Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XVe siècle

Maryvonne Spiesser

Introduction

Il est difficile de se faire une idée précise de ce que pouvait être l'enseignement des mathématiques à l'aube de la Renaissance, qu'il s'agisse du contenu ou des structures. Il est certain que l'Université médiévale a privilégié l'apprentissage d'arts comme la grammaire et la logique en délaissant plus ou moins les disciplines du *quadrivium*(1) (arithmétique, musique, géométrie, astronomie). Tant à Paris qu'à Oxford, les facultés des arts tiennent une place importante. Au début du XIVe siècle, les statuts d'Oxford mentionnent, pour l'arithmétique et la géométrie, un enseignement de l'*Institution arithmétique* de Boèce, de la pratique du calcul à l'aide du système positionnel indo-arabe (l'algorisme), des premiers livres des *Éléments* d'Euclide. Les statuts de l'Université de Paris sont beaucoup plus laconiques. Les résultats de recherches récentes ont amené Guy Beaujouan, dont l'intérêt pour ces questions est bien connu, à supposer que l'enseignement des mathématiques à Paris au XIVe siècle était irrégulier. Il cite des maîtres qui, à cette époque, dispensaient des cours privés à leur domicile les jours fériés(2).

Si les conditions d'enseignement et les programmes sont flous, d'autres signes montrent que les disciplines scientifiques n'étaient pas si délaissées. C'est d'abord la présence dans l'Université médiévale de mathématiciens de renom : au XIVe siècle en effet, Jehan de Murs fut maître ès arts à la Sorbonne et Nicole Oresme enseigna au collège de Navarre. C'est ensuite l'existence d'un corpus de manuels maintes fois recopiés, tels l'*algorisme* ou la *sphère* de Sacrobosco (vers 1225).

Il est encore plus difficile de cerner l'enseignement non universitaire, pour lequel aucune étude d'ensemble n'existe, et de connaître la part des disciplines scientifiques. Les documents d'archives sur les écoles élémentaires sont rares et, à ma connaissance, ne donnent pas de renseignements sur les disciplines scientifiques.

Qu'il s'agisse de géométrie ou d'arithmétique, il faut distinguer l'enseignement théorique de celui des techniques. En arithmétique, en opposant théorie et pratique, on oppose la science des nombres proprement dite à l'art du calcul. L'arithmétique théorique, dite *spéculative* par les auteurs médiévaux, divulgue l'enseignement de

(1) Le mot *quadrivium* ou quadruvium (quadruple voie) apparaît dans l'*Institution arithmétique* de Boèce, qui semble être à l'origine de l'emploi du terme.
(2) Guy Beaujouan, « Le quadrivium et la Faculté des arts », dans Olga Weijers et Louis Holtz (éds.), *L'enseignement des disciplines à la Faculté des arts (Paris et Oxford, XIIIe-XVe siècles)*, Turnhout, 1997, p. 185-194, à la p. 189.

Nicomaque de Gérase (I^er^-II^e^ siècle), vulgarisé par Boèce au VI^e^ siècle. Dans l'*Institution arithmétique*, Boèce reprend le plan en deux parties de Nicomaque : dans le premier livre sont présentées les propriétés intrinsèques des entiers (en procédant en général par opposition de couples comme pair-impair, premier-composé, etc.), puis les relations entre les nombres, fondées sur une classification des différents rapports ou « proportions ». Un rapport pourra par exemple être *multiple*, ou *superparticulier*, de type $\frac{n+1}{n}$, comme le rapport de 3 à 2, ou *superpartient* $\left(\frac{n+p}{n},\ 1<p<n\right)$, comme le rapport de 5 à 3, etc. Le second livre de l'*Institution arithmétique* est consacré, pour l'essentiel, à l'étude des nombres figurés et des moyennes. Les nombres figurés sont les nombres plans triangulaires (1, 3, 6, 10, …), carrés, pentagonaux, etc., associés à des figures du même nom. Ce sont aussi les nombres solides (pyramidaux, cubiques, …). Les moyennes les plus connues remontent aux mathématiques de l'École pythagoricienne, ce sont l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique. Elles sont liées à la théorie des intervalles musicaux(3).

Pour la pratique du calcul, il faut faire la différence entre les traités d'abaque et les algorismes. Les uns perpétuent la tradition d'un calcul fondé sur la manipulation de jetons sur une table à calculer, les autres enseignent le système de numération indo-arabe et les techniques opératoires issues de ce système. Les manuscrits et imprimés qui ont été conservés font apparaître une utilisation de l'abaque plus importante et plus durable dans le nord de la France(4) et de l'Europe que dans le sud. Les arithmétiques sur lesquelles je m'appuie dans cette étude utilisent toutes la numération indo-arabe et le calcul écrit sur papier.

Les premiers algorismes sont des adaptations latines du « Calcul indien » d'al-Khwarizmi, d'où provient leur nom(5). L'enseignement de l'algorisme est intégré dans l'arithmétique du *quadrivium*, il est essentiellement divulgué à partir de deux textes qui datent du début du XIII^e^ siècle : le *Carmen de algorismo*, composition en vers d'Alexandre de Villedieu (vers 1202) et, paru une vingtaine d'années plus tard, l'*Algorismus* de Sacrobosco (John of Holywood) dont il a été question plus haut. Ces deux textes ont été beaucoup reproduits ; toutefois, les copies sont surtout nombreuses dans le nord de la France et de l'Europe(6). L'algorisme universitaire trouve ses applications dans les calculs liés à l'astronomie et au *comput* ecclésiastique, qui fixe les dates des fêtes mobiles chrétiennes(7).

(3) Sur ces questions, on peut consulter M. Clapié et *al.*, *Pythagore : quelques aspects de l'arithmétique pythagoricienne*, IREM de Toulouse, 1987 ; M. Spiesser, *Histoire de moyennes*, IREM de Toulouse, 1997.

(4) L'arithmétique de Jehan Adam, écrite en 1475, en est un exemple (Paris, Bibl. Ste Geneviève, fr. 3143). Jehan Adam était secrétaire du notaire et auditeur des comptes de Louis XI.

(5) Voir André Allard, *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, le calcul indien (algorismus), versions latines du XII^e^ s.*, Paris, 1992.

(6) Des centaines de copies de ces deux textes sont répertoriées (voir W. Van Egmond, « How Algebra came to France », [9], p. 132).

(7) Voir D. E. Smith, History of Mathematics [6], t. 2, p. 651.

À la fin du Moyen Âge se forge peu à peu une tradition nouvelle à l'intérieur de l'arithmétique pratique, liée à la nécessité d'une formation mathématique plus exigeante pour les futurs marchands. Cette tradition se développe hors de l'Université, les écrits abandonnent le latin pour la langue vulgaire. En Italie, des algorismes destinés au milieu du commerce apparaissent dès le XIVe siècle. En France, de tels traités naissent plus tard, tout au long du XVe siècle.

I. Les arithmétiques commerciales en France

Actuellement, nous possédons une quinzaine de textes d'arithmétique marchande (ou affiliés) originaires de la France actuelle, pour une période qui va de 1420 environ à la fin du siècle. La langue d'écriture est le français ou l'occitan (avec ses variantes). À titre de comparaison, environ trois cents manuscrits sur l'arithmétique et l'algèbre, écrits aux XIVe et XVe siècles, ont été conservés dans les bibliothèques italiennes(8). Pourquoi ce décalage ? Essentiellement parce que le grand commerce est plus développé en Italie qu'en France, ce qui a contribué à la création, dès la fin du XIIIe siècle, d'écoles spécifiques à l'enseignement des techniques mathématiques nécessaires au commerce et a créé un groupe social qui a fait vivre et évoluer ce type de mathématiques. En France, un tel milieu humain, s'il existe, est beaucoup plus restreint, beaucoup moins influent. Néanmoins, la composition de traités « marchands », tout au long du XVe siècle, répond à des besoins nouveaux en matière de formation professionnelle.

Les métiers du commerce se complexifient, ce qui va de pair avec la sédentarisation progressive du bourgeois-marchand qui peut maintenant se permettre – cela devient également une nécessité – de donner une formation à ses fils : elle est notamment d'ordre mathématique et linguistique. En 1460, dans un poème dédié à son fils, le marchand lyonnais François Garin écrit :

« Quant tu auras a l'escole aprins,
Choisir te couvient [party] prendre ;
Alors ne soyes entreprins
Avec marchans te vueilles rendre
Combien premier tu dois apprendre
A bien nombrer, car c'est la voye
Pour plus tost savoir et entendre
Le compte d'or et de monnoye(9). »

Et Garin ajoute, un peu plus loin dans sa complainte, qu'il n'est pas recommandé au marchand de se disperser en étudiant plusieurs *ars*(10) ni de lire « ystoyres et

(8) Warren Van Egmond, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Florence, 1980.

(9) « Après avoir étudié à l'école, il te faut prendre un parti ; alors ne sois pas embarrassé ; pour devenir marchand, tu dois d'abord apprendre à bien calculer, car c'est la voie pour connaître et comprendre au plus vite le compte de l'or et de la monnaie ». *La Complainte de François Garin, marchand de Lyon (1460)*, Lyon, Centre d'études et de recherches médiévales, 1978, v. 1073-1080.

(10) « *D'acquerir science nouvelle / ne vueille estre curieulx : / souffise toy de savoir celle / que [choisi] auras pour le mieulx ; / en peu de temps on devient vieulx : / une souffira pour ta vie ; / les trop soubtilz sont dangereux, / de plusieurs ars n'ayes envie* ». La complainte de François Garin, op. cit. n. 11, v. 1089-1096.

beaulx livres », car « trop les aymer n'est pour le mieulx », surtout pour ceux qui « suyvent marchandise ». En bref, un bon marchand doit rester pragmatique.

À cette époque, Lyon, avec ses foires qui durent plusieurs semaines et concurrencent celles de Genève, voit passer des populations cosmopolites (Italiens, Espagnols, Suisses) allant des petits commerçants aux gros négociants. Lyon est une place économique et financière importante, bien située sur deux voies fluviales, au carrefour de deux axes trans-européens de communication : nord-sud (Mer du Nord-Méditerranée) et est-ouest. À Lyon, on assiste, vers 1465, à l'arrivée massive de marchands et de banquiers italiens. En 1466, on compte quinze succursales de maisons florentines(11).

Les influences

Il est certain que l'Italie voisine a joué un rôle dans le développement des traités commerciaux français, au moins de ceux qui sont originaires du Midi. On connaît deux maîtres florentins venus enseigner leur art à Montpellier (Jacopo da Firenze – vers 1307 – et Paolo Gherardi – vers 1327). Le siège de la papauté à Avignon durant une bonne partie du XIVe siècle avait favorisé la circulation des hommes et accru les communications entre l'Italie et la France. À cette époque, 25% environ de la population d'Avignon, 10 à 15% de celle de Montpellier, est toscane(12). Autre témoignage des liens avec l'Italie dans le domaine mathématique, une arithmétique anonyme, l'*Arte dell'abbaco*, conservée à la Bibliothèque Riccardiana de Florence (manuscrit 2511) a été écrite en toscan dans la région d'Avignon vers 1330.

Cela ne ferme pas la porte à d'autres sources d'influences, que l'on ne peut que présumer à l'heure actuelle, en particulier des influences venues d'Espagne. La première arithmétique marchande occitane connue, dite « arithmétique de Pamiers » a été écrite dans une ville située sur l'axe Barcelone-Toulouse(13). Les Pyrénées ne sont pas une barrière et beaucoup de voyageurs venant d'Espagne passent par le comté de Foix. Quand on examine l'arithmétique en catalan de Francesc Sanct Climent, imprimée en 1482 à Barcelone, on voit qu'elle a bien des points communs (dans la structure comme dans le détail) avec son aîné, le *compendi del art del algorisme* de Pamiers.

Modes d'enseignement

À partir des manuscrits conservés, on peut se forger une bonne idée du contenu scientifique enseigné aux marchands français. Mais dans quels cadres ce savoir était-il dispensé ? Préceptorat, apprentissage collectif ? Tout ce qui touche à la formation au commerce en France est peu connu, contrairement à l'Italie où, depuis le XIVe siècle, se sont multipliées – en Toscane tout particulièrement –, des « écoles d'abaque » destinées à la formation de futurs marchands. Ce sont des écoles laïques,

(11) Anne-Claude Gelé Seautereau, « L'appendice au *Triparty* de N. Chuquet et les traditions mathématiques du Sud de la France », dans *Commerce et mathématiques du Moyen Âge à la Renaissance autour de la Méditerranée occidentale*, actes du colloque international de Beaumont de Lomagne, 13-16 Mai 1999, Toulouse, 2001.

(12) Yves Renouard, *Les hommes d'affaires italiens au Moyen Âge*, Paris, 1972 ; 1re éd. 1949.

(13) *Compendi del art del algorisme*, Bibl. nat. France, ms fr. 4140.

privées ou publiques, dirigées par des maîtres d’abaque, et qui accueillent les enfants entre 10 et 12 ans environ, pour leur enseigner les rudiments mathématiques nécessaires à la pratique de leur futur métier. Les maîtres, dont certains avaient une vaste culture, sont le plus souvent les auteurs des arithmétiques pratiques à l’usage des marchands, les fameux traités d’abaque. Il ne faut pas se méprendre sur le mot qui ne renvoie aucunement au calcul avec jetons. Les traités d’abaque ont été initialement fortement inspirés par le *Liber abbaci* de Léonard de Pise (paru en 1202 dans sa première version), pour qui *abacus* ou *abbacus* est quasiment synonyme de calcul dans un sens assez général.

En France, la présence d’écoles spécialisées est beaucoup plus hypothétique et on a dit le manque d’informations sur l’enseignement scientifique dans les écoles élémentaires. En scrutant les traités, nos seules sources précises, des hypothèses se mettent en place, sur les auteurs, sur le cadre institutionnel, sur la diffusion des manuels. C’est actuellement une recherche en cours, encore très incomplète, même si certaines conclusions s’avèrent solides. Je n’y entrerai pas, me limitant à la relation du contenu mathématique. Remarquons toutefois que ces hypothèses sont de première importance pour l’histoire sociale ; il semble bien en effet que se constitue en France, à cette époque, un enseignement collectif spécifique, tourné vers la pratique, qui rompt avec celui de l’université dans ses objectifs et dans sa langue d’expression.

Les contenus mathématiques et la constitution d’un type d’arithmétique propre au sud de la France

Les manuels d’arithmétique marchande en français ou en occitan ne forment pas un bloc homogène. Les manuscrits écrits dans le nord(14) ont conservé, beaucoup plus prégnante, l’influence de Jean de Sacrobosco, qui enseigna sans doute à l’Université de Paris au XIIIe siècle. Ils sont souvent accompagnés d’un traité sur l’astrolabe dû à Jean Fusoris. Ce n’est pas le cas pour les traités originaires du sud. Ceux-ci forment un groupe assez homogène dans la mesure où ils sont bâtis sur un modèle commun calqué sur le premier texte du genre actuellement connu, le *Compendi del art del algorisme* de Pamiers. Cette homogénéité de construction, que l’on ne trouve pas dans les livres d’abaque italiens, que l’on ne retrouve pas non plus si nettement dans les traités en français issus du nord du pays, fait des arithmétiques marchandes du Sud une famille distincte et bien typée.

Le contenu des arithmétiques commerciales qui proposent un enseignement complet de l’algorisme peut être reconstitué à partir du plan suivi dans le manuscrit de Pamiers. Pour mener à bien ses affaires, le marchand doit d’abord savoir compter, calculer et manier la règle de trois, qui est sa « règle d’or ». C’est pourquoi les premiers chapitres répondent à ces priorités. Ce sont, dans l’ordre :

1. Numération et opérations sur les entiers

Il s’agit de l’exposé de la numération décimale de position, avec utilisation des chiffres indo-arabes, et de la pratique des opérations écrites sur papier(15).

(14) Le représentant le plus complet est l’arithmétique anonyme contenue dans le manuscrit français 1339 de la Bibliothèque nationale de France.

(15) Dans les algorismes issus du « calcul indien » d’al-Khwarizmi, les opérations se font avec

2. Opérations sur les fractions

Après la réduction des fractions au même dénominateur, les opérations sont présentées dans le même ordre que pour les entiers ; elles sont suivies de méthodes de simplification, puis de calculs approchés de racines carrées ou cubiques par des rationnels. L'algorithme de recherche d'une racine carrée approchée est, à quelques modifications de détail dans la disposition des calculs, celui que l'on apprenait encore aux collégiens il y a moins d'un demi-siècle. La justesse des opérations est contrôlée à l'aide de la preuve par 9, ou encore par 7.

3. Règle de trois et applications

Étant donné la diversité des monnaies de l'époque, le marchand doit connaître les rudiments du change, il pratique le troc, il doit savoir calculer des intérêts, régler la gestion des affaires dans une société et bien d'autres questions encore. Or la règle de trois est « la plus profitable et la plus convenable à tous les comptes »(16). Elle est ainsi nommée car trois nombres sont en jeu, deux « semblants » et un « contraire ». Jehan Certain, dans le *Kadran aux marchans*, l'énonce ainsi (fol. 32)(17) :

> « Et l'on doit multiplier la chose que l'on veut savoir par son contraire et puis diviser par ce qui lui est semblable. […] Comme si l'on dit, si 3 florins d'Avignon valent 2 francs, combien vaudront 20 florins d'Avignon ? 20 ff d'Avignon est la chose que vous voulez savoir, que vous devez multiplier par 2 francs qui est son contraire, le produit fait 40 que vous devez diviser par 3 ff qui est semblable à 20 ff, il en vient 13 et 1/3 et les 20 ff d'Avignon valent 13 francs et 1/3 de franc. »

Une fois expliquées les techniques nécessaires à l'exercice du métier, viennent trois chapitres supplémentaires, portant chacun le nom d'une règle : règle d'une fausse position, de deux fausses positions(18), règle d'apposition et rémotion. La règle de simple fausse position, sous sa forme élémentaire, est utilisée pour résoudre un problème du type $ax = b$, lorsque b est donné dans l'énoncé. On suppose que le résultat est x_1 ; cela conduit à b_1. La valeur cherchée est alors obtenue en appliquant la règle de trois. Un exemple classique est celui de l'homme qui demande que l'on trouve son âge sachant que « si j'avais encore autant d'années que j'ai et la 1/2, le 1/3 et le 1/4, je n'aurais que 50 ans »(19). La position est 12, divisible par 2, 3 et 4, qui donne 37 : « Si 37 me sont venus de 12, de combien me viendront 50 ? ».

La règle de double fausse position permet de résoudre des équations ou des systèmes linéaires (par exemple si a et b ne sont pas donnés pour l'équation). Pour trouver une inconnue x, on lui octroie successivement deux valeurs x_1 et x_2 (deux fausses positions), qui conduisent en général à des résultats autres que ceux qui ont été posés par hypothèse. On obtient ainsi des erreurs e_1 et e_2. La valeur cherchée est

---

les mêmes chiffres, mais sur des tables recouvertes de sable ou de poussière, avec effacement des calculs intermédiaires (voir Guy Beaujouan, « L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'Université à Paris aux XIIIe et XIVe siècles », 1954, réimp. dans Guy Beaujouan, *Par raison de nombres,* [1], texte nº 11).

(16) *Arismeticque*, Bibl. nat. France, ms 1339, vers 1460, fol. 49v.

(17) Tous les textes du XVe siècle sont traduits en français contemporain pour plus de clarté.

(18) Pour plus de précision sur les règles de fausse position, voir M. Spiesser, *Équations du premier degré, les méthodes de fausse position*, IREM de Toulouse, 1982.

(19) *Arithmeticque*, Nantes, médiathèque, ms 456, 1488, fol. 65v.

alors $x = \dfrac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_2 - e_1}$. Voici deux exemples simples et typiques de problèmes classés sous cette règle, tirés du manuscrit de Nantes (fol. 75 et 76) :

> « Un revendeur a acheté tant d'œufs et a mis tant d'argent que s'il les revend 5 pour un blanc, il y perd 6 d. et s'il les vend 4 pour un blanc, il y gagne 12. On veut savoir combien d'œufs il a acheté et combien il a mis d'argent »[20].

> « Je pose que le premier jour où j'entre à Paris, on me double tout l'argent que j'ai en bourse et ce même jour, je dépense un gros. De même, le second jour, on me triple tout l'argent qui m'est resté en bourse et ce second jour, je dépense 2 gros. De même, le troisième jour, on me quadruple tout mon argent et ce même jour, je dépense 3 gros. Et après je regarde dans ma bourse et trouve que je n'ai plus que 3 gros. On veut savoir combien j'avais d'argent »[21].

Le second exemple est parfois résolu sans faire de fausse position, « à rebours », en partant de l'état final et en remontant les diverses étapes.

Quant à la règle d'apposition et rémotion[22], les auteurs en soulignent en général le peu d'intérêt, et ne la mentionnent que par tradition. Mais quelle tradition ? On n'en connaît pas l'origine, qui n'est pas italienne car elle est inconnue des maîtres d'abaque. En France, elle joue éventuellement le rôle de « fourre-tout ». C'est davantage une suite de tâtonnements qu'une règle, pour résoudre des problèmes linéaires indéterminés : « Quant on a moins que l'on ne veut, on doit enlever de ce qui fait diminuer et ajouter de ce qui fait augmenter, enlevant et ajoutant jusqu'à ce que l'on parvienne à son but »[23]. L'exemple type est celui-ci, cité par Chuquet dans le *Triparty en la science des nombres*[24] (éd. A. Marre, p. 652) :

> « Je veux faire trois parties de 12 de sorte que si l'une est multipliée par 2, la seconde par 1 et la troisième par 1/2, les trois multiplications fassent 12. Après avoir cherché en ôtant et en ajoutant [des nombres aux parties] là où c'est judicieux, j'ai trouvé 2 pour la première partie, 6 pour la seconde et 4 pour la troisième[25]. »

Sous les trois règles précédentes ne dominent plus les problèmes à vocation pratique. Le prétexte est souvent une situation commerciale, mais en général celle-ci n'est qu'un habillage. La plupart des énoncés sont d'origine très ancienne ; peu d'exercices sont originaux.

---

(20) Si x est le nombre d'œufs et y l'argent dépensé en deniers, sachant que 1 blanc vaut 5 deniers : $x = y - 6$ et $5x/4 = y + 12$. La première position choisie est 20 pour le nombre d'œufs, qui donne $y = 26$ pour la première condition puis 13 pour la seconde, d'où une erreur de 13 « en moins ». La seconde position, 40, donne une erreur « en moins » égale à 8.

(21) Soit x la somme initiale : $4[3(2x - 1) - 2] - 3 = 3$. C'est une simple équation du premier degré à résoudre, mais aucun des coefficients a et b n'est donné dans l'énoncé. D'où l'emploi de la double fausse position.

(22) *Appositio* et *remotio* : action d'ajouter et d'enlever.

(23) Barthélemy de Romans, *Compendy de la praticque des nombres*, Cesena, ms S-XXVI-6, 1471, fol. 268v.

(24) Bibl. nat. France, ms fr. 1346, 1484.

(25) On cherche trois nombres x, y, z tels que $x + y + z = 12$ et $2x + y + 1/2\, z = 12$.

Ce descriptif fournit une trame générale. Bien sûr, le contenu et le niveau des connaissances dispensées varie de manière significative d'un traité à l'autre. La position sociale et la culture des auteurs, le lectorat visé y sont pour beaucoup. Un auteur comme Jehan Certain privilégie explicitement la pratique quotidienne dans son *Kadran aux marchans*(26), composé en 1485. Tout comme le cadran nous guide en permettant de suivre le temps, écrit-il, le *Kadran aux marchans* doit guider le marchand afin qu'il sache bien compter pour « justement prendre et donner en vendant et achetant à chacun son loyal droit ». Jehan Certain ne s'embarrasse donc pas de notions inutiles à la pratique commerciale, comme celles de racines carrées et cubiques. Au contraire, Barthélemy de Romans, dans le *Compendy de la praticque des nombres* (1471), souhaite plutôt « illuminer l'entendement de l'homme » par des réflexions d'ordre mathématique beaucoup plus poussées. Cela modifie le degré de complexité des problèmes proposés.

Les problèmes

Le plan précédent montre qu'il faut distinguer deux catégories de problèmes : ceux qui sont en rapport direct avec le commerce, des problèmes que le marchand peut rencontrer au quotidien, et ceux, qui couvrent un domaine plus large, plus ou moins connectés au milieu du négoce. Ces deux catégories ne sont pas toujours bien séparées. Par exemple, dans le manuscrit 1339 de la Bibliothèque nationale de France se côtoient un problème de limaçon qui doit parcourir une distance donnée, avance le jour et recule la nuit, et une demande de conversion de monnaies.

Des situations directement tirées de l'organisation du commerce

Deux modèles méritent que l'on s'y arrête : le partage des biens dans une association et la gestion des contrats commerciaux. Ils sont la source de nombreux exercices, qui en donnent un reflet simplifié.

Les sociétés commerciales sont nées en Italie dès le XIIe-XIIIe siècle, dans les grands centres de la péninsule. Elles s'étendront plus tardivement aux autres pays. Les compagnies sont l'un de ces types d'associations qui regroupent des hommes pour un temps, en vue d'une opération commerciale donnée. Le partage des gains ou des pertes se fait proportionnellement à la fraction de capital apportée par chacun (et éventuellement du temps de mise à disposition du capital). La résolution de ces problèmes a donné naissance à la règle du même nom, issue de la règle de trois. Voici un exemple élémentaire type : « Ils sont trois qui font compagnie ensemble. Le premier met 30, le second 24 et le troisième 36. Je demande quelle partie du gain prendra chacun »(27). La réponse vient en application de la règle que Barthélemy de Romans, auteur de ce problème – et d'autres avec lui – énonce succinctement ainsi : « Par chacune multiplie et par toutes ensemble divise ». Il faut entendre que les sociétaires calculent leur dû en multipliant le gain par leur mise personnelle puis en divisant par la somme totale engagée. Dans cet exemple, l'apport total étant 90, le premier partenaire qui a mis 30 recevra le tiers du gain. Les problèmes se

(26) Paris, Bibl. Arsenal, ms 2904.
(27) Barthélemy de Romans, *Compendy de la praticque des nombres*, fol. 169v-170.

compliquent toutefois lorsque le temps s'en mêle. Il faut alors, selon la formule consacrée, « multiplier l'argent par son temps ». Par exemple :

> « Trois marchands font compagnie ensemble dont le premier met 47 écus et les laisse 8 mois, le second 90 écus pour 6 mois et le troisième 100 écus pour 11 mois, et à la fin du temps ils ont gagné 107 écus. On veut savoir comment ils doivent partager leur gain et combien chacun doit avoir. Multipliez l'argent par son temps et vous aurez 376 pour le premier, 540 pour le second et 1100 pour le troisième ; vous ajouterez ces 3 nombres ensemble et vous aurez 2016 qui sera le diviseur. Puis vous direz par la règle de 3, si 2016 ont gagné 107, combien gagneront au dit prix 376, 540, 1100 ? Multipliez le nombre moyen par chacun des derniers en particulier et divisez par le premier.(28) »

À partir d'une problématique concrète sont inventés des exercices qui adviennent rarement au quotidien, voire même fictifs, et qui ne sont qu'un entraînement à l'utilisation des règles. En voici un exemple :

> « Deux [hommes] ont fait compagnie ensemble et ont gagné 100. Et le premier a mis 30 livres de plus que l'autre et au premier il vient 56 livres de gain, et au second 44. Je demande ce que chacun a mis. Réponse : s'il n'y avait pas eu les 30, ils auraient été à égalité ; pour cela, soustrais 44 de 56, il reste 12 qui est le gain correspondant à 30. Par conséquent tu peux dire : si 12 viennent de 30, de combien viendront 56 ? Et tu sauras ce qu'a mis le premier. Et puis [tu peux] dire pour le second : si 12 viennent de 30, de combien viendront 44 ?(29) »

La question finale est l'injonction usuelle pour appliquer la règle de trois. On peut traduire le problème par le système suivant, en désignant par x la mise du premier et par y celle du second :

$$x - y = 30 \text{ et } \frac{x}{56} = \frac{y}{44}.$$

Connaissant $x - y$, on en déduit :

$$\frac{x}{56} = \frac{y}{44} = \frac{x-y}{56-44} = \frac{30}{12}.$$

C'est pour cette raison que « 30 viennent de 12 ». La résolution est fondée sur la recherche d'une quatrième proportionnelle et sur les propriétés des proportions, ici les propositions 12 et 17 du livre V des *Éléments* d'Euclide :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}.$$

La légitimation euclidienne n'est jamais évoquée par Barthélemy, ni par ses condisciples en général. C'est toujours le langage des « compagnies », donc de la règle de trois, qui est mis en avant, car plus accessible au public des marchands.

Les contrats sont matérialisés par des accords établis entre associés dans une compagnie, ou entre un patron et le « facteur » qui fait fructifier le bien du premier, qu'il soit chargé de gérer son argent ou de prendre soin de ses brebis. Le facteur apporte ou non un capital ; il met surtout son travail, « sa personne », à disposition. Les bénéfices sont alors répartis suivant un contrat préétabli. Ici encore, le modèle élémentaire fait appel à des raisonnements très simples fondés sur la règle de trois.

(28) *Arithméticque*, Nantes, médiathèque, ms 456, fol. 130.
(29) Barthélemy de Romans, *Compendy de la praticque des nombres*, fol. 170.

En revanche, les situations où il y a rupture de contrat, lorsque le bail dure moins que le temps prévu par exemple, complexifient notablement ces problèmes et le rédacteur est parfois amené à laisser au lecteur le soin de choisir la solution qu'il juge la plus équitable(30).

Problèmes « plaisants et délectables »

En reprenant le titre que Bachet de Méziriac choisit pour son célèbre recueil(31), pour lequel il emprunta (entre autres) au fonds des arithmétiques commerciales, je ne fais que détourner la difficulté de nommer un ensemble de problèmes qui ne sont pas directement liés à la pratique du négoce et qui peuplent pourtant les manuels pour marchands. Leur longue histoire fait qu'ils ont pénétré la plupart des civilisations, de l'Extrême-Orient à l'Europe(32). Certains font partie du corpus réuni par le grammairien Métrodore (V^e^-VI^e^ siècle) dans l'*Anthologie grecque*, ou encore des « propositions pour aiguiser l'intelligence des jeunes », que l'on attribue au moine de York, Alcuin (735-804), responsable de l'éducation sous Charlemagne.

Compte tenu du contexte général, où la règle de trois règne en maître, la plupart des problèmes sont de type linéaire. L'algèbre arabe, dans la lignée d'al-Khwarizmi et Abu-Kamil, a pénétré les traités d'abaque italiens, qui consacrent souvent un chapitre à la résolution d'équations de degré deux ou plus. En revanche, et cela demeure une énigme, elle est quasiment absente des ouvrages français. Il faut excepter le *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet qui s'appuie sur la tradition des algorismes du midi, mais dont les intentions sont beaucoup plus vastes. On trouve cependant quelques rares exemples non linéaires, comme on le verra ; et les arithmétiques commerciales ont aussi contribué à la transmission des énigmes où seul l'esprit logique est monopolisé.

À la lecture des textes, on a souvent l'impression d'un entassement éclectique d'exemples. Les problèmes utiles au marchand côtoient les autres dans les mêmes chapitres, les énoncés « bruts » se mêlent aux questions pseudo-concrètes. Ce qui tient lieu de critère de regroupement, c'est la méthode, la règle. Il y a manifestement un style propre à ces ouvrages, des formes quasi standard d'énonciation des problèmes et des solutions. Quelle place reste-t-il alors à la réflexion mathématique ?

La formulation des énoncés

La présentation des exercices de manière imagée et souvent attrayante doit beaucoup à l'usage, même si ce n'est pas le seul critère. Les exemples dépouillés de tout ornement concret ne sont cependant pas rares. Ils marquent en général la volonté de l'auteur de faire bref, d'« abreger les parolles », comme le dit Barthélemy de Romans, pour mieux mettre en évidence la méthode. On trouve ainsi ces deux exercices presque côte à côte dans le chapitre sur la règle de fausse position du *Traicté de la praticque d'algorisme* (fol. 80r-v) :

(30) P. Benoit, " Calcul, algèbre et marchandise ", [4], p. 209.
(31) Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, Lyon, 1612, rééd. Blanchard, 1959.
(32) M. Spiesser, " À propos de quelques problèmes d'arithmétique dans la culture marchande de la France méridionale du XV^e^ siècle ; un héritage lointain ", [8].

« Trouve un nombre tel que quand tu lui auras enlevé le tiers et le quart le reste soit 3. Réponse : pose 12, enlèves-en le 1/3 et le 1/4 et il restera 5. Maintenant, dis : si 5 me viennent de 12, de combien me viendront 3 ? Multiplie 3 [qui correspond à ce] que tu veux savoir par 12 et cela fait 36. Divise par 5 et tu trouveras 7 1/5 qui est le nombre que l'on demande. »

« Une lance a la 1/2 et le 1/3 dans l'eau et 9 palmes dehors. On demande combien cette lance a de long. »

Suit exactement le même raisonnement pour cet exemple qui est visiblement, dans ce traité bien ordonné, une application concrète du premier genre.

L'ambiance du marché est toujours très présente. Le problème célèbre des congruences simultanées(33), probablement né (en Chine ?) de la science calendaire, n'y échappe pas. Il n'est pas question de faire une relation détaillée d'une histoire aussi complexe ; je cite cet exemple uniquement pour montrer comment l'imagination médiévale a construit un véritable scénario à partir d'un énoncé aride sur les nombres. Le problème est présenté dans le Sun Tsu suan-ching, aux alentours du IV^e^ ou du V^e^ siècle, de la manière suivante :

« Soit des objets en nombre inconnu : si on les compte par 3, il en reste 2 ; par 5 il en reste 3 et par 7 il en reste 2. Combien y a-t-il d'objets ?(34) ».

Suit un algorithme de résolution qui décrit la solution moderne à cet exemple particulier. En 1247, la règle Ta-yen de Ch'in Chiu-Shao fournit une procédure générale. Au début du XIII^e^ siècle, Fibonacci reprend l'exemple précité dans le *Liber abbaci*. Il résout aussi un autre cas avec des modules qui ne sont pas premiers entre eux deux à deux : on demande de trouver un nombre sachant que lorsqu'on le divise par 2, 3, 4, 5 ou 6, il reste 1 et quand on le divise par 7 il ne reste rien(35). La tradition des arithmétiques marchandes a repris ce problème en l'agrémentant d'un environnement concret, sans le transformer en une situation réaliste comme on pourra en juger. Voici l'histoire, racontée par Chuquet dans le *Triparty en la science des nombres* (éd. A. Marre, p. 452) :

" Une femme portait des œufs à vendre au marché. En y allant survint un homme qui lui fit tomber ses œufs et il fut contraint de les payer. Mais cette femme ne savait pas le compte de ses œufs sauf que quand elle les comptait 2 par 2, 3 par 3, 4 par 4, 5 par 5 et 6 par 6 il lui en restait toujours un. Et quand elle les comptait par " septaines ", c'est-à-dire 7 par 7, il ne lui restait rien. On veut savoir combien d'œufs pouvait avoir cette femme. Pour faire de tels problèmes, il convient de trouver un nombre impair qu'on ne puisse pas diviser exactement par 2, 3, 4, 5, 6, mais [qui soit divisible] par 7. Et un tel nombre peut se chercher ainsi, en prenant premièrement 21 qui est divisible par 7 et aussi par 3 et pour cela on peut [prendre]

(33) Les n entiers r_i et m_i étant donnés, il s'agit de résoudre le système : x_i congru à r_i (mod. m_i). Sur l'histoire de ce problème en Chine, on peut consulter J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris, 1988, p. 296-305.

(34) Traduction de J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, p. 296.

(35) Léonard de Pise, *Liber abbaci*. Éd. B. Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, vol. 1 : Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73*, Rome, 1857, p. 281.

35. Mais il a aussi 5 [pour diviseur] et pour trouver on doit en chercher un au-delà, et prendre 49. Mais quand il est divisé par 5 il reste 4. Et pour cela, on peut regarder 63 ou 77 et de même avec les autres nombres qui sont divisibles par 7. Et de cette manière on pourra trouver 301. Et cette femme pouvait avoir ce nombre d'œufs.
Toutefois celui qui veut chercher de tels problèmes à l'aide d'une règle peut multiplier 2 par 3 et ce qui en vient par 4 et encore par 5 et puis par 6 et à cette dernière multiplication ajouter 1 et ainsi l'on trouvera 721. De plus, si l'on multiplie 721 par lui-même, la multiplication fait 519841 qui est […] une autre réponse exacte. Et ainsi il apparaît que de telles questions peuvent avoir plusieurs réponses diverses. Et encore, celui qui multiplierait 301 par lui-même aurait 90601 qui vérifie la propriété ci-dessus. »

Si Chuquet ne recherche pas de solution générale, il explique cependant son raisonnement et note la multiplicité des réponses.

Un autre exercice, beaucoup moins couru, relève du même état d'esprit. Il s'agit d'un problème d'analyse indéterminée. On demande de trouver trois nombres dont la somme des carrés (ou des cubes) est donnée. Problème isolé, proposé dans le manuscrit de Pamiers puis repris, sans doute à partir de ce texte, dans le *Traicté de la praticque d'algorisme*[36], sous le titre « Autre règle et pratique spéciale pour trouver des nombres » (fol. 149r-v) :

« Trouvez trois nombres carrés qui ajoutés ensemble font 13. Réponse et règle pour de tels problèmes. Multiple 13 qui est le nombre demandé par 4 qui est un nombre carré contenu en 13. Et il vient 52 en lequel il y a quatre nombres carrés dont le premier est 49 et puis trois unités. Et l'on ne veut que trois carrés. Par conséquent, il convient de multiplier 13 par 9, cela fait 117 qui contient trois nombres carrés dont l'un est 100, l'autre 16 et l'autre 1, c'est-à-dire pour le premier $\frac{100}{9}$ qui valent 11 et $\frac{1}{9}$, pour le second $\frac{16}{9}$ qui valent 1 et $\frac{7}{9}$ et pour le troisième $\frac{1}{9}$. Et qui ajoute ces trois nombres trouve 13. »

L'auteur du *Compendy de la praticque des nombres*, dont le traité est lié à l'œuvre précédente, énonce pour sa part une règle générale (fol. 163v-164) :

« Règle spéciale pour trouver des nombres carrés et cubes et les racines
Le nombre certain que l'on veut que ces nombres carrés ou cubes fassent une fois ajoutés, on doit le multiplier par un seul nombre carré ou cube jusqu'à ce que dans le produit se trouve le nombre des carrés ou cubes. Et [quand] on les a trouvés, le nombre qui a été multiplié est dénominateur de chacun de ces nombres carrés ou cubes. Et la racine doit être extraite comme il a eté dit dans la règle qui enseigne d'extraire les racines parfaites des nombres rompus. »

Puis il déguise ainsi l'exemple des carrés :

« Un homme a acheté au marché 3 fromages qui coûtent 13 deniers, et la livre coûte autant de deniers que le fromage pèse de livres. Par exemple, si le fromage pèse 2 livres, la livre coûte 2 deniers ; et s'il pèse 3 livres, la livre coûte 3 deniers. Je demande combien pèse chacun de ces trois fromages et combien on a mis d'argent pour chacun. »

Il est étrange de trouver un tel problème dans des traités marchands, sans environnement contextuel sinon qu'il est inclus dans un paragraphe sur la recherche

(36) Cesena, ms S-XXVI-6, 1471, fol. 7-140v.

de racines carrées et cubiques, et le lien est bien lâche. On peut y voir l'intérêt des auteurs pour les mathématiques. L'insertion du problème dans un contexte commercial ne leurre personne et on ne voit pas d'autre raison à cet habillage qu'une habitude du milieu. Il n'est pas innocent que cet exemple soit choisi par des hommes qui montrent des préoccupations d'ordre « théorique » supérieures à la moyenne. On y reviendra à propos de Barthélemy de Romans.

Le style mathématique

L'exposé des méthodes est surtout algorithmique : il s'agit d'entraîner à des pratiques, d'où la priorité donnée à la règle et à sa bonne compréhension, par exemplification. À la lecture d'un énoncé, l'apprenti marchand doit savoir à quelle catégorie il appartient, afin d'appliquer la méthode adéquate. Et pour mémoriser facilement, il est important que la formulation soit percutante, donc brève. Par exemple, pour la règle de double fausse position, on peut lire dans le *Traicté de la praticque d'algorisme* : « Plus et plus, moins et moins soustrayons et plus et moins ajoutons ». La règle est essentielle car, comme l'écrit si bien Francès Pellos(37) : « sensa regula es una granda fatigacion et rumpement de l'entendement de l'home ». Il n'est pas question de dérouler un raisonnement de type euclidien, ce n'est pas le but de la formation.

Voici un exemple qui montre bien comment les objectifs différents modifient le style mathématique. Jordanus de Nemore est l'un des plus grands mathématiciens du XIIIe siècle ; il est contemporain de Léonard de Pise. En composant le *De numeris datis*, Jordanus veut écrire, pour le domaine du nombre, l'équivalent des « données » d'Euclide pour la géométrie plane (les « données » sont un recueil de propositions dont la forme est telle qu'elles peuvent être utilisées pour des raisonnements de type analytique(38)). Du coup, son style est euclidien. Le même problème, résolu par Barthélemy de Romans et par Jordanus, montre le fossé qui les sépare dans l'approche de la matière. On demande de diviser 10 en deux parties de sorte que l'une soit quadruple de l'autre, ce que nous traduisons algébriquement par le système :

$$x + y = s \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = q,$$

soit :

$$s = (q+1)x, \quad x = \frac{s}{q+1} \quad \text{et} \quad y = s - x.$$

Voici la solution de Barthélemy dans le *Compendy* (fol. 216v) :

> « Ajoute 1 au nombre que tu veux pour quotient et par la somme obtenue divise le nombre que tu veux partager en deux parties inégales. Ce qui résultera de la division sera la plus petite partie et le complément au nombre que tu veux partager sera la plus grande. »

(37) Francès Pellos, *Compendion de lo abaco*, imp. à Turin, 1492, p. 184.
(38) Voir Euclide, *Les Éléments,* éd. B. Vitrac, vol. 1, introduction générale par M. Caveing, Paris, Presses Universitaires de France, 1990, p. 21.

Jordanus de Nemore pose d'abord le problème sous une forme générale et, dans un discours qui est aussi entièrement rhétorique, montre par une suite de déductions qu'il existe une solution. Il termine par une application numérique(39) :

> « Si on divise un nombre en deux parties dont on connaît le rapport, on peut trouver chacune d'elles. En effet, si le rapport de l'une d'elles au reste est donné, alors le rapport du tout à celui-ci est donné. Comme le tout est donné, cette partie est connue et par conséquent le reste. Par exemple : que l'on divise 10 en deux parties dont l'une est le quadruple de l'autre. 10 en sera le quintuple, et cette partie est 2. »

Notons que le problème précédent est résolu auparavant par de nombreux auteurs dont Diophante, al-Khwarizmi ou Abu-Kamil. Et il est intéressant de remarquer que certains traités d'abaque italiens le reprennent algébriquement, en posant comme unique inconnue l'un des deux nombres cherchés. Par exemple, Piero della Francesca, dans son *Trattato d'abbaco* (fol. 34v), prend comme inconnue (la *cosa*) le plus petit des deux nombres. Dans son exemple, la somme est 10 et le quotient est 20. Il est alors amené à résoudre l'équation :

$$\frac{10-x}{x}=20 \text{ ou encore } 10 = 21x.$$

On voit bien ici comment le traitement d'un problème, dans une même tradition, dépend aussi des outils mathématiques à disposition.

Mathématiques marchandes et mathématiques

L'entraînement est fondamental dans les manuels d'arithmétique commerciale. C'est pourquoi les exercices sont multipliés, les « recettes » et formules inlassablement répétées. L'étude des traités du midi, dont j'ai souligné l'unité d'ensemble, permet aussi d'observer des différences qui ne sont pas anodines. L'ouvrage qui se démarque le plus dans cet ensemble est celui de Barthélemy de Romans, qui met clairement l'accent sur les limites mathématiques d'un enseignement destiné à la seule pratique commerciale. On peut même affirmer que pour l'auteur du *Compendy de la praticque des nombres*, l'environnement commercial est un prétexte à « faire » des mathématiques. Barthélemy puise dans cette tradition, qui devait lui être familière, pour focaliser son attention sur des questions dont le lien avec le milieu marchand n'existe que dans la manière d'habiller les énoncés. L'essentiel de son écrit est consacré à la résolution générale de quelques types de systèmes linéaires.

Voici l'un des quatre types de problèmes discutés. Il s'agit d'un genre très répandu d'échange d'argent dans un groupe de personnes, dont on trouve de nombreux exemples dans les mathématiques arabes. Une compagnie est divisée en *demandants* et *baillants*. Les premiers empruntent collectivement de l'argent aux seconds et possèdent alors un multiple donné de ce qui reste aux autres. La composition des groupes d'emprunteurs et de prêteurs varie de façon « circulaire ». Il s'agit de trouver combien de deniers chacun possède au départ.

(39) Jordanus de Nemore, *De numeris datis*, Livre II, problème 6, éd. B. Hughes, *Jordanus de Nemore De Numeris Datis, a Critical Edition and Translation*, Berkeley/Los Angeles/Londres, Univ. of California Press, 1981. La traduction du latin est la mienne.

« Ils sont trois qui ont des deniers à partager de cette manière : le premier dit aux deux autres que s'ils lui donnent 7 de leurs deniers, avec les siens il aura 5 fois ce qui leur reste. Le second dit aux deux autres que s'ils lui donnent 9 de leurs deniers, avec les siens il aura 6 fois ce qui leur reste. Et le troisième dit aux deux autres que s'ils lui donnent 11 de leurs deniers, avec les siens il aura 7 fois ce qui leur restera. Je demande ... »

Autrement dit, si les trois hommes possèdent respectivement x_1, x_2, x_3 deniers, alors les inconnues vérifient :

$x_1 + 7 = 5\,(x_2 + x_3 - 7)$, $x_2 + 9 = 6\,(x_3 + x_1 - 9)$ et $x_3 + 11 = 7\,(x_1 + x_2 - 11)$.

Voici la réponse (fol. 195r-v) :

« Cette question doit se résoudre par les rapports, à savoir [trouver] quelle partie chacun a de la somme qu'ils ont tous ensemble. Et cela peut se savoir de cette manière : quand le premier dit qu'avec 7 deniers des autres il aura le quintuple de ce qui leur reste, si la somme totale est 6, il en aura les $\frac{5}{6}$ et les autres $\frac{1}{6}$; par conséquent, il en a personnellement les 56, moins 7 qu'on lui donne. Le second dit qu'avec 9 que lui donnent les deux autres, il aura le sextuple. Par conséquent, si la somme totale est 7, il en a les $\frac{6}{7}$ et les autres $\frac{1}{7}$. Par conséquent, le second en a personnellement les 67 moins 9 deniers que lui donnent les deux autres. Et le troisième dit qu'avec 11 deniers que donnent les autres, il aura le septuple de ce qui leur reste. Par conséquent, si la somme totale est 8, il en a les $\frac{7}{8}$ et les autres en ont $\frac{1}{8}$. Par conséquent il a personnellement les $\frac{7}{8}$ de toute la somme, moins 11 qui lui sont donnés. »

Ce raisonnement de nature arithmétique, qui consiste à partager la somme totale des biens en deux parties dont l'une est d'abord 5 fois plus grande que l'autre, puis 6 et 7 fois, correspond algébriquement à la transformation du système initial en celui-ci (S est la somme des trois inconnues) :

$$\begin{cases} x_1 + 7 = \frac{5}{6}\mathrm{S} \\ x_2 + 9 = \frac{6}{7}\mathrm{S} \\ x_3 + 11 = \frac{7}{8}\mathrm{S} \end{cases}$$

« Note ce que veut dire le problème et la pratique. Cela veut dire qu'entre tous trois, ils ont les $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$ de la somme totale moins 27 qui est [la somme des] trois nombres qui sont prêtés. Par conséquent, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$ de la somme totale doivent dépasser la somme, c'est-à-dire le nombre pris entièrement, de 27. »

En ajoutant les trois équations du système précédent, on obtient :

$$S+27=\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}\right)S \text{ ou encore } \left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}\right)S-S=27\,.$$

Parvenu à ce point, le mathématicien retrouve une situation traditionnellement résolue par la règle d'une fausse position :

« Par conséquent, sache, avec la seconde règle d'une position, quel est le nombre tel que si l'on ajoute ces trois nombres, on dépasse le nombre en entier de 27. Tu trouveras que c'est $17\ \frac{65}{263}$. Et tu prends comme position 168, car si l'on ajoute les parties de 168, il reste 263. Par conséquent tu dois dire : si 263 viennent de 168, de combien viendront 27 ? Multiplie et divise, cela fera $17\ \frac{65}{263}$. »

La somme totale étant connue, il suffit de revenir aux résultats précédemment acquis où les inconnues sont exprimées en fonction de la somme totale pour avoir la solution au problème posé :

« Par conséquent, prends pour le premier les $\frac{5}{6}$ de $17\ \frac{65}{263}$, retranche de cette somme les 7 qu'il a en moins, il restera $7\ \frac{98}{263}$. Et c'est ce qu'a le premier. De même, pour le second, prends les $\frac{6}{7}$ de $17\ \frac{65}{263}$, retranche 9 de cette somme, qu'il a en moins, il restera $5\ \frac{206}{263}$. Et c'est ce qu'a le second. De même, pour le troisième, prends les $\frac{7}{8}$ de $17\ \frac{65}{263}$, desquels retranche 11 qu'il a en moins, il restera $4\ \frac{24}{263}$. Et c'est ce qu'a le troisième. »

De tels problèmes, on l'a dit, sont classiques. Dans les arithmétiques franco-occitanes, ils sont résolus par la règle de double fausse position, appliquée plusieurs fois. Souvent il n'y a que deux inconnues car l'utilisation de la double fausse position est pénible au-delà. La méthode qui vient d'être présentée figure dans le *Liber abbaci* de Léonard de Pise et dans certains traités italiens. Ce qui est remarquable ici, ce n'est pas tant le fait que le déroulement de la résolution soit bien expliqué, étape par étape, c'est que le problème s'inscrit dans un contexte plus vaste, celui de la résolution des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_p+a_1=m_1(x_{p-1}+\ldots+x_n-a_1)\\ x_2+x_3+\ldots+x_{p+1}+a_2=m_2(x_{p+2}+\ldots+x_n+x_1-a_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n+x_1+x_2+\ldots+x_{p+1}+a_n=m_n(x_p+\ldots+x_{n-1}-a_n) \end{cases}$$

Une transformation identique à celle de l'exemple précédent ramène ce système à la résolution de :

$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a_i = \frac{m_i}{m_i+1}\mathrm{S}, \quad i=1,2,\dots,n. \tag{1}$$

Évidemment, c'est une manière anachronique de dire les choses. Mais elle respecte l'intention mathématique de Barthélemy. Avant d'exposer les exemples, il décrit en effet le problème dans sa généralité, envisageant trois situations : une seule personne demande de l'argent aux $n - 1$ autres (« un demande à tous »), le cas contraire (« tous demandent à un »), et le cas intermédiaire (« plusieurs demandent à plusieurs ») où p personnes obtiennent de l'argent des $n - p$ autres. Le système (1) est régulier si et seulement si p et n sont premiers entre eux. Barthélemy discute ces problèmes sur trente feuillets, en commençant par six notes qui correspondent à la résolution générale des deux premiers cas. Il va même plus loin. Il propose le problème élargi où, une fois les échanges faits, il reste ou manque de l'argent ; problème qui se traduit par le système :

$$x_i + a_i = m_i\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{k=n} x_k - a_i\right) + b_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Barthélemy de Romans résout magistralement ce cas par des transformations qui ramènent à la situation sans restes. Tout ceci sans aucune notation symbolique, sans le secours de l'exemple, en inventant un vocabulaire indispensable à la compréhension des différentes étapes de la résolution. On est très loin de la tradition algorithmique, même si le style d'exposition ne rompt pas avec cette tradition. La lecture est difficile (comment pourrait-il en être autrement ?), la progression et le contenu des paragraphes ne sont pas annoncés par des titres qui éclaireraient le lecteur. Les cas non réguliers sont moins bien maîtrisés, mais les différentes éventualités ont été comprises. À la fin d'un exemple où « deux demandent à deux » ($n = 4$ et $p = 2$), on lit : « Note que dans les questions semblables à la question résolue, il y en a qui sont impossibles et il y en a peu de possibles ». Auparavant, pour le même exemple, la multiplicité des solutions avait été notée (« ils n'ont point de nombre determiné »).

Le *Compendy de la praticque des nombres* est le seul traité connu, affilié aux arithmétiques commerciales, où s'affiche un tel intérêt mathématique, qui prend le pas sur l'objectif habituel de formation. L'auteur a précisé qu'il voulait affiner l'intelligence de son lecteur. Manifestement son livre ne s'adresse pas au débutant, il n'a aucun intérêt pour celui qui veut se former aux mathématiques du commerce. On voit à travers cet exemple que s'ouvre un champ d'études pour les mathématiques à l'intérieur d'un terrain voué à une pratique et non à la création. Un tel cas est actuellement isolé. On pourrait cependant aller dans le même sens, mais avec des arguments différents, à propos de l'œuvre de Chuquet. N'oublions pas non plus qu'en Italie la plupart des grands algébristes du XVIe siècle ont fréquenté un temps les milieux des écoles d'abaque ; que, dans la première version, non imprimée, de son algèbre, Bombelli prend nombre d'exemples dans la tradition de l'arithmétique marchande.

Conclusion

Il se forge en France, durant le XV^{e} siècle, un nouveau type d'arithmétiques qui se développent en dehors de l'Université. Ce sont des ouvrages pédagogiques, qui reflètent la nécessité d'une formation mathématique pour les futurs marchands.

On ne sait pas bien comment est dispensé cet enseignement. Si le préceptorat est certainement un des moyens de formation, l'étude des traités d'arithmétique fait cependant apparaître des signes de la constitution, sans doute encore embryonnaire, d'un enseignement professionnel collectif.

L'apprenti marchand apprend à calculer et à gérer mathématiquement des situations qu'il rencontrera au quotidien, il se mesure aussi à des exercices plus plaisants, qui complètent sa formation. En incluant de tels problèmes, les traités commerciaux ont contribué à préserver et à diffuser un patrimoine qui s'est enrichi au cours des temps et au contact de différentes civilisations. Les méthodes d'apprentissage sont fondées sur l'application de règles, présentées de manière algorithmique et accompagnées de nombreux exemples d'entraînement.

À l'intérieur de ce cadre bien fixé des espaces de liberté apparaissent toutefois. Les mathématiques marchandes n'ont pas attiré que des praticiens et certains auteurs ont utilisé le contexte comme terrain d'étude et de réflexion mathématique. C'est à travers le *Compendy de la praticque des nombres* de Barthélemy de Romans et le *Triparty* de Chuquet qu'on le ressent le mieux. Mais on ne connaît certainement qu'une faible part de la production.

Sans toutefois demeurer créateur, le courant des arithmétiques commerciales va perdurer puisque, jusque dans la première partie du XX^{e} siècle, la composition des manuels d'arithmétique élémentaire reprend grosso modo celle de ces livres, en gommant toute référence théorique, avec des traces du même vocabulaire (fausse supposition, règle de société, …), en conservant bon nombre de problèmes identiques.

Indications bibliographiques

[1] Beaujouan Guy, *Par raison de nombres : l'art du calcul et les savoirs médiévaux*, Adelshot, Variorum, 1991.

[2] Beaujouan Guy, « The place of Nicolas Chuquet in a typology of fifteenth-century French arithmetics », dans Cynthia Hay (éd.), *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Oxford, Clarendon Press, 1988.

[3] Bec Christian, *Les marchands écrivains. Affaires et humanisme à Florence 1375-1434*, Paris/La Haye, Mouton, 1967.

[4] Benoit Paul, « Calcul, algèbre et marchandise », dans M. Serres (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, Bordas, p. 196-211

[5] Boudet Jean-Patrice, « Le bel automne de la culture médiévale (XIV^{e}-XV^{e} siècle) », dans *Histoire culturelle de la France*, dir. Jean-Pierre Rioux et Jean-François Sirinelli, vol. « Le Moyen Âge » (dir. Michel Scot), Paris, Le Seuil, 1997, p. 225-357.

[6] Smith David E., *History of Mathematics*, New York, Dover, 1951-1953 (2 tomes, 1e éd. 1923-1925).

[7] Spiesser Maryvonne, *Une arithmétique commerciale du XVe siècle en français (1471) ; des clercs écrivent pour les marchands*, Turnhout, Brepols (Coll. de Travaux de l'Académie internationale d'Histoire des sciences, *De natura rerum*), 2003, à paraître.

[8] Spiesser Maryvonne, « À propos de quelques problèmes d'arithmétique dans la culture marchande de la France méridionale du XVe siècle ; un héritage lointain », dans 4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la durée. *Actes du colloque inter-IREM d'Histoire et Épistémologie des mathématiques, Rennes, 6-8 mai 2000*, IREM de Rennes, 2002, p. 223-251.

[9] Van Egmond Warren, « How Algebra came to France », dans Cynthia Hay (éd.), *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Oxford, Clarendon Press, 1988.

[10] Verger Jacques, *Les gens de savoir en Europe à la fin du Moyen Âge*, Paris, PUF, 1997, p. 50.