduit à

$$bc(b + c - 3a) + a^2(b + c) - a^3 = 0 \qquad \text{(R)}$$

Si l'on se fixe $b + c = s > 0$, alors $bc = p = \dfrac{a^3 - a^2 s}{s - 3a}$ et b et c sont solutions de l'équation

$$X^2 - sX + \frac{a^3 - a^2 s}{s - 3a} = 0 \qquad \text{(E)}$$

Le discriminant de (E) est : $\Delta = s^2 - 4\dfrac{a^3 - a^2 s}{s - 3a} = \ldots = \dfrac{s - 2a}{s - 3a}\left[\left(s - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{7a^2}{4}\right].$

Δ est positif pour $s < 2a$ ou $s > 3a$. Mais $p > 0$ exige $a < s < 3a$.
On voit donc que b et c existent et sont positifs pour $a < b + c < 2a$.
Comme, de plus,

$$(b-c)^2 - a^2 = (b+c)^2 - 4bc - a^2 = \Delta - a^2 = \ldots = \frac{(s-a)^3}{s-3a} < 0,$$

on a, $|b - c| < a < b + c$ et il existe bien un triangle, *non isocèle*, ayant pour longueurs des côtés a, b, c.

Dans ce triangle les bissectrices extérieures des angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ sont égales.

Ainsi, pour $s \in \,]a, 2a[$, il existe b et c, avec $b + c = s$, tels que a, b, c soient côtés d'un triangle ABC, ***non isocèle***, *dont les bissectrices extérieures des angles* $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ *sont égales.*

Par exemple, avec $a = 12$, $b + c = \dfrac{3}{2}a = 18$, (E) s'écrit $X^2 - 18X + 48 = 0$ d'où : $b = 9 + \sqrt{33}$, $c = 9 - \sqrt{33}$, puis : $\mathrm{BD}' = \mathrm{CE}' = 6\sqrt{2}$.

4.2. Cas du triangle rectangle

Un triangle ABC ayant la propriété précédente peut-il être rectangle ?

En A ?
On devrait avoir

$$a^2 = b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = s^2 - 2p,$$

d'où

$$p = \frac{s^2 - a^2}{2}$$

et b et c devraient être racines de l'équation $X^2 - sX + \dfrac{s^2 - a^2}{2} = 0$.

b et c étant déjà racines de (E), ceci exigerait

$$\frac{s^2 - a^2}{2} = \frac{a^3 - a^2 s}{s - 3a},$$

d'où …

$$(s - a)(s^2 - 2as - a^2) = 0$$

dont l'unique racine positive, différente de a, est $a\left(1+\sqrt{2}\right)$, incompatible avec la condition $a < s = b + c < 2a$. La réponse, ici, est donc *négative*.

En C (ou B) ?

On devrait avoir $c^2 = a^2 + b^2$ d'où, en reportant dans (R),

$$(b+c)(bc+c^2-b^2)-(c^2-b^2+3bc)\sqrt{c^2-b^2} = 0.$$

Divisant par c^3, $X = \dfrac{b}{c}$ est alors racine de l'équation

$$(1+X)(1+X-X^2)-(1+3X-X^2)\sqrt{1-X^2} = 0. \qquad (e_1)$$

Après simplification par $\sqrt{1+X}$, élévation au carré et réduction, on aboutit à :

$$X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 1 = 0 \qquad (e_2)$$

(e_2) admet 0,574 21… pour seule racine appartenant à]0, 1[. Ce nombre est également racine de (e_1). (Attention : (e_1) et (e_2) ne sont équivalentes que si $(1 + X - X^2)$ et $(1 + 3X - X^2)$ sont de même signe).

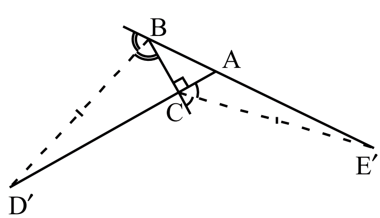
Or $X = \dfrac{b}{c} = \cos\widehat{A}$. Il en résulte $\widehat{A} \cong 54{,}956°$ et dans ce triangle rectangle les bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égales.

Il existe un triangle ABC, *rectangle en* C, *unique à une similitude près, tel que les bissectrices extérieures des angles* $\widehat{B}$ *et* $\widehat{C}$ *sont égales. L'angle* $\widehat{A}$ *vaut approximativement* 54,956° *(et l'angle* $\widehat{B}$ *, le complément).*

Remarque : l'étude précédente pourrait être conduite à l'aide de relations trigonométriques.

Notant α l'angle en A on a :

$$BD' = \frac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{a}{2}\right)}.$$



Puis, dans le triangle ACE′ :

$$\mathrm{CE}' = \frac{b \sin \alpha}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

BD′ = CE′ donne alors, en tenant compte de $a = b \tan \alpha$ (et après avoir revu ses formules trigonométriques !) : $\cos \alpha + \tan \alpha = 2$.

Cette équation est d'aspect sympathique… mais il faut la résoudre !

En exprimant $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ en fonction de $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on aboutit à une équation du quatrième degré.
On peut également poser $\cos \alpha = \mathrm{X}$ et on obtient encore une équation du quatrième degré, qui est en fait l'équation (e_2). C'est rassurant mais il n'y a pas de miracle !

4.3. Lieu géométrique du sommet A, les sommets B et C étant fixés

Fixons B et C et prenons $a = 1$. b et c sont alors racines de l'équation

$$\mathrm{X}^2 - s\mathrm{X} + \frac{1-s}{s-3} = 0.$$

Ces deux racines sont :

$$b = \frac{s - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad c = \frac{s + \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec

$$\Delta = \frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 4}{s-3} > 0$$

pour $1 < s < 2$.
Prenons un système d'axes orthonormés, d'origine O milieu de [BC], l'axe $x'x$ étant porté par (BC) et orienté positivement de B vers C.
A′ étant le projeté orthogonal de A sur $x'x$ on a :

$$\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 = c^2 - b^2 = 2\overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{OA}'} = 2x = s\sqrt{\Delta}.$$

Il en résulte :

$$x = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 4}{s-3}} = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{(s-2)(s^2 - s + 2)}{s-3}}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= c^2 + b^2 \\ &= 2\mathrm{OA}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2} = 2\mathrm{OA}^2 + \frac{1}{2} = (b+c)^2 - 2bc = \frac{s^3 - 3s^2 + 2s - 2}{s-3}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathrm{OA}^2 = \ldots = \frac{2s^3 - 6s^2 + 3s - 1}{s - 3}$$

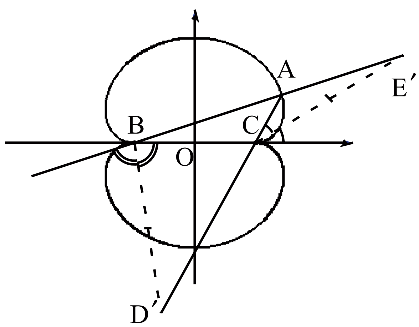
et,

$$y^2 = \mathrm{OA}^2 - x^2 = \ldots = \frac{(s-1)^4(s+1)}{4(3-s)}.$$

Ainsi, si A est situé dans le premier quadrant, ses coordonnées sont :

$$x = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{(s-2)(s^2-s+2)}{s-3}} \quad ; \quad y = \frac{(s-1)^2}{2}\sqrt{\frac{s+1}{3-s}}.$$

En faisant varier le paramètre s de 1 à 2 et en complétant par les symétries par rapport aux axes on obtient la courbe lieu géométrique du point A.
B et C sont des points de rebroussement (de première espèce).



Remarque :
La représentation paramétrique précédente prendrait une forme un peu plus simple en remplaçant s par $s + 1$.
$1 < s < 2$ deviendrait $0 < s < 2$ 1 et le point de rebroussement en C correspondrait à $s = 0$…

5. Conclusion sous forme de questions :

5.1. Quelqu'un a-t-il rencontré cette étude dans la littérature ?
5.2. Le triangle rectangle du **4.2** a-t-il d'autres propriétés que celle indiquée ici ?
5.3. Existe-t-il une parenté entre la courbe précédente et la néphroïde ?

Pour **5.1**, J.-P. Friedelmeyer nous signale que H.S.M. Coxeter évoque ce problème dans son ouvrage « Redécouvrons la géométrie » (Dunod, 1971), p. 15 - 18 et signale en particulier le cas remarquable du triangle de O. Bottema dans lequel les angles de sommets B et C mesurent respectivement 12° et 132°. De façon très élémentaire (niveau collège) on démontre, par des calculs d'angles, que les triangles BCD′ et BCE′ sont isocèles de sommets respectifs B et C. Il en résulte BD′ = BC = CE′, d'où BD′ = CE′ (réciproquement on peut établir que ce triangle est le seul ayant les bissectrices extérieures en B et C égales à BC et donc égales).

Pour **5.3**, peut-être les deux courbes sont elles homologues dans une affinité orthogonale d'axe BC, mais c'est peu probable car la néphroïde est du troisième degré.