Professeur dans un lycée de Grenoble et membre de l'ex-GEPS, André Laur nous fait bénéficier de sa réflexion et de son expérience à propos d'une progression conforme au nouveau programme de TS.

Les habits neufs du programme de Terminale S

André Laur

La première partie de l'article qui suit se présente comme un journal de bord : celui du cheminement de ma classe de Terminale S dans la partie analyse du cours de mathématiques, rédigé à partir des notes prises au fur et à mesure de l'année. J'ai développé certains passages plus que d'autres, de façon à éclairer au mieux la démarche que je souhaite développer avec mes élèves et l'esprit dans lequel j'ai abordé le nouveau programme. Les choix faits résultent donc de l'interaction entre un professeur, un programme et ses élèves : le recul est encore insuffisant pour porter une appréciation définitive (si tant est qu'on puisse en formuler une), mais je peux déjà dire le plaisir que j'ai eu et continue d'avoir à enseigner des mathématiques dans le cadre de ce nouveau programme ; mes élèves semblent partager ce sentiment. Ma classe est une terminale S d'un lycée grenoblois d'un quartier plutôt populaire ; elle comporte 34 élèves (8 ont choisi la spécialité math), d'une hétérogénéité impressionnante (un groupe d'excellents élèves, mais aussi quelques « refus de redoubler » en Première S), aux acquis calculatoires parfois très fragiles, … : une classe « normale » donc.

Une deuxième partie présente mes projets ultérieurs pour l'année en cours, la description d'un travail commun maths-physique et quelques éléments de conclusion.

Partie I : Journal de bord

Voici ce que j'ai traité en analyse depuis la rentrée de septembre jusqu'au 20 novembre environ. Je n'ai commencé un chapitre parallèle (les complexes) qu'à partir de la quatrième semaine de cours ; les exercices, problèmes, devoirs surveillés ou à la maison ne sont que rarement évoqués ci-dessous.

Prise de contact à travers deux activités mathématiques

1. **Résolution de l'équation** $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{x}}}}$ **(avec 2002 traits de fraction !).**

   C'est d'abord la stupeur ! Puis on s'interroge sur le nombre de traits : aurait-on eu les mêmes solutions en 2001 ? en 2000 ? Jusqu'à ce que vienne la proposition

d'essayer en l'an 1. Première utilisation, en classe de Terminale, de l'équation du second degré ; certains élèves ont tout oublié : heureusement le bouche à oreille fait circuler le mot discriminant et la technique associée revient avec plus ou moins de justesse.
Puis en l'an 2 : on obtient les mêmes solutions ! On se lance donc dans la *vérification* que les deux solutions de l'an 1 le sont pour l'an 2, l'an 3, etc. De proche en proche, ça marche jusqu'en l'an 2002 (pas de récurrence évoquée pour aller au-delà). *Vérifier* qu'un nombre est solution d'une équation n'est vraiment pas un acquis (et ne le sera pas pour tous après cette séance comme j'ai pu le constater au DS suivant).
Y a-t-il d'autres solutions ? « Avoir deux solutions » suggère « équation du second degré » et donc, vu la forme de l'équation, « membre de droite de l'équation initiale de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ », on essaie de le vérifier de proche en proche… On admet le résultat pour l'instant et on reporte à plus tard sa démonstration rigoureuse (en liaison avec une présentation de la suite de Fibonacci).
Au cours du travail mené ensemble : évocation de la composée de fonctions avec

$f(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

Au bilan : des révisions tous azimuts ; un problème compliqué qu'une simplification des données initiales permet d'aborder ; un raisonnement en plusieurs étapes à agencer clairement ; une possibilité de compréhension globale et d'accès à l'évidence mathématique malgré une formalisation incomplète et aussi l'occasion de s'interroger sur la nécessité de cette formalisation. Ce fut décoiffant, déstabilisant, difficile pour certains… : on est en terminale !

2. Présentation d'un devoir maison sur le thème des alvéoles mélangeant géométrie dans le plan et l'espace, analyse et travail sur des entiers (voir en annexe).

Chapitre I. Fonctions : acte 1 (*allegro*[1])

1. Introduction (à travers quelques exemples) : pourquoi les fonctions et quelles questions ?

– le problème de l'alvéole : une fonction aire, la question d'un minimum, du domaine de définition ;
– une étude « gratuite » de fonction définie arbitrairement : la recherche de régularités, la reconnaissance de formes, la mise en œuvre de techniques, … ;
– un problème de cinématique ;
– un problème partant d'une situation géométrique plane.

2. Retour rapide sur les fonctions de référence de Première.

Et de nouvelles questions (borner, encadrer, …). Par exemple avec les fonctions f et g définies par $f(x) = -2x + 3$ et $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$: montrer que g, $f \circ g$ et $g \circ f$

(1) titre choisi au vu du pourcentage important d'élèves musiciens de ma classe.

sont bornées.

Une nouvelle fonction : **la fonction partie entière**. Avec sa représentation graphique, nouveau regard sur la calculatrice et le choix du mode graphique (en reliant les points ou non) : préparation au concept de continuité et réflexion sur la nature de l'information donnée par la calculatrice.

3. Le concept fondamental de Première : la dérivation.

- Rappels de la définition et de son introduction ; interprétation géométrique et cinématique ; notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
- Rappels sur les dérivées usuelles, les formules de dérivation (y compris la dérivée de g définie par $g(x) = f(ax + b)$).
- Lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction ; donner l'allure de la courbe de f' à partir de celle de f.
- Et la démarche réciproque (de la dérivée à la fonction) : première approche graphique intuitive ; la relation $\Delta f \approx \Delta x \cdot f'(x_0)$ ou $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ et sa mise en œuvre (méthode d'Euler) avec f définie par $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f(0) = 1$ et $h = 0{,}1$. Essai laborieux avec la calculatrice ; faute de tableur, je propose les deux suites définies par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + h$ d'une part, $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 0{,}1\dfrac{1}{1+u_n^2}$ d'autre part ; à la réflexion, mieux vaut ici le calcul individuel *à la main* des premiers termes puis une généralisation collective sur tableur vidéoprojetée(2).
  Dans cette mise en œuvre, la question de l'existence n'est évoquée par aucun élève. Elle apparaît avec la question : est-ce que la fonction ainsi représentée a bien pour dérivée $\dfrac{1}{1+x^2}$? On n'a qu'une fonction affine par morceaux ! On n'a donc qu'une approche d'une fonction dont on ne sait même pas si elle existe : cette existence est admise ; j'insiste sur le fait qu'elle sera justifiée plus tard et cette démarche est bien acceptée par les élèves.
- Le concept de primitive : le travail précédent introduit cette notion ; définition d'une primitive à une constante additive près ; calcul de primitives par lecture du tableau inverse des dérivées ; problème de l'existence : pas de solution pour l'instant.
- Le concept d'équation différentielle : la mise en œuvre faite ci-dessus conduit à chercher une fonction solution ; d'où l'idée d'équation dont les solutions sont des fonctions ; exemples de vérification : sinus et cosinus solutions de $f'' = -f$ (et

(2) Nous venons d'obtenir dans notre lycée une salle équipée d'un ensemble ordinateur-vidéoprojecteur : le tableau idéal pour certaines séances ; c'est ce dont devraient disposer tous les lycées de France ! Je me souviens d'une promesse faite en haut lieu selon laquelle ce vœu allait être incessamment exaucé : mieux vaut ne compter que sur votre action auprès de l'administration locale.

aussi leur produit par une constante, leur somme, …) [notation traditionnelle : $y'' = -y$]; fonction racine carrée solution de $yy' = \frac{1}{2}$ (sur $]0,+\infty[$); fonction inverse solution sur $]0,+\infty[$ de $y' = -y^2$.

4. Une nouvelle fonction : recherche d'une solution de $f' = f$ avec $f(0) = 1$.

Une telle fonction existe-t-elle : on ne sait pas pour l'instant, mais faisons l'hypothèse qu'une telle fonction existe et déduisons-en le maximum de choses.

Belle expérience de mise en œuvre de la « pensée hypothétique » dont parle avec un humour percutant le passage suivant de « La gratuité ne vaut plus rien » de Denis Guedj, p.16-7, Éditions du Seuil, 1997.
(*On trouvera en annexe 2 le passage complet dont est extrait ce paragraphe. Je n'ai pas cité ce texte en classe, mais le ferai peut-être à l'avenir ; des textes de ce même ouvrage passent très bien auprès de mes élèves de l'option math en Première L.*)

> À l'hypothétique et au conditionnel, la liberté de pensée doit beaucoup. Se sentir le droit de faire des hypothèses. Cela n'a l'air de rien mais c'est une satanée liberté dans la tête que d'imaginer faire vivre quelque chose sans avoir d'abord à prouver son existence. C'est ne pas payer pour voir.
> Faire agir une assertion dans ses conséquences, sans être contraint de prouver qu'elle est vraie, permet de se libérer, pour un moment, de ce qui est. Imaginer ce qui n'est pas dans le but de le faire être, ou pas, c'est, si l'on peut dire, prendre en main sa pensée.

En notant φ une telle fonction, on prouve successivement (cf. document d'accompagnement de Terminale, p. 84) – et je commente ici la puissance et l'élégance des raisonnements mathématiques mis en œuvre –

– φ ne s'annule jamais et $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$;
– φ est unique ;
– pour tout réel α, il existe une seule fonction ψ telle que $\psi' = \psi$ et $\psi(0) = \alpha$;
– pour tous réels a et b, $\varphi(a + b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$;
– pour tout réel x, $\varphi(x) > 0$;
– pour tout réel a et tout entier n, $\varphi(n \times a) = (\varphi(a))^n$ [récurrence intuitive ici] et donc $\varphi(n) = (\varphi(1))^n$.

On pose dorénavant $\varphi(1) = \mathrm{e}$ et, pour tout réel x, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ et on réécrit toutes les propriétés précédentes : $\mathrm{e}^x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{e}^0 = 1$. On en déduit le tableau de variations de cette fonction (que l'on notera aussi exp).
Comment évaluer ce nombre e ? Retour sur la méthode d'Euler qui permet d'écrire $\varphi(h) \approx \varphi(0) + h\,\varphi(0)$ et de proche en proche $\varphi((n + 1)h) \approx (1 + h)\,\varphi(nh)$; on reconnaît une suite géométrique et on aboutit à $\varphi(n \times h) \approx (1 + h)^n$ puis, avec

$h = \frac{1}{n}$, à $\mathrm{e} \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mais quel est le sens de ce symbole ≈ ?, de ces presque-égalités, d'autant meilleures que h est petit ? C'est l'occasion d'un retour sur la notion d'approximation d'un nombre et sur l'importance de toujours associer valeur approchée et qualité de l'approximation : ici on ne peut pas encadrer e, mais plusieurs essais, au tableur, de calcul et de représentation graphique en changeant la valeur de h permettent de conjecturer que e = 2,718 à 0,001 près par défaut.
Premiers travaux mathématiques avec cette nouvelle fonction (on admet dorénavant son existence : je m'engage à reposer le problème plus tard) : en particulier comparaison de e^x et x et donc limite en $+\infty$ de e^x (le théorème de comparaison, utilisé ici intuitivement, est ainsi préparé), résolution d'équations du type $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^v$ ou d'inéquations du type $\mathrm{e}^u < \mathrm{e}^v$, etc.

Chapitre II. Fonctions : acte 2 (andante) (chapitre commencé le 15 octobre)

A. Limites

1. Limite en $+\infty$.

Pour la définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, l'intuition graphique en terme de « tuyau » (cf. document d'accompagnement de Première) permet d'accéder facilement à une définition rigoureuse et de la mettre en œuvre sur un ou deux exemples.
Voici les versions successives élaborées avec les élèves (durant une séance en demi-classe) :

– « quel que soit le tuyau centré en l, la courbe de f rentre entièrement dans le tuyau à partir d'un certain seuil » ;
– « quel que soit l'intervalle I centré en l, on peut trouver un seuil A tel que pour tout $x > \mathrm{A}$, $f(x) \in \mathrm{I}$ ».

Un groupe qui avait rencontré en TPE des formules mathématiques écrites en langage symbolique m'a entraîné à aller jusqu'à :

– « quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que pour tout $x > \mathrm{A}$, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ » ;

et même à son écriture symbolique (j'avais déjà introduit le symbole ∀) :

– « $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{A} > 0\ \forall\ x > \mathrm{A}\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ » peaufinée en « $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathrm{A} > 0\ \forall\ x \in \mathrm{D}_f\ (x > \mathrm{A} \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon)$ ».

Extension de cette définition pour une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ (avec des tuyaux « centrés en l'infini » ou demi-plans).
Définition de courbes asymptotes en $+\infty$.
Définitions analogues (non rédigées) en $-\infty$.

Exemples de base : x et $\sqrt{x}$.

2. Calcul de limites en l'infini : théorèmes des gendarmes + extension au « gendarme cosmique » ; opérations sur les limites ; règles de calcul pour les fonctions polynômes (même limite en l'infini que le terme de plus haut degré), les fonctions rationnelles (même limite en l'infini que le quotient des termes de plus haut degré), …

3. Limites en un réel α.
Mise en place graphique des divers cas de figure ; un essai de définition (celle de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$) ; notion d'asymptote verticale. Extension des théorèmes des gendarmes et d'opérations sur les limites. Application au cas de fonctions rationnelles ; notion de limite à droite et à gauche en un point.

Un exemple avec $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

4. Limites et composition de fonctions.

Exemple avec des fonctions irrationnelles.

B. Continuité

1. Définition (intuitive, puis en terme de limite) ; exemple et contre-exemple ; les calculatrices graphiques présupposent la continuité (et donc ne prouvent rien).
2. Toutes les fonctions usuelles (polynômes, rationnelles, racine carrée, sinus et cosinus, exp) et toutes celles construites à partir de celles-là (par somme, produit, quotient, composée) sont **continues** sur tout intervalle de leur domaine de définition. Cas de la fonction $|x|$ (avec $|x| = \sqrt{x^2}$).
3. Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (théorème de la bijection).
4. Approximation d'une solution d'une équation par balayage.
5. Utilisation du tableau de variations.
Pour la fonction f définie ci-dessus, $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$, on aboutit au tableau de variations ci-contre ; dans ce tableau, par convention, la flèche qui « descend » exprime la stricte décroissance et la continuité ; on admettra donc une rédaction du type : « le tableau de variations montre que 2 admet un antécédent et un seul strictement positif ».

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

C. Compléments sur la dérivation
1. Nouveau retour sur la définition et calcul de nouvelles limites.

(telles celle de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ ou de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0).
2. Dérivée d'une fonction composée et applications.
3. Lien avec la continuité.
Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Bien que hors programme, j'explicite sur des exemples ($\sqrt{x}$, $|x|$), ce qui se passe quand une fonction est continue en un point et non dérivable en ce point

– d'un point de vue graphique – tangente verticale ou demi-tangentes –

– et du point de vue des variations, avec l'énoncé suivant qui inclut le cas d'une dérivée s'annulant en un point :

« Si f est continue sur $[a,b]$ (resp. $[a,b[$, resp. $]a,b]$) et dérivable sur $]a,b[$ à dérivée strictement positive, f est strictement croissante sur $[a,b]$ (resp. $[a,b[$, resp. $]a,b]$). »

Partie II

Mes projets pour la suite :

Chapitre III. Fonctions : acte 3 (*adagio*)

1. Exemples de fonctions trigonométriques.
2. Les fonctions racine-nième ($\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$).
3. La fonction logarithme népérien.
4. Autres fonctions exponentielles ou logarithmes.
5. Croissances comparées.

Chapitre IV. Les suites

(Je souhaitais au départ mélanger systématiquement suites et fonctions : j'ai renoncé devant la difficulté et les risques de confusion que cela aurait entraînés pour certains élèves).

Chapitre V. Calcul intégral

(À partir de l'existence de l'aire sous une courbe, très naturelle intuitivement et admise ici au plan théorique, l'existence d'une primitive F *pour la fonction inverse, définie sur* $]0;+\infty[$ *et s'annulant en* 1 *sera alors acquise ;* F *a les mêmes propriétés que* ln ; F *a une réciproque* G *dont on montre qu'elle vérifie* $G' = G$ *et* $G(0) = 1$. *L'existence de* exp *et celle de* ln *en résultent.*

A priori, j'essaierai de faire repérer par les élèves les divers chaînons de ce discours ; j'insisterai sur son importance théorique mais je ne m'attarderai pas sur sa vérification formelle).

En parallèle

Chapitre I′ : Les nombres complexes

Chapitre II′ : Géométrie plane (utilisation des complexes, du produit scalaire, du barycentre,…)

(court chapitre d'exercices et problèmes, prévu en décembre.)

Chapitre III′ : Géométrie dans l'espace

Chapitre IV′ : Probabilités : conditionnement et indépendance

Chapitre V′ : Probabilités : lois discrètes; dénombrements élémentaires

En final :

Chapitre VI. Compléments (*concerto*)

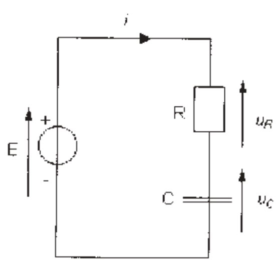
– Exemples de lois continues en probabilités.

– Un exemple d'adéquation à une loi équirépartie.

– Exemples d'équations différentielles.

<u>Une collaboration appréciée avec la physique :</u>

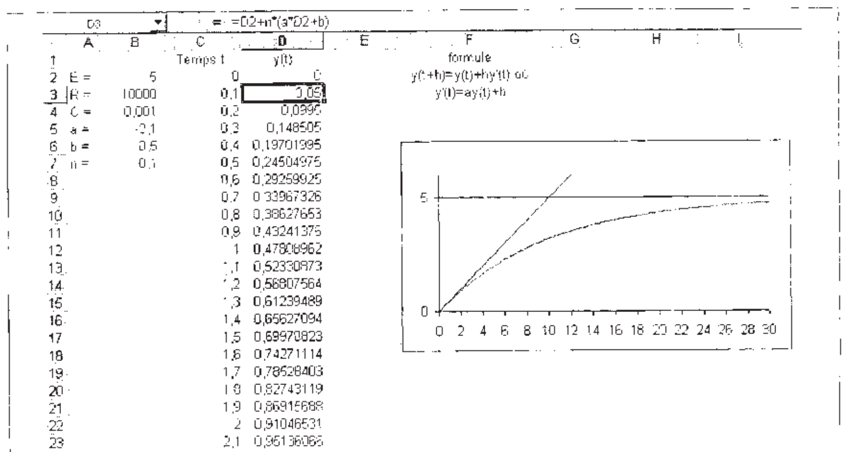
Les programmes de mathématiques et de physique insistent sur la complémentarité que doivent viser les enseignants des deux disciplines. Je pensais n'amener la fonction exponentielle que sur la demande de la physique (cf. document d'accompagnement de Terminale, p. 73 et suivantes : le paragraphe sur la radioactivité est d'ailleurs commun aux documents d'accompagnement des deux disciplines) ; ma collègue de physique m'a dit ne pouvoir réaliser les expériences relatives à la radioactivité avant l'année 2003. J'ai donc introduit des exemples d'équations différentielles et la fonction exponentielle dans le seul cadre mathématique.
Mais nous avons pu nous rattraper le mercredi précédent les vacances de Toussaint à l'occasion d'un TP de physique sur la charge d'un condensateur ; nous sommes intervenus conjointement durant la séance de TP (pour chacun des deux groupes). Les élèves disposaient d'un ordinateur pour deux : nous avions installé sur chacun le logiciel Star-office.
Ma collègue avait déjà réalisé une expérimentation ; les élèves disposaient des relations ci-dessous.

<table>
<tr>
<td>

Circuit RC</td>
<td>Relations :
$u_c + u_R = E$
$u_R = R\,i$
$q = C\,u_c$
$i = \dfrac{dq}{dt}$
avec
u_c : tension aux bornes du condensateur (en volts)
u_R : tension aux bornes du condensateur ohmique (en volts)
E : force électromotrice du générateur (en volts) (E = 5V)
i : intensité du courant (en ampères)
R : résistance du conducteur ohmique (en ohms) (R = 10kξ)
q : charge du condensateur (en coulombs)
C : capacité du condensateur (en farads) ($C = 10^{-3}$F)
Au départ (à l'instant 0), $u_c = 0$.</td>
</tr>
</table>

Ma collègue a amené la relation $u_c + Ri = E$ qu'elle a transformée en $u_c + RC\dfrac{du_c}{dt} = E$ et a demandé aux élèves s'ils connaissaient une fonction mathématique vérifiant une telle relation.
Je suis alors intervenu ; j'ai proposé une version de la relation ci-dessus conforme à « l'orthographe » mathématique que j'avais utilisée jusque là :

$u_c(t) + RCu'_c(t) = E$, que j'ai transformé en $u'(t) = au(t) + b$ avec $a = \dfrac{1}{RC}$ et $b = \dfrac{E}{RC}$. On était confronté à une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $y(0) = 0$; aucun élève n'a pensé à la fonction exponentielle (nous n'avions traité jusque là que l'équation $y' = y$ et avions peu travaillé sur la dérivée de e^{ax+b}) ; par contre la construction d'une solution avec la méthode d'Euler a tout de suite été évoquée. Chacun s'y est alors attelé : après un temps plus ou moins long, on a vu fleurir des courbes sur fonds coloriés !



	A	B	C	D
1			Temps t	y(t)
2	E =	5	0	0
3	R =	10000	0,1	0,05
4	C =	0,001	0,2	0,0995
5	a =	-0,1	0,3	0,148505
6	b =	0,5	0,4	0,19701995
7	n =	0,1	0,5	0,24504975
8			0,6	0,29259925
9			0,7	0,33967326
10			0,8	0,38627653
11			0,9	0,43241375
12			1	0,47808962
13			1,1	0,52330873
14			1,2	0,56807564
15			1,3	0,61239489
16			1,4	0,65627094
17			1,5	0,69970823
18			1,6	0,74271114
19			1,7	0,78528403
20			1,8	0,82743119
21			1,9	0,86915688
22			2	0,91046531
23			2,1	0,95136066

Exemple de feuille de calcul et de graphique obtenus avec le tableur

À noter que le programme de physique prévoit un TP sur la méthode d'Euler : beaucoup de collègues de physique ignorent (ou ont oublié) – tout comme nous – de quoi il s'agit ; ce travail en commun a permis un éclairage mutuel.
La recherche d'une expression mathématique de la fonction représentée a été plus délicate : j'ai dû téléguider complètement la solution de $y' = ay$ et encore plus le passage par $y' = a\left(y + \dfrac{b}{a}\right)$, puis $\left(y + \dfrac{b}{a}\right)' = a\left(y + \dfrac{b}{a}\right)$ pour aboutir à $u_c(t) = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a}$, puis $u_c(t) = \dfrac{b}{a}(e^{at} - 1)$.

Ma collègue a repris la main pour revenir à $u_c(t) = E(1 - e^{-t/RC})$.
Elle avait parlé de temps caractéristique τ du condensateur ; certains élèves se souvenaient que ce temps correspondait au temps nécessaire pour obtenir 63% de la charge maximale. Pourquoi cette valeur 63% ? J'ai tout de suite vu dans ce nombre $1 - e^{-1}$: d'où la valeur $\tau = RC$ dans la formule précédente. La « bonne » définition de cette valeur τ est graphique : elle est donnée par l'intersection de la

tangente à l'origine avec l'asymptote : ce que ma collègue (dans un groupe) ou moi-même (dans l'autre) démontrâmes !

À l'issue de ce travail commun, plusieurs élèves nous ont spontanément dit le plaisir qu'ils ont eu à ce travail à quatre mains. La plupart ont pu voir combien, malgré les différences de notations, le langage naturel de la physique est le langage mathématique. Certains, qui ont du mal à entrer dans le jeu mathématique, ont reçu une réponse à la question qu'ils continuent de se poser : « mais à quoi ça sert ? ».

En guise de conclusion provisoire (l'année est loin d'être terminée !)

- L'introduction précoce de la fonction exponentielle, demandée par le programme, m'a obligé à revoir la progression usuelle de mon cours d'analyse. J'ai utilisé à plein les acquis de Première que j'ai réactivés à travers des situations ou exercices choisis au mieux : mes élèves n'ont jamais eu l'impression de faire des révisions, ni celle d'être « largués » par trop de choses nouvelles. La notion fondamentale de limite n'arrive que dans un deuxième temps : les réflexions de type épistémologique faites durant le premier chapitre exposé ici (en particulier sur l'existence de la fonction exponentielle, sur le fait que l'on peut avancer en admettant certains énoncés, sur le crédit à apporter à la fonction calculée par un tableur ou représentée par une calculatrice graphique) introduisent à la fois à la nécessité logique d'une définition et à la possibilité d'avancer sans tout démontrer (cf. les théorèmes sur les limites) ; la présence de la fonction exponentielle élargit le champ des premiers exemples et justifie l'intérêt de certains théorèmes.
- La problématique des équations différentielles est ici mise à l'honneur : de façon élémentaire (nul besoin d'un cours théorique sur le sujet) et dans le fil des mathématiques contemporaines (où la séparation entre mathématiques pures et appliquées a de moins en moins de pertinence). Là encore, l'introduction précoce de la fonction exponentielle s'est révélée intéressante : elle a donné chair à ce concept qui, vu trop tard dans l'année, n'a pas le temps de prendre la place qui doit être la sienne ; elle a permis un travail en commun math-physique.
- L'ordre exponentielle/logarithme ne pose pour l'instant aucune difficulté : à cette étape de mon cours, il m'oblige simplement à choisir des exercices adaptés (j'évite pour l'instant toute résolution d'équation du type $e^x = m$).
- L'absence de construction commune entre les disciplines enseignées (mathématiques et physique ici, mais de façon plus générale entre toutes les disciplines) me paraît être une faille importante de notre enseignement. La possibilité d'organiser des séances communes devrait être reconnue et même encouragée (et pas en comptant – comme le fait si souvent notre système – sur le seul dévouement des personnels) : nos élèves auraient tout à y gagner. Pour nous enseignants, cela ne va pas sans poser problème ; nous avons majoritairement été formés dans une culture « maths pures » et nous y avons plutôt réussi ; l'évolution ne peut être que progressive.

- Une dernière métaphore peut expliquer la démarche que je souhaite privilégier auprès de mes élèves : les mathématiques constituent plus un continent à explorer qu'un musée à visiter. Au musée, le sens de parcours est relativement standard et l'attitude des visiteurs homogène ; tout semble figé. Un continent, personne n'en connaît la totalité ; ses frontières sont fluctuantes ; les chemins pour le parcourir sont multiples (et celui décrit en partie 1 en est un parmi bien d'autres) ; son exploration exige engagement personnel et consolidation progressive des avancées.

Annexe 1 : Texte du premier devoir à la maison.

J'ai donné ce texte lors de la première séance, où j'avais amené une plaque de cire gaufrée utilisée par les apiculteurs. Durant cette séance j'ai donné quelques pistes pour la partie II. La première séance de TD a été consacrée à la recherche de ce devoir. Des indications ont été données au fur et à mesure des demandes des élèves durant la semaine ; ainsi, pour la question II.2, j'ai donné la relation (*) $\frac{2}{p}+\frac{2}{n}=1$ *; pour la question II.3, j'ai conseillé de comparer les carrés des périmètres pour une aire* A *commune, etc.*
Les élèves ont travaillé par groupes de 2 ou 3 ; certains n'ont visiblement pas compris l'enjeu du problème et ont révélé d'importantes faiblesses logiques (exemple de conclusion inquiétante : « le choix de 3 losanges est pour permettre à l'abeille d'aller plus en profondeur et l'hexagone permet à l'abeille de mieux s'insérer dans l'alvéole ! » – sic –) ; d'autres ont conduit l'étude jusqu'au bout, concluant avec humour : « finalement Maya peut entrer à l'Académie car c'est un excellent géomètre ! ».
Lors de la correction, j'ai amené un cadre plein de miel que nous avons pu partager en fin de séance !
Le texte de ce DM est inspiré d'un énoncé de « Travaux Pratiques en terminales scientifiques » édité en 1987 par l'IREM de Strasbourg.

DM 1 : que nul n'entre dans la ruche s'il n'est géomètre !

Ce titre renvoie à une phrase célèbre : laquelle ? Préciser le contexte.

I. Observer un cadre de ruche.

Le dur dilemme de Maya (ou comment faciliter l'éhontée exploitation de l'apiculteur ?) :

entreposer le maximum de miel avec le minimum de cire.

L'objectif de ce devoir :
– pourquoi Maya choisit-elle un réseau hexagonal ? (→ cf. partie **II**).
– comment adosse-t-elle au mieux les deux « faces » d'un cadre ? (→ cf. partie **III**).

II. Un problème simplifié : dans le plan.

On ne s'intéresse qu'à une « face » du cadre ; on suppose que les alvéoles sont appuyés sur un fond plan, que leurs parois sont perpendiculaires à ce fond et qu'ils sont tous identiques. On observe le réseau plan formé par le bord des alvéoles.

1. Minimiser la quantité de cire revient à minimiser la longueur de ce réseau : expliquer pourquoi (et sous quelles hypothèses).

2. Maya préfère un réseau formé de polygones réguliers tous identiques, et avec des nœuds tous identiques confondus avec les sommets des polygones.
Montrer qu'il n'y a que 3 réseaux possibles
→ *Indication* : appeler n le nombre de côtés du polygone et p le nombre de polygones se touchant en un nœud ; calculer l'angle du polygone en fonction de n ; chercher une relation entre n et p (*) et vérifier qu'il n'y a que 3 possibilités (ne pas oublier que n et p sont entiers, que $n > 2$, …).

3. Pour chacun des 3 types de polygone régulier obtenus, calculer le périmètre d'un polygone en fonction de son aire A.
→ *Indication* : pour chaque polygone, exprimer d'abord aire et périmètre en fonction du rayon du cercle circonscrit.

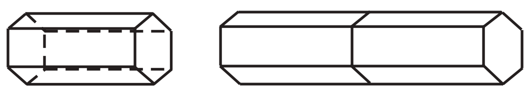
4. En déduire que la meilleure solution pour Maya est un réseau hexagonal.

Les alvéoles, juxtaposés les uns aux autres, tous identiques, forment ainsi une « face » de cadre de ruche.

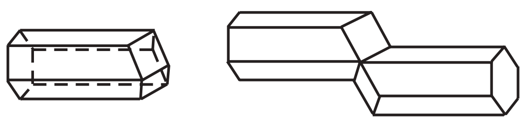
III. Et dans l'espace ?

Dans les ruches, les « faces » sont adossées deux à deux et les fonds des alvéoles s'imbriquent les uns dans les autres !

Pas comme cela :
(à partir de simples alvéoles en forme de prisme)



mais comme ci-contre à partir d'alvéoles ayant le fond concave formé de 3 losanges égaux



On adosse les alvéoles, de sorte que le fond d'un alvéole d'une « face » est en contact avec trois alvéoles de l'autre « face »

Comment expliquer ce choix des abeilles ?

Voici le dessin d'un alvéole (ouverture à gauche, fond à droite). C'est un polyèdre à 10 faces. La face de gauche, ABCDEF, est un hexagone régulier situé dans un plan noté (P) ; toutes les arêtes horizontales de ce polyèdre ainsi que l'axe (OS) sont orthogonaux au plan (P) ; les points A′, C′ et E′ sont dans un plan (P′) parallèle au

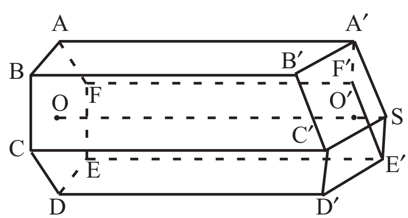
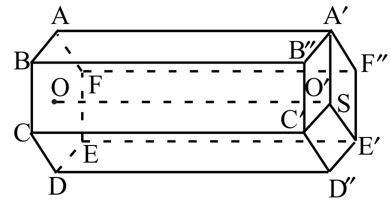


Figure 1

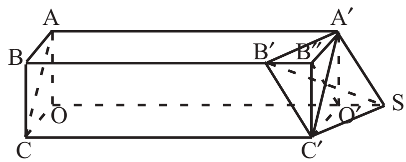
plan (P), qui coupe l'axe (OS) en un point O′. (Le point S est toujours à droite de O′.)

1. Montrer que les trois faces du fond, SA′B′C′, SC′D′E′ et SE′F′A′ sont des losanges isométriques.

2. Montrer que le polyèdre ci-dessus a même volume que le prisme ci-contre obtenu en déplaçant le sommet S jusqu'à O′ : les points A′, C′ , E′ et O′ sont restés dans le plan (P′) ; les points B′, D′ et F′ sont devenus B″, D″ et F″.



Indication : considérer la figure ci-contre (qui représente un tiers de l'alvéole) et justifier d'abord que la question revient à comparer les volumes des tétraèdres SO′A′C′ et B′B″A′C′.



On en déduit que le volume de l'alvéole est constant quand on déplace le point S sur l'axe (OO′).

Mais qu'en est-il de l'aire latérale et donc de la quantité de cire en jeu ?

3. Calcul de l'aire latérale du polyèdre (se reporter à la figure 1 ci-dessus).

On choisit pour unité le côté AB de l'hexagone ABCDEF. On note h la longueur OO′ (cette longueur est fixe) et x la longueur O′S. On veut calculer l'aire latérale du polyèdre (à l'exclusion de la face ABCDEF qui reste fixe) en fonction de x, aire qui sera notée $\mathcal{S}(x)$.
a) Calculer la longueur A′C′.
b) Calculer BB′ et SB′ en fonction de x.
c) Calculer l'aire du trapèze ABB′A′ et du losange SA′B′C′.
En déduire $\mathcal{S}(x)$.

4. Recherche de la valeur x_0 de x qui minimise $\mathcal{S}(x)$.
a) Écrire $\mathcal{S}(x)$ sous la forme $f(x) + 6h$, puis programmer sur la calculatrice la fonction f.
b) Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près de x_0.
c) La valeur exacte de x_0 sera déterminée ultérieurement dans l'année : à votre avis, comment ?

On admet que cette valeur est $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; calculer alors A′S puis montrer, à l'aide de la formule d'Al-Kashi, que le cosinus de l'angle A′SC′ vaut $-\dfrac{1}{3}$. Déterminer alors une valeur approchée (en degrés décimaux puis en degrés, minutes, secondes) de cet angle. C'est cette valeur que l'on retrouve sur les alvéoles !

IV. Conclure.

Annexe 2 : Extrait de « La gratuité ne vaut plus rien » de Denis Guedj, p. 15-17 (Éditions du Seuil, 1997)

Aujourd'hui, plus encore que par le passé, on assiste au déchaînement de la *pensée-gestion*. Suite d'affirmations assurées :
1º II est vrai que ceci est.
2º II est nécessaire d'en tirer les conséquences.
3º II est capital que ces conséquences, tirées du RÉEL, soient considérées comme les seules valides. En dehors d'elles, chimères et délires !
Traire ce qui est pour nourrir « l'état des choses » et le faire perdurer, voilà le traitement que les gestionnaires de l'ÉTANT infligent au monde.
Qui ne reconnaît là la pensée technocratique? Et, de plus en plus fréquemment, celle des politiques qui les singent. Qu'avancent ces « réalistes » ? Les choses sont ce qu'elles sont, on n'y peut rien. Il faut en tenir compte. Et ils en tiennent les comptes mêmes ! Il n'y a même que cela qui compte. Ils gèrent le monde en l'état.
Nous disposons, heureusement, d'un autre type de pensée, la pensée hypothétique ou conditionnelle : « Si …, alors … » C'est le « si » des enfants : si j'étais ceci… Qui interdit qu'il ne soit également celui des parents ? Il fonctionne comme une machine à tisser des liens « en puissance », si ceci est, alors cela sera. Des liens en puissance et pas virtuels. Dès que, par l'esprit la liaison entre ceci et cela est établie, un choix se présente. Ou bien porter son regard vers l'amont, en questionnant le « ceci », ou bien vers l'aval, en questionnant son désir sur le « cela ».
Scénario 1. Si ceci est, alors cela sera. Or ceci n'est pas. Fin de l'Histoire. Tout le pouvoir au réel de l'ici et maintenant. Co(g)itus interruptus ! Payer pour pouvoir jouer. Le plus souvent, c'est payer et ne pas jouer. Parole d'autorité. Commencez par prouver vos prémisses, ensuite on discutera. Alors que, justement, toute la question est de discuter. Et des prémisses et du lien qu'elles entretiennent avec leurs conséquences.
Scénario 2. Si ceci est, alors cela sera. Or je veux que cela soit. Mais ceci n'est pas. Quoi faire alors pour que ceci soit ? Me voici devenu stratège ! Stratège en chambre qui ne demande qu'à un petit courant d'air de lui mettre le nez dehors. Ma pensée, mon désir, le monde, mon action. Il ne faut pas croire ce qu'on nous raconte, souvent le conditionnel mène au futur.
À l'hypothétique et au conditionnel, la liberté de pensée doit beaucoup. Se sentir le droit de faire des hypothèses. Cela n'a l'air de rien mais c'est une satanée liberté dans la tête que d'imaginer faire vivre quelque chose sans avoir d'abord à prouver son existence. C'est ne pas payer pour voir.
Faire agir une assertion dans ses conséquences, sans être contraint de prouver qu'elle est vraie, permet de se libérer, pour un moment, de ce qui est. Imaginer ce qui n'est pas dans le but de le faire être, ou pas, c'est, si l'on peut dire, prendre en main sa pensée.
Il ne s'agit pas de l'omnipuissance du démiurge, à qui il suffirait de penser ce qui n'est pas pour le faire être, mais du pouvoir assumé d'un citoyen penseur-acteur qui n'est pas épinglé au réel comme un papillon l'est par l'aiguille qui l'immobilise, ailes déployées, à un bouchon.
Seule une pensée (un peu) libérée de la dictature de « l'état des choses » peut s'opposer à la pensée-gestion. N'être plus plombé par le Réel, tout en ne le niant pas, permet de l'anticiper et procure quelques moyens de le faire être autrement qu'il s'apprête à être, et qu'il sera si je ne m'en mêle pas. Il s'agit d'une *pensée cré-action*, qui crée les conditions de l'action et, dans certains cas, mène l'action.