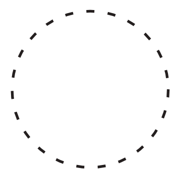
Avec des parallélogrammes et des cercles(*)

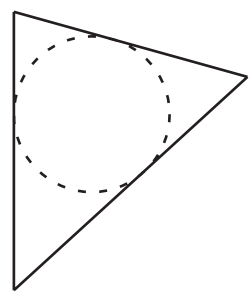
Bernard Chauvet

Le point de départ :

Certains triangles admettent un cercle inscrit.
Comment puis-je m'en assurer ?
Tout simplement en dessinant d'abord le cercle :

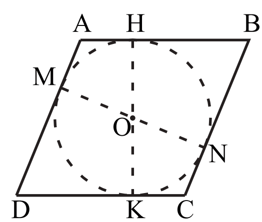


et le triangle ensuite…



Mais ceci est-il vrai pour tout triangle ?

Nous, nous savons que oui, mais nos élèves ? et comment les y conduire ?
À partir du parallélogramme !
Comment ? Certains parallélogrammes ont un cercle inscrit, on peut s'en assurer en traçant d'abord le cercle et le parallélogramme ensuite !
On obtient un parallélogramme curieux : un LOSANGE.



ce qui peut se justifier ainsi :

• Tout d'abord, cercle et losange ont le même centre de symétrie :
M, O, N alignés,
H, O, K alignés,

O, milieu commun à [MN] et [HK], appartient aux droites équidistantes des paires de côtés parallèles du parallélogramme.

à condition que l'on sache que

Deux perpendiculaires à des droites parallèles sont parallèles.
Deux parallèles qui ont un point commun sont confondues.
Les diamètres d'un cercle…
L'ensemble des milieux des segments dont les extrémités appartiennent à des droites parallèles est une droite.

(*) Article paru dans le tome II de la Brochure APMEP n° 38 « Activités mathématiques en 4^{e}-3^{e} » (1981).

Or le centre du parallélogramme, qui est milieu de tels segments, appartient aussi à ces droites.

Le centre du parallélogramme est le milieu commun des diagonales et est centre de symétrie.

C'est donc O .

Deux droites distinctes ont au plus un point commun.

• Dans la symétrie d'axe BD, le cercle est invariant et la droite BA qui a un seul point commun avec le cercle a une image qui est

une droite

L'image d'une droite dans une symétrie orthogonale est une droite.

qui passe par B

L'ensemble des points de l'axe est l'ensemble des points invariants.

et a un seul point commun avec le cercle.

La symétrie orthogonale est une bijection.

C'est donc la droite BC.

De même, DA a pour image DC et, par conséquent,

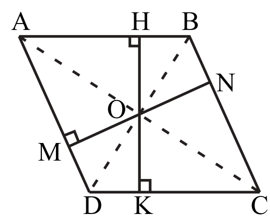
le segment [AB] a pour image le segment [CB].

La symétrie orthogonale conserve les longueurs.

Les côtés de ce parallélogramme sont donc égaux et ABCD est un losange !

Un losange est un parallélogramme qui a des cotés de même longueur.

Au fait, cette propriété, avoir un angle inscrit, est-elle vraie pour tous les losanges ?



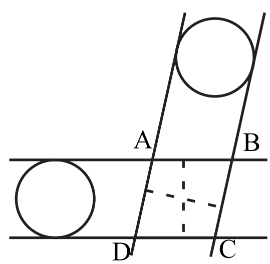
Oui car OH = OK,
OM = ON
et OH = OM.

Deux droites perpendiculaires ont pour images, dans une symétrie orthogonale, deux droites perpendiculaires.

Le cercle de centre O et de rayon OM répond donc à la question.

On aurait pu se poser la question ainsi :

Si cela est vrai pour un parallélogramme donné, c'est que la distance des côtés AB et CD d'une part, BC et AD d'autre part, est la même.
Ce parallélogramme est donc l’intersection de deux bandes de même largeur.

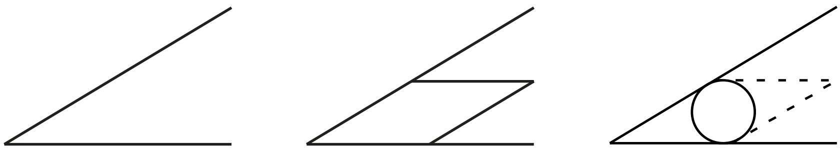


À condition de voir le cercle inscrit comme intersection de l'ensemble des cercles tangents à AB et DC d'une part, et des cercles tangents à AD et BC d'autre par et, comme les uns et les autres ont tous le même diamètre, qui est la largeur de la bande, ces largeurs sont égales.

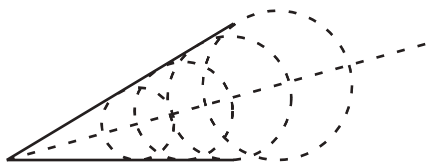
Mais il faudrait savoir que l'intersection de deux bandes de même largeur est un losange.

Mais tout ceci nous donne le moyen de dessiner un *cercle tangent à deux droites données*.

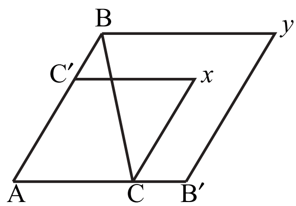
Comment ? Simplement en fabriquant un losange à partir de ces deux droites, et en inscrivant le cercle dans ce losange.

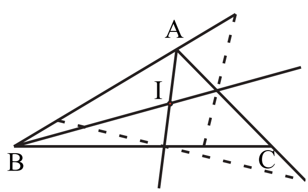


Mais à partir de ces droites, des losanges (et des cercles), il y en a une infinité, et tous leurs centres appartiennent à l'axe de symétrie de ces droites, simplement parce qu'un losange est invariant dans une symétrie orthogonale par rapport à ses diagonales.



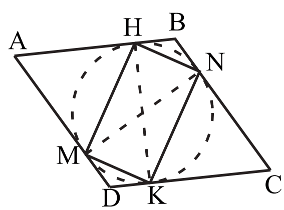
Et si nous revenions au triangle initial…
Il faudrait tracer un cercle qui soit d'abord tangent aux côtés AB et AC et pour cela tracer un losange sur AB et AC. Mais lequel ? Celui de côté AB, ou celui de côté AC ? CAC'x ou BAB'y ?
Mais si on joignait tout simplement BC et B'C' ?
Si on réfléchit un instant, dans une symétrie orthogonale (d'axe celui de AC et AB), une droite et son image se coupent sur l'axe de symétrie alors BC, qui a pour image B'C' … et voici en passant une certaine façon de déterminer l'axe de symétrie de deux droites, qui n'utilise pas le compas.
On sait donc trouver l'axe de symétrie de AB et AC, celui de BA et BC. Ces droites se coupent en I, et I…
Voilà donc notre problème résolu.





Mais revenons à la figure ci-contre.
Quelle est donc la nature de MHNK ?

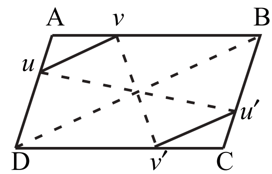
Hum, un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu, cela ne vous dit rien ?



Tiens, tiens, il existe donc des parallélogrammes dans lesquels on peut inscrire un rectangle ; certes, ce sont des losanges (encore !) et même, on peut en inscrire beaucoup dans un losange !

La preuve : observons seulement que les côtés du rectangle sont parallèles aux diagonales et si on trace un segment parallèle à une diagonale et son symétrique par rapport au centre du losange, on obtiendra les quatre sommets d'un rectangle. Comme il y a beaucoup de segments parallèles à une diagonale, il y aura donc beaucoup de rectangles.

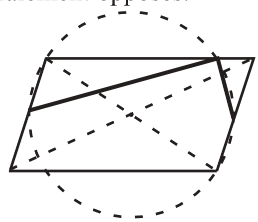
Pour les losanges d'accord, il y en a toujours, mais les autres parallélogrammes ?
Essayons donc : traçons un segment parallèle à une diagonale ; visiblement, si on obtient un parallélogramme, ce n'est pas un rectangle. Alors !



La « méthode du losange » ne convient pas, mais une autre, pourquoi pas ?

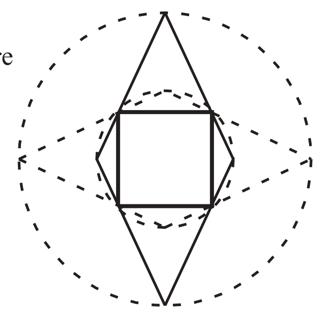
Réfléchissons un instant.
Un rectangle, diagonales égales, diagonales qui se coupent en leurs milieux, voilà qui fait penser à quatre points d'un cercle deux à deux diamétralement opposés.

On peut donc penser à tracer un cercle dont les quatre côtés du parallélogramme… Mais où centrer ce cercle ? Mais si un parallélogramme est inscrit dans un autre, son centre est le même que l'autre : c'est le milieu commun à deux segments dont les extrémités appartiennent à deux droites parallèles ; on a déjà vu cela.



Et comme un rectangle, c'est un parallélogramme et que le centre du cercle, c'est celui du rectangle, il suffira de pouvoir tracer un cercle centré au centre du parallélogramme qui coupe les quatre côtés (deux consécutifs suffiront…).
Seulement voilà, cela est-il toujours possible ?
Et si on n'y parvient pas, etc. Et pourquoi cela l'est-il dans un losange ?
Allons, on ne va pas tout vous dire. Réfléchissez aussi.

Et si nous revenions au losange ?
Il y a, dans un losange, une infinité de façons d'inscrire un rectangle.
Mais parmi tous ces rectangles, trouve-t-on un carré ?
Observez la figure ci-contre :
et concluez !



Et pour des plus grands :
cercle – carré
rectangle – ellipse

Qu'est-ce que tout cela peut bien donner ?
Qui cherche, trouve !