Temps et périodes

Jean-Claude Carréga

Cet article est issu du compte rendu d'un stage proposé par l'IREM de Lyon sur les thèmes des TPE en Décembre 2000.
La première partie A), qui concerne l'astronomie, est la plus importante de l'article. Signalons que la présentation mathématique de l'apport des grands savants historiques comme Kepler et Newton est faite dans les formulations actuelles, sans rapport avec la manière dont se sont exprimés ces auteurs.
Pour l'article, nous avons aussi conservé les parties B) et C) qui donnent un aperçu sur la datation au carbone 14 et sur le pendule.

A) Trois phénomènes périodiques

De tout temps les hommes ont pu constater trois phénomènes périodiques liés au Soleil, à la Terre et à la Lune :

1) *L'alternance du jour et de la nuit.*
2) *Le retour des saisons.*
3) *Les phases de la Lune.*

Ces phénomènes sont à l'origine de la mesure du temps et de la confection de calendriers.

1) *L'alternance du jour et de la nuit* est due à la rotation de la Terre autour de son axe.
   Période = 1 jour.
2) *Le retour des saisons* est dû à la révolution de la Terre autour du Soleil.
   Période = 1 année.
3) *Les phases de la Lune* sont dues à la révolution de la Lune autour de la Terre.
   Période = 1 lunaison. Cette lunaison est à l'origine du mois dans les calendriers.

Une difficulté consiste à définir ce que sont exactement le jour, l'année, la lunaison.
Une autre difficulté vient du fait que les périodes des trois phénomènes ne sont pas dans des rapports entiers :
1 année tropique = 365, 242 2… jours.
1 lunaison = 29, 530 58… jours.

I. Les Lois de Kepler

Citons d'abord deux précurseurs de Johannes Kepler.
Aristarque de Samos, astronome grec du 3^{e} siècle avant J.-C., qui a affirmé le premier les deux mouvements de la Terre, autour de son axe et autour du Soleil.
Nicolas Copernic, astronome polonais, qui développa les idées d'Aristarque en 1543.
Au début du 17^{e} siècle, l'astronome allemand Kepler énonça trois lois sur le mouvements des planètes autour du Soleil.

Première loi : Chaque planète décrit dans le sens direct une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

Deuxième loi : L'aire de la région balayée par le segment de droite joignant le centre du Soleil au centre de la planète est proportionnelle au temps mis à la balayer.

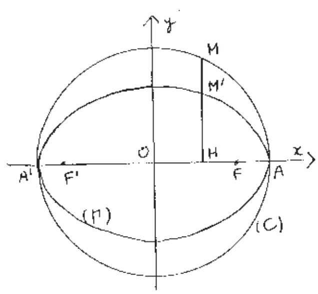
Troisième loi : Le *carré* du temps de révolution est proportionnel au *cube* du demi-grand axe de l'ellipse.

Ces lois ont été découvertes expérimentalement en utilisant les relevés des positions des planètes, plus particulièrement de la planète Mars, sur plusieurs années. Kepler a surtout travaillé à partir des relevés effectués par l'astronome danois Tycho Brahé.

Le plan de l'orbite terrestre s'appelle le *plan de l'écliptique*. Les plans des orbites des autres planètes sont pratiquement confondus avec le plan de l'écliptique, à part pour les planètes Mercure et Pluton dont les plans sont inclinés de 7° et 17° par rapport au plan de l'écliptique.
Le fait que l'orbite d'une planète soit plane n'est pas évident *a priori*. Cela a été constaté par Kepler puis, plus tard, démontré par Newton (voir V 2).
L'axe de rotation de la Terre, orienté du sud vers le nord, permet de définir une orientation du plan de l'écliptique. Cela permet, comme dans la première loi de Kepler, de parler de sens direct.

À l'époque des travaux de Kepler sur les planètes, on ne disposait pas encore de la lunette astronomique ; celle-ci sera utilisée un peu plus tard par Galilée. Les planètes connues par Kepler au début du 17^{e} siècle sont celles visibles à l'œil nu : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne. Pour les trois autres planètes, citons :
Uranus découverte par Herschel en 1781.
Neptune découverte par Galle en 1846 d'après les calculs de Le Verrier et d'Adams.
Pluton découverte par Tombaugh en 1930.

1) *Sur l'ellipse*



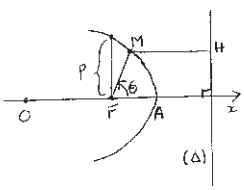
Dans le plan euclidien, on considère le cercle C de centre O et de rayon a. On note A′A un diamètre du cercle. Soit b un nombre réel tel que $0 < b < a$. Si M est un point du cercle C, on note H la projection orthogonale de M sur la droite A′A et M′ le point du plan tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{b}{a}\overrightarrow{HM}$. Lorsque M décrit le cercle C, le point M′ décrit une ellipse Γ. Dans un repère orthonormé de centre O dont l'axe Ox est la droite AA′, le cercle C a pour équation $x^2 + y^2 = a^2$ et l'ellipse Γ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La transformation considérée est appelée *affinité orthogonale* d'axe AA′ et de rapport $\frac{b}{a}$; on remarque que cette transformation conserve les longueurs horizontales et multiplie les longueurs verticales par $\frac{b}{a}$. Il en résulte qu'elle multiplie les aires par $\frac{b}{a}$. Puisque l'aire du cercle C est πa^2, l'aire de l'ellipse Γ sera donc $\mathcal{A}(\Gamma) = \pi ab$.

Les nombres a et b sont appelés *demi grand axe* et *demi petit axe* de l'ellipse.

On définit le nombre réel $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et les points F et F′ par $\overline{\mathrm{OF}} = c$ et $\overline{\mathrm{OF'}} = -c$; ces points sont appelés les *foyers* de l'ellipse. L'excentricité de l'ellipse est définie par $e = \frac{c}{a}$; on a $0 < e < 1$. Cette excentricité nous renseigne sur l'aplatissement de l'ellipse : l'ellipse s'aplatit lorsque e croit de 0 à 1. L'ellipse Γ possède deux axes de symétrie et quatre *sommets* ; les points A et A′ sont les sommets situés sur l'axe focal.

- On peut établir que l'ellipse Γ est l'ensemble des points M du plan tels que MF + MF′ = $2a$. Si une corde de longueur $2a$ est fixée à ses extrémités aux points F et F′, un crayon tendant la corde permet de tracer l'ellipse.
- Donnons une autre caractérisation plus utile pour notre étude. Pour cela on introduit la droite Δ d'équation $x = \frac{a^2}{c}$; l'ellipse Γ est alors l'ensemble des points M du plan vérifiant $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e$, où H est la projection orthogonale de M sur Δ.
- Cette caractérisation permet d'obtenir l'équation polaire de Γ. On prend F pour origine et l'axe Ox pour axe polaire, on note (r, θ) les coordonnées polaires de M : on a MF = r et $\mathrm{MH} = \frac{a^2}{c} - c - r\cos\theta = \frac{b^2}{c} - r\cos\theta$.



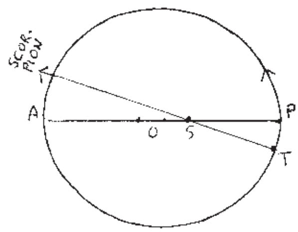
$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e \Leftrightarrow r = e\left(\frac{b^2}{c} - r\cos\theta\right) \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a} - er\cos\theta .$$

D'où l'équation polaire de Γ : $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ où $p = \frac{b^2}{a}$. Ce nombre p est appelé le *paramètre de l'ellipse* Γ ; il correspond à la valeur de r pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. D'une façon générale toute conique a une équation polaire de la forme $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ et on distingue une *ellipse*, une *parabole*, une *hyperbole* suivant que $0 < e < 1$, $e = 1$,

$e > 1$.

2) *Sur la première loi de Kepler*

L'orbite de la Terre est une ellipse dont les coefficients a, b, c, e sont approximativement donnés par a = 149 598 000 km, b = 149 577 000 km, c = 2 505 000 km, e = 0,016 7.



Puisque L'excentricité e est faible, cette ellipse est peu aplatie et ressemble à un cercle.
Sur la figure, un des foyers de l'ellipse, noté S, est occupé par le Soleil. Les sommets sur l'axe focal sont notés A et P et appelés *aphélie* et *périhélie*. L'aphélie est la position de la Terre pour laquelle la distance Terre-Soleil est la plus grande et le périhélie est la position de la Terre pour laquelle la distance Terre-Soleil est la plus courte.
De nos jours la distance Terre-Soleil peut se mesurer à l'aide d'un radar. Un signal radar est envoyé de la Terre vers le Soleil. On mesure le temps aller-retour du signal ; sachant que le signal se déplace à la vitesse de la lumière 300 000 km/s, on en déduit la distance. On peut ainsi déterminer les distances extrémales $\alpha = \mathrm{SA}$ et $\beta = \mathrm{SP}$ d'où l'on peut déduire les coefficients de l'ellipse décrite par la Terre par $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $c = \alpha - a = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $e = \dfrac{c}{a}$.

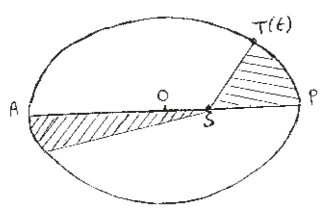
Exercice 1. Dans certaines approximations, on suppose que l'orbite de la Terre T est un cercle de rayon R = 150 × 10^6 km. En déduire une valeur approchée de la vitesse de la Terre sur son orbite.

Remarque 1. Il n'y a pas de formule simple donnant la longueur d'une ellipse. Une formule approchée est $\mathrm{L} = \pi\left[\dfrac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$.

Remarque 2. À chaque époque de l'année, le Soleil vu de la Terre est situé dans une région du ciel. On fait référence à ces régions à l'aide des *signes du Zodiaque*. Il y a 12 signes qui occupent 30° chacun. La figure représente la Terre le 14 décembre ; elle est proche du périhélie P qu'elle atteindra le 3 Janvier. Le 14 décembre, le Soleil se trouve dans le signe du Scorpion ; il entrera le 20 décembre dans le signe du Sagittaire.

3) *Sur la deuxième loi de Kepler*

- Notons $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la région balayée par le segment ST lorsque la Terre passe du périhélie P à la position T(t) (T(0) = P). La deuxième loi de Kepler nous dit que $\mathcal{A}(t) = kt$ où k est une constante.



Exercice 2. Déterminer la constante k exprimée en km^2/jour.

- Sur le dessin, les deux régions représentées ont la même aire ; elle sont donc balayées en des temps égaux. Il en résulte que la vitesse de la Terre est plus grande près du périhélie que près de l'aphélie. Sachant que le passage au périhélie est le 3 Janvier, on peut dire que la Terre va plus vite en hiver qu'en été.

4) *Sur la troisième loi de Kepler*

Elle s'énonce ainsi : Si T est la période de révolution d'une planète et si a est le demi grand axe de l'ellipse qui est son orbite, alors $\frac{T^2}{a^3} = h$ où h est une constante indépendante de la planète.

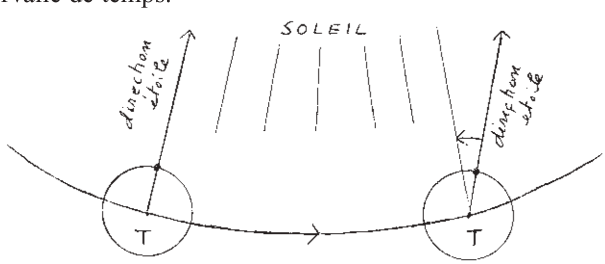
Pour la Terre, T = une année sidérale ; par définition, c'est le temps qui sépare deux passages du Soleil devant une même étoile fixe. Une année sidérale = 365, 256 3… jours.

Exercice 3. Appelons unité astronomique la distance moyenne Terre-Soleil : 1 UA = 150×10^6 km. Quelles sont (exprimées en UA) les distances moyennes Jupiter-Soleil et Saturne-Soleil sachant que pour Jupiter et Saturne les périodes de révolution sont respectivement T = 11,18 ans et T = 29,45 ans.

Exercice 4. En admettant que les satellites artificiels qui tournent autour de la Terre suivent aussi la troisième loi de Kepler, sur quelle orbite doit-on placer un satellite pour qu'il fasse deux tours de Terre en une journée ? Cet exemple correspond aux 24 satellites du système GPS utilisés pour la navigation.
Indications : l'orbite géostationnaire est située à 35 800 km d'altitude et le rayon de la Terre est R = 6 400 km. Un satellite placé sur l'orbite géostationnaire a pour période 1 jour.
Que dire de la station Mir qui, jusqu'en 2001, tournait autour de la Terre à 350 km d'altitude ?

II. La durée du jour et l'unité de temps

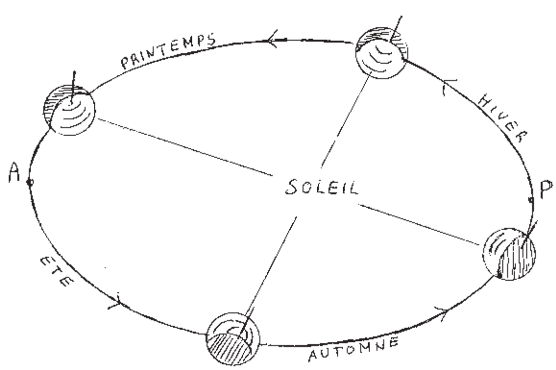
La Terre tourne autour de son axe avec une grande régularité. Lorsqu'elle a effectué une rotation complète, elle reprend la même position par rapport aux étoiles fixes. La durée de cette rotation est appelée le *jour sidéral*. Un jour sidéral = 23 h 56 min 4 secondes.
Après une rotation complète sur elle-même, la Terre reprend la même position par rapport aux étoiles, mais pas par rapport au Soleil car elle a avancé sur son orbite pendant l'intervalle de temps.



Pour que le Soleil repasse au méridien d'un même lieu de la Terre, la Terre doit tourner encore un peu sur elle-même. Le *jour solaire* est le temps qui sépare deux passages successifs du Soleil au méridien d'un même lieu. Le jour solaire est donc un peu plus grand que le jour sidéral. Le jour solaire est variable au cours de l'année, mais, en prenant la moyenne des jours solaires sur une année, on obtient ce que l'on appelle le *jour solaire moyen*. À partir du jour solaire moyen, on définit l'*heure* qui est la 24ème partie du jour solaire moyen et de là on obtient la *seconde* qui est par définition la 3 600ème partie de l'heure ou la 86 400ème partie du jour solaire moyen.

La seconde est l'unité fondamentale du temps dans le système d'unités international SI, appelé il y a quelque temps système MKSA pour mètre, kilogramme, seconde et ampère.
L'unité de temps, la seconde, est donc définie à partir des mouvements de la Terre sur elle-même et autour du Soleil. Malheureusement ces mouvements qui semblent périodiques sur une période de temps raisonnable ne le sont pas vraiment. En particulier la Terre subit de la part de la Lune un effet de marée qui ralentit très légèrement sa rotation. La durée du jour s'allonge donc un petit peu chaque année.
Pour éviter ces inconvénients, depuis 1967, la définition de la seconde n'est plus rattachée à l'astronomie, mais à la physique.
Tout atome est constitué d'un noyau autour duquel gravitent des électrons. Suivant leurs niveaux d'énergie, ces électrons sont situés sur certaines couches. Lorsqu'un électron passe d'une couche à la couche inférieure, il y a émission d'une certaine radiation lumineuse caractéristique de ce passage. Cette radiation possède une certaine fréquence f à laquelle correspond une certaine *période* $T = \frac{1}{f}$ et une longueur d'onde $\lambda = cT$ où c désigne ici la vitesse de la lumière.
Pour la nouvelle définition de la seconde, le bureau international des poids et mesures a choisi un isotope stable de l'atome de césium (dit césium 133) auquel est associé une radiation précise de fréquence $f = 9\ 192\ 631\ 770\ s^{-1}$. Plus précisément la *seconde* est égale à 9 192 631 770 périodes de cette radiation.

III. Les saisons et la précession des équinoxes



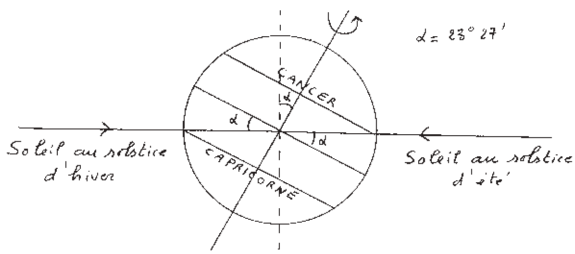
L'existence des saisons résulte de l'obliquité de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'écliptique. L'axe de rotation de la Terre fait en effet un angle de 23° 27' avec la perpendiculaire au plan de l'écliptique. Le plan de l'équateur terrestre coupe donc le plan de l'écliptique suivant une droite Δ. Au cours d'une révolution de la Terre autour du Soleil, la direction de cette droite Δ est pratiquement constante. On note Δ′ la droite Terre-Soleil. Il y a quatre positions remarquables de la Terre au cours de l'année.

Lorsque Δ = Δ′, il y a *équinoxe*. Cela se produit à deux instants qui définissent le début du *printemps* et le début de l'*automne*.

Lorsque Δ est perpendiculaire à Δ′, il y a *solstice*. Cela se produit à deux instants qui définissent le début de l'*été* et le début de l'*hiver*.

Aux *équinoxes*, les rayons du Soleil tombent à la verticale des points de l'équateur lorsque le Soleil passe au méridien du lieu.

Aux *solstices*, les rayons du Soleil tombent à la verticale des points d'un parallèle terrestre lorsque le Soleil passe au méridien du lieu. Ce parallèle est le *tropique du Cancer* pour le solstice d'été et il est situé à 23° 27' de latitude nord ; c'est le *tropique du Capricorne* pour le solstice d'hiver et il est situé à 23° 27' de latitude sud.



La précession des équinoxes

Le jour du printemps, on a Δ = Δ′ et la demi-droite Terre-Soleil pointe en direction d'un point du ciel appelé *point* γ ou *point vernal*.

L'axe de la Terre est animé d'un lent mouvement de rotation autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique. La période de ce mouvement est de 26 000 ans. Il en résulte une lente variation de la direction de Δ et donc du point γ. Ainsi le point γ se déplace dans le plan de l'écliptique (dans le sens rétrograde) avec une période de 26 000 ans. Voyons quelques conséquences :

C1) L'année tropique (ou année des saisons) qui est le temps qui sépare deux passages du Soleil au point γ est plus courte que l'année sidérale de $\dfrac{365{,}25}{26\,000}$ = 0,014… jour.

On a donc : Une année sidérale = 365,256 3… jours

Une année tropique = 365,242 2… jours

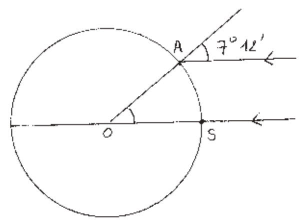
C2) Le point γ parcourt les signes du zodiaque dans le sens rétrograde en 26 000 ans ; aussi les signes traditionnellement affectés à certaines périodes de l'année depuis 2 000 ans sont décalés. Il y a 2 000 ans le point γ était situé au début du signe du Bélier, il est maintenant dans le signe des Poissons et sera bientôt situé dans le signe du Verseau.

C3) Actuellement l'axe de la Terre pointe vers le nord en direction d'une étoile qui est α de la petite Ourse, appelée pour cela *étoile polaire*. Il y a 13 000 ans c'est l'étoile Véga dans la constellation de la Lyre qui méritait le nom d'étoile polaire.

C'est l'astronome grec Hipparque qui découvrit au deuxième siècle avant J.-C. le phénomène de la précession des équinoxes.

Ératosthène et la mesure du méridien Terrestre

En Égypte, les villes de Syène (Aujourd'hui Assouan) et Alexandrie sont pratiquement situées sur le même méridien (30° de longitude est) et la ville de Syène est presque située sur le tropique du Cancer. Le savant grec Ératosthène, qui vivait à Alexandrie au 3^{e} siècle avant J.-C., avait remarqué que, le jour du solstice d'été à Syène, les rayons du Soleil tombent à la verticale à midi. Le même jour, à midi, à Alexandrie il mesura l'angle que font les rayons du Soleil avec la verticale, il trouva 7° 12'. Connaissant la distance entre Syène et Alexandrie, 794 km, il en déduisit la longueur du méridien. Bien sûr les distances étaient mesurées en stades. On remarque que 7° 12' × 50 = 360°, d'où la longueur du méridien L = 794 × 50 = 39 700 km. Résultat remarquable pour l'époque, sachant que la valeur moyenne donnée actuellement est de 40 000 km.



IV. Le calendrier

Notre calendrier, dit calendrier *Grégorien*, date de 1582 ; il est directement issu du calendrier *Julien* dont l'ancêtre est le calendrier *Romain*.

1) À l'origine le *calendrier Romain* est un calendrier lunaire dont l'année comporte 10 mois. On y ajouta par la suite deux mois, que l'on plaça au début de l'année, pour obtenir un calendrier de 12 mois lunaires qui comportaient en alternance 29 ou 30 jours. Cela faisait une année de 354 jours, trop courte de 11 jours pour être accordée sur les saisons. Pour remédier à cela, les pontifes décidaient de temps en temps d'ajouter à l'année un treizième mois. À la longue cette coutume était devenue une source de corruption car elle permettait de modifier les dates des échéances politiques.

2) Pour faire cesser ces pratiques, Jules César décida en l'an –45 de réformer le calendrier romain. Il prit l'avis de l'astronome égyptien *Sosigène*. Sosigène savait que l'année solaire comportait 365,25 jours ; il proposa donc d'abandonner la référence à la Lune pour obtenir un calendrier solaire dont l'année comporterait 365 jours en général et 366 jours tous les quatre ans. Il fut décidé que le jour supplémentaire que l'on ajouterait tous les quatre ans serait placé juste avant le 24 Février, ce jour étant considéré comme un jour doublant le 24 Février.

Les romains avaient l'habitude de nommer les jours en faisant référence à la fête suivante. Puisque le premier jour de chaque mois était la fête des Calendes, le 24 Février correspondait au sixième jour avant les calendes de Mars et le jour qui doublait le 24 Février s'appelait en Latin : *Bis sexto* ante calendas Martias. C'est de cette expression que provient le mot *bissextile* pour qualifier l'année de 366 jours.

Le nouveau calendrier, appelé *calendrier Julien*, comportait les 12 mois suivants :

Januarus (31)	Maïus (31)	September (31)
Februarus (29 ou 30)	Junius (30)	October (30)
Martius (31)	Quintilis (31)	November (31)
Aprilis (30)	Sextilis (30)	December (30)

Les premiers noms correspondent à des Dieux ou … Déesses : Janus, Mars, …, Junon, sauf Aprilis qui fait allusion à l'ouverture de la Terre pour les travaux des champs ; à partir de Quintilis le nom correspond au rang du mois dans l'ancien calendrier romain qui commençait par Martius.

Pour honorer Jules César, le Sénat décida que le mois Quintilis s'appellerait *Julius*. Plus tard pour honorer Auguste, le successeur de César, le Sénat décida que le mois Sextilis s'appellerait *Augustus*. Pour ne pas désavantager Auguste par rapport à César le mois passa à 31 jours. Pour ne pas avoir trois mois consécutifs avec 31 jours, September passa à 30 jours et le changement du nombre de jours fut alterné jusqu'à December. Mais il y avait, à cause de la faveur faite à Auguste, un jour de trop dans l'année ; on enleva donc un jour à Februarus.

Cela donne un calendrier avec des mois qui sont exactement les nôtres :

Januarus (31)	Maïus (31)	September (30)
Februarus (28 ou 29)	Junius (30)	October (31)
Martius (31)	Julius (31)	November (30)
Aprilis (30)	Augustus (31)	December (31)

3) L'origine des temps, pour le calendrier julien, était celle de l'ancien calendrier romain, à savoir la *fondation de Rome*. En l'an 532, le moine Denis le Petit propose de prendre comme nouvelle origine la naissance du Christ qu'il estimait le 25 Décembre de l'an 753 de la fondation de Rome. C'est ainsi que le *début de l'ère chrétienne* a été fixé au Premier Janvier de l'an 754 de la fondation de Rome.

4) Pour établir le calendrier Julien, l'astronome Sosigène avait estimé l'année tropique à 365,25 jours ; en fait elle est un peu plus courte et vaut 365,242 2 jours. Bien que l'écart soit faible, on s'aperçut au cours des siècles d'une dérive de l'année julienne par rapport à l'année des saisons. C'est la raison pour laquelle en l'an 1582 le pape Grégoire XIII décida de réformer le calendrier. La commission chargée de la réforme s'inspira des travaux de Luigi Lilio. On peut remarquer que $0{,}242\,2$ est voisin de $0{,}242\,5 = \dfrac{24}{100} + \dfrac{1}{400}$. Cela suggère qu'il ne faut pas placer 25 années bissextiles par siècle mais seulement 24, plus une tous les 400 ans.
La réforme Grégorienne a modifié le calendrier Julien sur les deux points suivants :

- Sont bissextiles les années dont le millésime est divisible par 4, sauf les années séculaires qui ne sont bissextiles que si leur millésime est divisible par 400.
- Pour supprimer l'avance du calendrier sur les saisons, on supprime 10 jours : le lendemain du Jeudi 4 Octobre 1582 fut le Vendredi 15 Octobre.

5) La réforme Grégorienne fut adoptée rapidement dans les pays catholiques, mais souvent beaucoup plus tard dans les pays protestants ou orthodoxes : en 1752 en Angleterre et en 1918 en Russie. Citons trois anecdotes liées à ce changement de calendrier :

- La révolution d'Octobre a eu lieu en Novembre. En effet la Russie utilisait encore le calendrier Julien le 24 Octobre 1917 ; cette date correspond au 3 Novembre du calendrier Grégorien.

- Un dicton nous dit : « À la Sainte Luce les jours augmentent du saut d'une puce ». Pourtant la Sainte Luce tombant le 13 Décembre, les jours n'augmentent pas à cette date mais continuent à diminuer jusqu'au Solstice d'hiver du 21 Décembre. Tout s'éclaire si on pense que ce dicton se réfère au calendrier Julien pour lequel le Solstice d'hiver tombait le 12 Décembre.

- Cervantes et Shakespeare sont morts tous les deux à la même date le 23 Avril 1616. Lequel est mort le premier ? La date pour l'espagnol Cervantes est grégorienne, alors que la date pour l'anglais Shakespeare est julienne. La date grégorienne pour la mort de Shakespeare est donc le 3 Mai. Cervantes est donc mort 10 jours avant Shakespeare.

6) *Le calendrier universel de Scaliger*

   Peu de temps Après la réforme grégorienne, le philosophe français Joseph Scaliger propose un calendrier où les jours sont successivement numérotés à partir d'une origine lointaine.

   L'origine choisie par Scaliger est le Lundi premier Janvier de l'an 4712 avant J.-C. à 12 heures. Ce jour origine porte le numéro 0, il se termine le mardi à midi, le jour suivant qui commence le mardi à midi porte le numéro 1 et ainsi de suite. On peut déterminer le numéro porté par le jour commençant le premier Janvier 2000 à midi, on trouve 2 451 545. En fait il existe une table de correspondance qui indique les numéros des premiers Janvier de certaines années.
   Ce calendrier est encore utilisé de nos jours par les astronomes et les historiens car il est commode pour évaluer le temps séparant deux événements. Il sert aussi d'intermédiaire pour comparer des dates issues de calendriers différents comme les calendriers Hébraïque ou Musulman.

7) *Les jours de la semaine*

   Pour déterminer quel est le jour de la semaine d'un certain jour donné, il faut calculer modulo 7. Les calculs sont facilités par le résultat suivant de John Conway :

Théorème : Pour une année donnée, le 4/4, le 6/6, le 8/8, le 10/10 et le 12/12 tombent le même jour de la semaine que le dernier jour de Février.

Preuve: Soit J le dernier jour de Février de l'année considérée.

De J au 4/4	il y a	$31 + 4$	= 35 jours
Du 4/4 au 6/6	il y a	$30 + 31 + 2$	= 63 jours
Du 6/6 au 8/8	il y a	$30 + 31 + 2$	= 63 jours
Du 8/8 au 10/10	il y a	$31 + 30 + 2$	= 63 jours
Du 10/10 au 12/12	il y a	$31 + 30 + 2$	= 63 jours

On remarque que 35 et 63 sont des multiples de 7, d'où le résultat annoncé.

Exemple : Le 28 Février 1900 est un mercredi, quel est le jour de la semaine du 14 Décembre 2002 ?

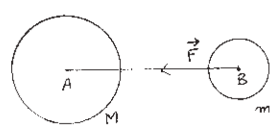
Le dernier jour de Février pour les années 1900 et 2002 est le 28 Février.
Du 28/02/1900 au 29/02/2002 il y a 102 ans dont 25 sont des années bissextiles ; le nombre de jours est donc $102 \times 365 + 25 \equiv 102 + 25 \equiv 1 \pmod 7$. On a utilisé le fait que $365 \equiv 1 \pmod 7$. Ainsi à partir du mercredi, correspondant au 28/02/1900, il faut ajouter 1 jour de semaine pour avoir le jour de semaine du 28/02/2002, c'est donc un jeudi. D'après le théorème, le 12/12/2002 est aussi un jeudi et donc le 14/12/2002 est un samedi.

Exercice 5 : Sachant que le 28 Février 1900 est un mercredi, déterminer le jour de la semaine du :
a) 11 Novembre 1918, b) 14 Juillet 1789, c) 21 Juillet 1969.

V) Newton et l'attraction universelle

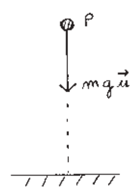
1) La loi de l'attraction universelle

La loi de l'attraction universelle découverte par Isaac Newton en 1687 s'énonce ainsi : Une masse M placée en A attire une masse m placée en B suivant une force $\vec{F}$ dirigée de B vers A dont l'intensité est $F = \varepsilon \dfrac{Mm}{AB^2}$. De même B attire A suivant la force $-\vec{F}$.



ε est une constante universelle appelée constante de la gravitation. En 1798 Henry Cavendish détermine cette constante à l'aide d'une expérience de laboratoire ; il trouve : $\varepsilon = 6{,}67 \times 10^{-11}$ (en unités MKSA).

Le poids et la chute des corps sur Terre résultent de cette loi : un point matériel P, proche de la Terre, tombe. On note g l'accélération de P, M la masse de la Terre, O son centre, R son rayon. La loi fondamentale de la dynamique donne : $\varepsilon \dfrac{Mm}{OP^2}\vec{u} = mg\vec{u}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la verticale du lieu orientée de haut en bas.

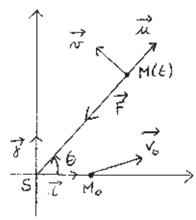


Puisque P est proche de la Terre, on a OP ≅ R, d'où $g = \varepsilon \dfrac{M}{R^2}$ est constant (en fait g dépend de l'altitude et de la latitude du lieu).
On peut déterminer g expérimentalement : une valeur moyenne est $g = 9{,}81$ m/s^2.

Exercice 6 : Sachant que le rayon de la Terre est R = 6 400 km, quelle est la masse de la Terre ?

2) Le mouvement des planètes par Newton

Nous allons montrer comment, à partir de la loi de l'attraction universelle, on peut retrouver les trois lois que Kepler avait obtenues expérimentalement.
Le Soleil de masse $\mathcal{M}$ est au point S, une planète de masse m est représentée par le point M, noté aussi M(t) pour rappeler qu'il dépend du temps t. À l'origine $t = 0$, la position de la planète est M(0) = M_0 et sa vitesse est notée $\overrightarrow{V_0}$. On suppose que les vecteurs $\overrightarrow{SM_0}$ et $\overrightarrow{V_0}$ ne sont pas colinéaires.



• On suppose que l'unique force appliquée à la planète est la force de l'attraction universelle due au Soleil. On néglige ainsi les forces d'attraction dues aux autres astres. Cette force est donc $\vec{F} = -\varepsilon \dfrac{\mathcal{M}m}{SM^2}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la demi-droite SM.
Montrons tout d'abord que la trajectoire de M est située dans un plan.

On note $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ la vitesse et l'accélération de M. La loi fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ montre que le vecteur $\vec{\Gamma}$ est à chaque instant colinéaire au vecteur $\overrightarrow{SM}$; il en résulte que le produit vectoriel $\overrightarrow{SM} \wedge \vec{V}$ est constant au cours du mouvement, en effet sa dérivée par rapport au temps est $\vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{SM} \wedge \vec{\Gamma} = \vec{0} + \vec{0}$ $= \vec{0}$. On a donc, à tout instant t, $\overrightarrow{SM} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{SM_0} \wedge \overrightarrow{V_0}$ et cela montre qu' au cours du mouvement le point M est situé dans le plan passant par S et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{SM_0} \wedge \overrightarrow{V_0}$. On considère dans ce plan un repère orthonormé $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de la demi-droite SM_0.

• La loi fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{\Gamma} = -\varepsilon \dfrac{\mathcal{M}m}{SM^2}\vec{u}$. Il en résulte

$$\vec{\Gamma} = \frac{k\vec{u}}{SM^2} \qquad (1)$$

avec $k = -\varepsilon\mathcal{M}$.

En prenant S pour origine et la droite SM_0 pour axe polaire, on considère les coordonnées polaires r et θ du point M. On considère aussi le vecteur unitaire $\vec{v}$ directement orthogonal au vecteur $\vec{u}$. On a donc $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. On remarque que l'on a $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$.

En dérivant deux fois par rapport au temps la relation $\overrightarrow{\mathrm{SM}} = r\vec{u}$, on va obtenir les composantes de l'accélération $\vec{\Gamma}$ dans la base $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\mathrm{SM}}\right) = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{v}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\overrightarrow{\mathrm{SM}}\right) &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{v} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{v} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{v} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{v} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{v} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}\end{aligned}$$

$$\vec{\Gamma} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u} + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{v}.$$

(1) permet alors d'obtenir

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k}{r^2} \qquad (2)$$

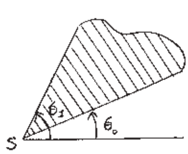
et

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad (3)$$

• En multipliant par r la relation (3), elle se met sous la forme $\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0$, qui s'intègre en donnant

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C} \qquad (4)$$

où C est une constante appelé la *constante des aires*. En coordonnées polaires, l'aire d'un secteur limité par un arc de courbe et les demi-droites d'angle polaire θ_0 et θ_1 est donnée par $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{1}{2}r^2 d\theta$. Ainsi $\dfrac{1}{2}r^2(\theta)$ est la dérivée par rapport à θ de



l'aire $\mathcal{A}(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{1}{2}r^2(\alpha)d\alpha$ et $\frac{1}{2}r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps de l'aire $\mathcal{A}(\theta)$.

La relation (4) s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(t))=\frac{C}{2} \qquad (5)$$

et on retrouve ainsi *la deuxième loi de Kepler*.

• On va maintenant transformer la relation (2) en utilisant (4) sous la forme $\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{r^2}$.

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-C\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\theta}{dt}=-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}\right)''$$

où la notation $''$ désigne la dérivée seconde par rapport à θ. (2) s'écrit alors $-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}\right)''-r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2=\frac{k}{r^2}$, d'où :

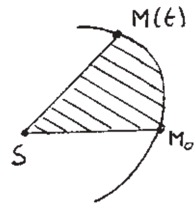
$$\left(\frac{1}{r}\right)''+\frac{1}{r}=-\frac{k}{C^2} \qquad (6)$$

(6) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont la solution générale est donnée par $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\varphi)}$ où on a posé $p=-\frac{C^2}{k}$, e et φ étant des constantes dépendant des conditions initiales M_0 et $\overrightarrow{V_0}$. Par un changement d'axe polaire, on obtient $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$: on reconnaît l'équation polaire d'une conique. Ainsi la trajectoire de la planète M est une conique. La parabole et l'hyperbole sont exclues pour une planète dont on sait qu'elle revient régulièrement ; sa trajectoire est donc une ellipse et on retrouve ainsi la *première loi de Kepler*.

• L'orbite de la planète M est une ellipse de paramètre $p=-\frac{C^2}{k}$; en considérant l'équation cartésienne de l'ellipse, nous savons que le paramètre s'exprime aussi par $p=\frac{b^2}{a}$. On a donc $-\frac{C^2}{k}=\frac{b^2}{a}$, d'où :

$$C^2 = -k\frac{b^2}{a} \qquad (7)$$

D'autre part, notons $\mathcal{A}(t)$ l'aire du secteur compris entre les points $M_0 = M(0)$ et $M(t)$. D'après la relation (5) on a $\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(t)) = \frac{C}{2}$, d'où il résulte $\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2}t$. En prenant $t = T$ (la période), on obtient $2\pi ab = CT$, d'où $4\pi^2a^2b^2 = C^2T^2$ et, en remplaçant C^2 par la relation (7), on obtient :



$$4\pi^2a^2b^2 = -k\frac{b^2}{a}T^2,$$

d'où il résulte $\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2}{k}$. On retrouve ainsi *la troisième loi de Kepler*.

Exercice 7 : On rappelle que l'on a posé $k = -\varepsilon\mathcal{M}$. Calculer la masse $\mathcal{M}$ du Soleil.

VI) Accord Lune - Soleil par les fractions continues

Une année tropique est : T = 365, 242 2… jours.
Une lunaison est : L = 29, 530 8… jours.
Comment accorder ces deux phénomènes périodiques ?
On remarque que T ≅ 12 × L + 11 jours ; ainsi, dans les calendriers lunaires de 12 mois, on est amené à ajouter certaines années un mois lunaire supplémentaire pour rester en accord avec les saisons.
On cherche des entiers x et y tels que $xT = yL$, c'est-à-dire tels que :

$$\frac{y}{x} = \frac{T}{L} = 12{,}368\,17\ldots$$

L'écriture décimale suggère de prendre comme approximation $y = 123$ et $x = 10$; on a alors $y = 10 \times 12 + 3$, d'où une solution au problème de l'accord : Tous les 10 ans, ajouter 3 mois. On aura alors 10 T = 3 652,… et 123 L = 3 632,… Il en résultera, au bout de 10 ans, 20 jours de retard pour la Lune.
En fait, se baser sur l'écriture décimale n'est pas la meilleure façon de procéder pour obtenir une solution au problème de l'accord. Il est préférable d'utiliser le développement en fraction continue, méthode introduite par Laplace en 1768.
On note h = 12,368 17… Comme tout nombre réel, ce nombre h possède un développement en fraction continue, c'est à dire peut s'écrire sous la forme d'une « fraction ininterrompue »

$$h = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

où les a_i sont des entiers. On note alors $h = [a_0\,;\, a_1, a_2, a_3, \ldots]$
Lorsque l'on arrête le développement de h à a_n on obtient une approximation rationnelle de h notée $h_n = [a_0\,;\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ et appelée la réduite de rang n de h.

À l'aide de l'écriture décimale de h, on détermine facilement les a_i à la calculette en alternant les deux opérations :
1) Retrancher la partie entière.
2) Prendre l'inverse.
Les a_i sont les parties entières successivement rencontrées.
Ici on trouve $a_0 = 12$, puis $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, … On a donc :

$$h = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Chaque réduite de h va fournir une solution approchée (x,y) au problème de l'accord :

• $h_1 = [12\ ;\ 2] = 12 + \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$. On prend $x = 2$ et $y = 25$: Tous les 2 ans, ajouter 1 mois. On a alors 2 T = 730,… et 25 L = 738,… Il en résulte 8 jours d'avance pour la Lune.

• $h_2 = [12\ ;\ 2,\ 1] = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = 12 + \frac{1}{3} = \frac{37}{3}$. On prend $x = 3$ et $y = 37$: Tous les 3 ans, ajouter 1 mois. On a alors 3 T = 1 095,… et 37 L = 1 092,… Il en résulte 3 jours de retard pour la Lune.

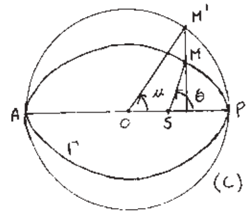
• $h_5 = [12\ ;\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1] = \frac{235}{19}$. On prend $x = 19$ et $y = 235$. Puisque $235 = 19 \times 12 + 7$, on obtient la règle : Tous les 19 ans, ajouter 7 mois. On a alors 19 T = 6 939,6… et 235 L = 6 939,7… Il en résulte 0,1 jour d'avance seulement pour la Lune au bout de 19 ans.
Cette dernière solution a été effectivement utilisée dans les calendriers chaldéen et hébraïque dans lesquels on trouve mentionné le cycle de Méton de 19 ans.

Exercice 8 : 1) Quel est le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$?
2) Quel est le nombre h ayant pour développement $h = [1\ ;\ 1, 1, 1, \dots]$?
3) Quel est le nombre h ayant pour développement $h = [1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots]$?
Ce nombre a une partie entière nulle, non indiquée dans le développement.

Remarque : On a les résultats suivants :
1) Le développement d'un nombre réel h est fini si et seulement si h est rationnel.
2) Le développement d'un nombre réel h, non rationnel, est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si h est algébrique et de degré 2, c'est à dire h est non rationnel et est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers.

VII L'équation de Kepler

Pour repérer une planète M sur son orbite Γ, on peut utiliser ses coordonnées polaires (r, θ) en prenant pour origine le foyer S occupé par le Soleil et pour axe polaire l'axe focal AP passant par l'aphélie A et le périhélie P. On peut aussi considérer le cercle principal (C) de l'ellipse Γ de centre O et de rayon a. L'ellipse Γ se déduit du cercle (C) par une affinité orthogonale d'axe AP et de rapport $\frac{b}{a}$. Soit M′ le point de (C) ayant pour image M dans cette affinité. En prenant O pour origine, on note u ($0 \leq u \leq 2\pi$) l'angle polaire de M′ ; u est appelé l'*anomalie excentrique* du point M. L'anomalie excentrique u permet aussi de repérer le point M, puisque la connaissance de u détermine M′ et M′ détermine M. On rappelle que l'on note $c = \mathrm{OS} = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $e = \frac{c}{a}$. Le lien entre les coordonnées polaires (r, θ) de M et son anomalie excentrique est donné par les relations : $a \cos u = r \cos \theta + c$ et $b \sin u = r \sin \theta$.



Kepler a donné la relation existant entre le temps de passage de la planète M et son anomalie excentrique ; cette relation qui porte le nom d'*équation de Kepler* est :

$$ab\,(u - e \sin u) = \mathrm{C}(t - t_0)$$

où C est la constante des aires et t_0 le temps de passage de la planète au périhélie P. À la fin du paragraphe V, on a trouvé la relation $2\pi ab = \mathrm{CT}$ où T est la période ; donc l'équation de Kepler s'écrit aussi :

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t - t_0).$$

Pour la Terre, on a $e = 0{,}016\,71$; une valeur approché de u est donc donnée par $u = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t - t_0)$. Faire cette approximation revient en fait à confondre l'ellipse Γ avec son cercle principal (C).

Exercice 9 : Pour la Terre, le passage au périhélie a lieu le 3 Janvier. Quelle sera la valeur de l'anomalie excentrique u le 21 Mars 2001 ?

Méthodes de résolution de l'équation de Kepler

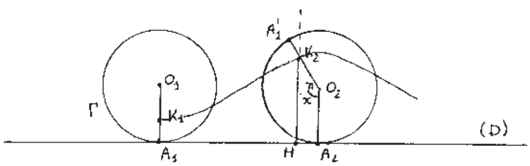
Pour t donné, on pose $\alpha = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}(t - t_0)$. On a alors $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. On cherche u, $0 \leq u \leq 2\pi$, tel que $u - e \sin u = \alpha$. En changeant de notation pour l'inconnue, on s'intéresse à l'équation $x - e \sin x = \alpha$ où α et e sont donnés tels que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ et $0 < e < 1$.
Puisque l'inconnue x ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires, on va présenter des méthodes géométriques ou numériques.

1) *Méthode graphique*

L'équation s'écrit $\sin x = \frac{1}{e}(x - \alpha)$: x est donc l'abscisse du point d'intersection des courbes d'équation $y = \sin x$ et $y = \frac{1}{e}(x - \alpha)$.

2) *Méthode mécanique*

Proposée par l'architecte Chistopher Wren en 1658.



Le cercle Γ est un cercle de rayon $O_1A_1 = 1$. Sur le segment O_1A_1 est placé un point K_1 tel que $O_1K_1 = e$. Sur la droite D est placé un point H tel que $A_1H = \alpha$. On fait rouler sans glisser le cercle Γ sur la droite D de façon que le point K_1 vienne en K_2 qui se projette en H.

La longueur $x = A_1A_2$ est égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{A_2A_1'}$, c'est à dire à la mesure de l'angle $\widehat{A_2O_2A_1'}$; $x = A_1A_2$ est alors solution de l'équation. En effet, on a $\alpha = \overline{A_1H} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2H} = x - e\sin x$ (on a utilisé $O_1K_1 = O_2K_2 = e$).
Signalons au passage que le lieu du point K_1 au cours du roulement est une courbe périodique appelée cycloïde raccourcie. Sur les cycloïdes on pourra consulter [8] ; on y trouvera aussi les épicycloïdes et les hypocycloïdes obtenues en faisant rouler un cercle sur un cercle.

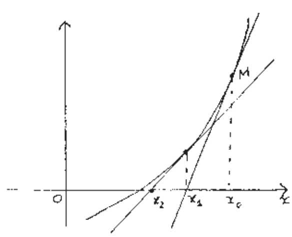
3) *Méthode par itération (Newton)*

On considère la fonction $f(x) = x - e \sin x - \alpha$.
On cherche la valeur de x telle que $f(x) = 0$.
On a $f'(x) = 1 - e \cos x$. La tangente au point M du graphe de f d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

L'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe Ox est donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



En itérant le procédé, on obtient la suite définie par récurrence par

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

qui converge vers la solution cherchée.

Par exemple avec $e = 0{,}016\,71$ et $\alpha = 1{,}307\,38$ on obtient $x_1 = 1{,}324\,37$, $x_2 = 1{,}323\,59$, $x_3 = 1{,}323\,58$, $x_4 = 1{,}323\,58$, $x_5 = 1{,}323\,58$.
Ainsi $x = 1{,}323\,58$ est une valeur approchée de la solution de l'équation

$$x - e \sin x = 1{,}307\,38.$$

B) La datation au carbone 14

1) Le carbone présent dans l'atmosphère et dans les cellules des êtres vivants contient un certain pourcentage de l'isotope du carbone ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Cet isotope est instable, il se désintègre en émettant un rayonnement indiquant une radioactivité qui se mesure en Dpm/g (désintégrations par minute et par gramme).
Au bout de T = 5 568 ans, la radioactivité du carbone est divisée par 2. On dit que T est la période du carbone ou sa demi-vie.
Si A(t) désigne la radioactivité du carbone à l'instant t, on a :

t	0	T	2 T	3 T	…	n T
A(t)	A (0)	$\frac{\mathrm{A}(0)}{2}$	$\frac{\mathrm{A}(0)}{2^2}$	$\frac{\mathrm{A}(0)}{2^3}$	…	$\frac{\mathrm{A}(0)}{2^n}$

En posant $t = n\mathrm{T}$, on a $n = \frac{t}{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{A}(t) = \frac{\mathrm{A}(0)}{2^{\frac{t}{\mathrm{T}}}}$, formule valable aussi pour t non entier.

2) Bien que l'isotope ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ se désintègre, il est renouvelé dans l'atmosphère, grâce à l'effet du rayonnement solaire sur l'azote et, par absorption, il est aussi renouvelé dans les cellules des êtres vivants. Ainsi la radioactivité du carbone des êtres vivants est constante. On estime cette constante à 13,6 Dpm/g et on la considère valable depuis 40 000 ans.

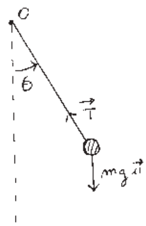
3) Lorsqu'un organisme meurt, le ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ de ses cellules n'est plus renouvelé et la radioactivité du carbone de ses cellules décroît suivant la loi $\mathrm{A}(t) = \frac{\mathrm{A}(0)}{2^{\frac{t}{\mathrm{T}}}}$.

Cela permet, connaissant A(0) = 13,6 et mesurant A(t), de trouver le temps t compris entre la mort de l'organisme et le temps actuel. On a :

$$2^{\frac{t}{\mathrm{T}}} = \frac{\mathrm{A}(0)}{\mathrm{A}(t)},\quad \frac{t}{\mathrm{T}}\ln(2) = \ln\left(\frac{\mathrm{A}(0)}{\mathrm{A}(t)}\right),\quad t = \frac{\mathrm{T}}{\ln(2)}\ln\left(\frac{\mathrm{A}(0)}{\mathrm{A}(t)}\right).$$

Exercice 10 : Dans une grotte préhistorique on a trouvé un morceau de charbon de bois. En mesurant la radioactivité du carbone, on a trouvé 1,4 Dpm/g. Quel est l'âge du charbon de bois ?

C) Le pendule simple et l'oscillateur harmonique



Un pendule simple est constitué d'un fil, de longueur l, fixé à un point O, et d'une masse m, supposée ponctuelle, suspendue à l'autre extrémité du fil notée M. À chaque instant t, la position du pendule est repérée par l'angle $\theta(t)$ que fait le fil avec la verticale. À l'instant initial $t = 0$, on a $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$. Le point M est soumis à deux forces qui sont le poids $mg\vec{u}$ et la tension du fil $\vec{T}$, où $\vec{u}$ désigne le vecteur unitaire de la verticale orientée de haut en bas.

L'application du théorème fondamental de la dynamique conduit à l'équation différentielle $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$. On ne peut pas exprimer la solution de cette équation à l'aide de fonctions élémentaires, ce sont les fonctions elliptiques qui interviennent. On se contente en général d'étudier le cas des petites oscillations pour lesquelles on confond sin θ et θ. L'équation devient donc $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$ et elle s'écrit :

$$\theta'' + \omega^2\,\theta = 0$$

en posant $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, dont les racines sont $r = \pm\, i\omega$, d'où la solution générale $\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, avec A et B réels. Il en résulte $\theta'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ et, en tenant compte des conditions initiales, on obtient $A = \theta_0$ et $B = 0$. D'où la solution cherchée $\theta(t) = \theta_0\cos\omega t$.

La fonction $\theta(t)$ est donc périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Exercice 11 : À Libreville, au Gabon, on fait osciller un pendule de longueur *1* mètre ; on compte 448 oscillations en 15 minutes. Quelle valeur de l'accélération de la pesanteur g obtient-on ?

Le pendule est un exemple de ce que l'on appelle un *oscillateur harmonique*. D'autres exemples sont fournis par le peson à ressort et le circuit électrique comprenant en série une self L et une capacité C. Tous ces systèmes conduisent à des équations différentielles analogues donnant des réponses sinusoïdales.

Réponses aux exercices

Exercice 1 : La vitesse de la Terre = 107 515 km/h.
Exercice 2 : $k = 1{,}924\,6\ 10^{14}$ km²/jour.
Exercice 3 : La distance Jupiter-Soleil = 5 UA. La distance Saturne-Soleil = 9,5 UA.
Exercice 4 : • Les satellites du système GPS sont situés à 20 184 km d'altitude (ne pas confondre l'altitude avec la distance au centre de la Terre qui est 26 584 km).

• Avant qu'elle ne tombe, la station MIR avait une période de révolution de 0,064 jour, soit de 1 h 32 min. Elle effectuait donc presque 16 tours de Terre par jour.

Exercice 5 : Mardi 14 Juillet 1789.
Lundi 11 Novembre 1918.
Lundi 21 Juillet 1969.

Exercice 6 : La masse de la Terre est de 6×10^{21} tonnes.

Exercice 7 : La masse du Soleil est de 2×10^{27} tonnes.

Exercice 8 : 1) = [1 ; 2, 2, 2, …].

2) $h = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, c'est le nombre d'or.

3) $h = \dfrac{-4+\sqrt{37}}{3}$.

Exercice 9 : Si on compte 77 jours entre le 3 Janvier (0 heure) et le 21 Mars (0 heure), l'anomalie excentrique sera u = 1,324 5 radians ou en degrés de 75° 53'.

Exercice 10 : L'âge du morceau de charbon de bois est d'environ 18 000 ans.

Exercice 11 : À Libreville, l'accélération de la pesanteur est g = 9,78 m/s^2.

Bibliographie

[1] BERKELEY : *Cours de physique*, Volume 1, Mécanique. Armand Colin, 1972.
[2] A. BRAHIC : *Enfants du Soleil*. Odile Jacob, 2000.
[3] G. CASANOVA : *Cours de Math. Spéciales*, Tome 4. Belin, 1959.
[4] Commission Inter-Irem Astronomie : *Question d'astronomie 2*. CRDP du Limousin.
[5] J. LEFORT : *La saga des calendriers*. Belin, 1998.
[6] J. LELONG-FERRAND et J.-M. ARNAUDIÈS : *Cours de Mathématiques, Tome 3, Géométrie et Cinématique*. Dunod, 1975.
[7] J.-P. LONCHAMPS et B. PISTOULET : *Physique, tome 3, Mécanique*. Herman.
[8] *Petite encyclopédie des Mathématiques*. Didier, 1980.
[9] J.-P. PARISOT et F. SUAGHER. *Calendriers et chronologie*. Masson, 1996.
[10] G. WALUSINSKI. *Ciel passé présent*. Brochure de l'APMEP nº 51, 1981.

[1] pour le pendule et l'oscillateur harmonique.
[2] et [10] pour la culture générale en astronomie.
[3] et [6] pour le mouvement des planètes par l'attraction universelle.
[4] pour l'équation de Kepler.
[5] et [9] pour l'astronomie, les calendriers et les fractions continues.
[7] pour l'attraction universelle.
[8] pour la longueur de l'ellipse et les cycloïdes.