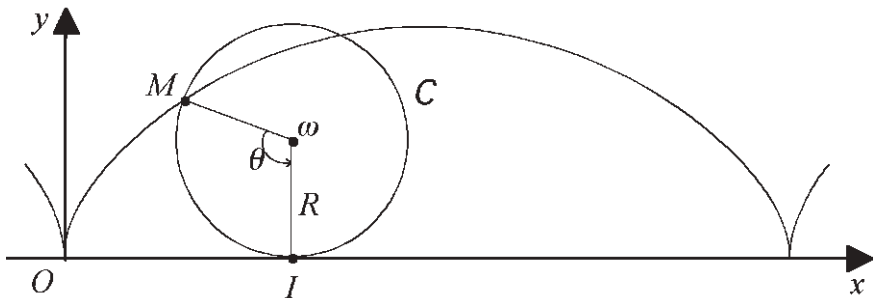


Longueur et aire d'une arche de cycloïde

Jean de Biasi^(*)

1. Rappel

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle (appelé *roulante*) qui roule sans glisser sur une droite (appelée *base*).



Prenons pour base l'axe Ox . La roulante étant le cercle $C(\omega, R)$, notons I le point de contact de ce cercle avec Ox , M le point qui engendre la cycloïde, θ l'angle $(\vec{\omega M}, \vec{\omega I})$ et supposons que, pour la valeur $\theta = 0$, M soit en O .

Le roulement sans glissement se traduit par l'égalité $\overline{OI} = \widehat{MI} = R\theta$.

Par projection sur les axes de l'égalité vectorielle $\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{I\omega} + \vec{\omega M}$, on obtient la représentation paramétrique de la cycloïde :

$$x = R(\theta - \sin \theta) ; y = R(1 - \cos \theta).$$

Dans ce qui suit nous proposons plusieurs méthodes de calcul pour la longueur et l'aire d'une arche Γ de cette courbe.

2. Aire d'une arche de cycloïde : calcul historique

Ce résultat est établi à peu près comme suit par Roberval (le calcul intégral n'est pas encore inventé à cette époque) :

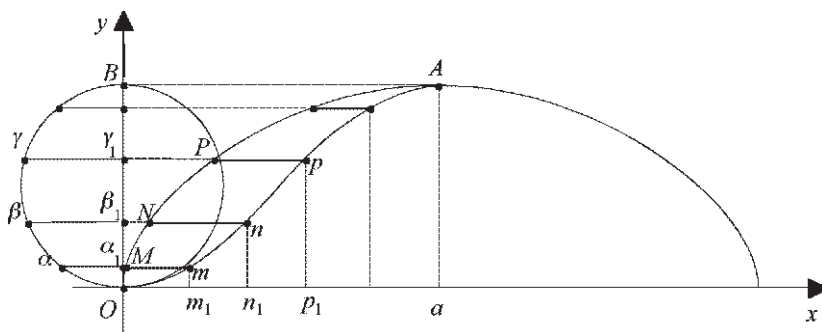
Considérons le cercle générateur C dans sa position initiale, c'est-à-dire tangent à Ox en O , point de rebroussement de la cycloïde. Si A est le sommet de la première arche et a, B les projections de A respectivement sur Ox et sur Oy , la longueur du segment Oa est égale au demi périmètre πR de C . Partageons ensuite le demi-cercle de gauche

(*) IREM Toulouse

OB en arcs isométriques par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ et reportons, sur Oa , $Om_1 = \widehat{O\alpha}$,
 $m_1n_1 = \widehat{\alpha\beta}, \dots$

Soit enfin $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ les projections de $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sur Oy et m, n, p, \dots les points dont les projections sur Ox et Oy sont respectivement $m_1, n_1, p_1, \dots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$

Quand le cercle générateur C est, par roulement sans glissement, devenu tangent à Ox en m_1 , le point de C , qui était au départ en O est en M sur la cycloïde, M ayant même ordonnée que m ; quand C est tangent en n_1 à Ox , ce point est en N sur la cycloïde, N ayant même ordonnée que n , ... et l'on a : $\alpha\alpha_1 = Mm, \beta\beta_1 = Nn, \dots$



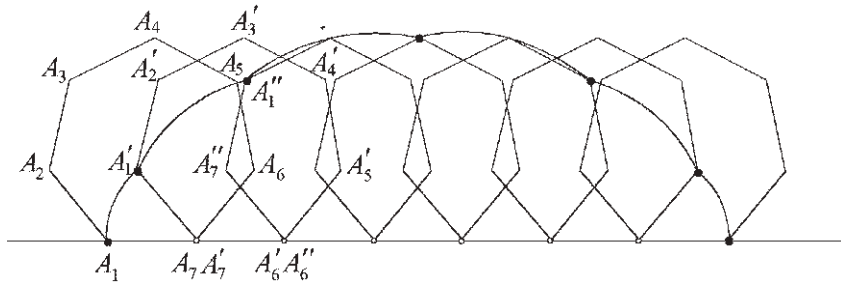
Les points O, m, n, \dots, s, A appartiennent à une courbe que Roberval a dénommée « compagnon de la cycloïde » [en fait c'est la sinusoïde d'équation $y = R(1 - \cos x)$].

Si l'on suppose que la longueur commune des arcs $O\alpha, \alpha\beta, \dots$ est très petite, les quadrilatères curvilignes $\alpha\alpha_1\beta_1\beta$ et $MmnN$, puis $\beta\beta_1\gamma_1\gamma$ et $MnpP, \dots$ sont « assimilables » à des rectangles respectivement de même longueur et de même hauteur et donc de même aire. Il en résulte que l'aire de la surface limitée par la demi-arche de cycloïde OMA et par l'arc OmA de son compagnon est égale à celle du demi-cercle générateur. Mais le compagnon de la cycloïde, admettant le centre du rectangle $OaAB$ comme centre de symétrie, partage ce rectangle en deux parties de même aire πR^2 .

Par suite l'aire de la demi-arche de cycloïde vaut $\frac{\pi R^2}{2} + \pi R^2 = \frac{3\pi R^2}{2}$ et donc celle de l'arche complète vaut $3\pi R^2$.

3. Détermination de l'aire et de la longueur d'une arche de cycloïde à partir d'une arche de cycloïde approchée

Si l'on remplace le cercle « roulante » par un polygone régulier (un heptagone sur la figure) à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R , la courbe décrite par un sommet donné de ce polygone est une « cycloïde approchée » dont la « limite » lorsque n tend vers l'infini est la cycloïde engendrée par un point d'une roulante de rayon R .



Cette idée d'approcher une cycloïde en prenant pour roulante un polygone régulier se trouve déjà chez Galilée (« *Discours concernant deux sciences nouvelles* », traduction Clavelin, p. 22-23) ainsi que chez Descartes (Lettre à Mersenne, du 23 août 1638).

Évidemment, il faut faire un acte de foi pour admettre que, parce que le polygone régulier tend vers son cercle circonscrit lorsque son nombre de côtés tend vers l'infini, dans ces mêmes conditions la courbe décrite par un sommet du polygone tend vers la cycloïde. Une justification rigoureuse est sans doute possible mais n'a peut-être pas sa place ici. Cependant, si cela tente quelqu'un...

– L'aire S_n de la partie de plan comprise entre la base et la cycloïde approchée est constituée :

1° – de la somme des aires des triangles tels que $A_1'A_7'A_6'$, somme égale à l'aire

$$n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \text{ du polygone générateur.}$$

2° – de la somme des aires des secteurs circulaires tels que $A_7A_1A_1'$; ces secteurs

ayant tous le même angle au centre de valeur $\frac{2\pi}{n}$, cette somme vaut

$$\frac{\pi}{n} \sum_{2 \leq i \leq n} A_1 A_i^2 .$$

Avec O centre du polygone et isobarycentre de ses sommets, la formule de Leibniz

$$\text{donne : } \sum_{2 \leq i \leq n} A_1 A_i^2 = 2nR^2 .$$

Il en résulte la valeur $S_n = 2\pi R^2 + n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$ dont la limite, lorsque n tend vers l'infini, est bien l'aire, $3\pi R^2$, d'une arche de cycloïde.

– La longueur L_n d'une arche de la cycloïde approchée est la somme des longueurs des arcs de cercle tels que A_1A_1' , $A_1'A_1''$, ... et par suite :

$$L_n = \frac{2\pi}{n} \sum_{2 \leq p \leq n} A_1 A_p = \frac{4\pi R}{n} \sum_{2 \leq p \leq n} \sin(p-1) \frac{\pi}{n} = \frac{4\pi R}{n} \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sin k \frac{\pi}{n} = \frac{4\pi R}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}}$$

[pour cette dernière égalité voir, par exemple, chapitre 14, §6 de [7] tome 1. On peut également utiliser la formule : $2 \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{n} = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n} - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{n}$]

La limite de L_n quand n tend vers l'infini est $8\pi R$, longueur d'une arche de cycloïde.

4. Aire d'une arche de cycloïde : calcul grâce à une généralisation

[signalé, sans démonstration, dans le Bulletin n° 408 de l'APMEP (1997)].

En remplaçant, dans la génération d'une cycloïde, la base par une courbe \mathcal{B} quelconque mais « suffisamment régulière » et en faisant effectuer un tour complet à deux rouleres égales de part et d'autre de \mathcal{B} , on obtient une courbe qui délimite une surface dont l'aire est égale à six fois celle de chacun des cercles générateurs.

Les notations étant indiquées sur la figure ci-contre, prenons pour paramètre l'abscisse curviligne s du point de contact I des deux cercles « rouleres » avec \mathcal{B} , l'origine étant en O , position initiale des points M et M' dont on étudie le mouvement.

Ainsi, $x = x(s)$, $y = y(s)$ avec $x'^2 + y'^2 = 1$.

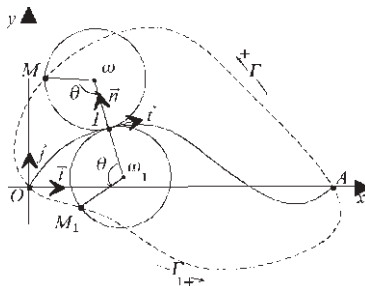
Les composantes de \vec{t} sont (x', y') et celles de \vec{n} sont $(-y', x')$. \vec{i} , \vec{j} , \vec{t} et \vec{n} sont unitaires.

On pose $\left(\vec{i}, \vec{t} \right) = \alpha$ (avec $\cos \alpha = x'$, $\sin \alpha = y'$), $\left(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega I} \right) = \left(\overrightarrow{\omega_1 M}, \overrightarrow{\omega_1 I} \right) = \theta$.

Le roulement sans glissement se traduit par $s = R\theta$ et la longueur de l'arc OA de \mathcal{B} décrit par I quand les deux rouleres ont effectué un tour complet est $2\pi R$.

Les coordonnées de M sont :

$$\begin{aligned} X &= x - Ry' + R \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \\ &= x - Ry' + R \sin(\alpha - \theta) = \left(x - Rx' \sin \frac{s}{R} \right) - Ry' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) \\ Y &= y + Rx' + R \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \\ &= y + Rx' - R \cos(\alpha - \theta) = \left(y - Ry' \sin \frac{s}{R} \right) + Rx' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right) \end{aligned}$$



et celles de M' (on change en $\vec{n} - \vec{n}$ et $\alpha + \frac{3\pi}{2} - \theta$ en $\alpha + \frac{\pi}{2} + \theta$) :

$$X' = \left(x - Rx' \sin \frac{s}{R} \right) + Ry' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right)$$

$$Y' = \dots = \left(y - Ry' \sin \frac{s}{R} \right) - Rx' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right).$$

L'aire \mathcal{A} de la surface limitée par les courbes Γ et Γ' décrites par M et M' vérifie :

$$2A = \int_{\Gamma_+} X dY - Y dX + \int_{\Gamma'_+} X dY - Y dX.$$

Posant

$$a = x - Rx' \sin \frac{s}{R}, \quad b = Ry' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right), \quad c = y - Ry' \sin \frac{s}{R} \quad \text{et} \quad d = Rx' \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right),$$

l'élément différentiel s'écrit :

$$[(a+b)(c-d)' + (c-d)(-a-b)' + (-a+b)(c+d)' + (c+d)(a-b)'] ds$$

Il se réduit à $2(da' - ad' + bc' - cb') ds$ et, par suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= R \int_0^{2\pi R} \left[(x - Rx' \sin \frac{s}{R})' x' (1 - \cos \frac{s}{R}) - (x - Rx' \sin \frac{s}{R}) (x' (1 - \cos \frac{s}{R}))' \right] ds \\ &\quad + R \int_0^{2\pi R} \left[y' (1 - \cos \frac{s}{R}) (y - Ry' \sin \frac{s}{R})' - (y - Ry' \sin \frac{s}{R}) (y' (1 - \cos \frac{s}{R}))' \right] ds \\ &= R \int_0^{2\pi R} \left[(x'^2 + y'^2) \left[(1 - \cos \frac{s}{R})^2 + \sin^2 \frac{s}{R} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{xx' + yy'}{R} \sin \frac{s}{R} - (xx'' + yy'')(1 - \cos \frac{s}{R}) \right] ds \\ &= R \int_0^{2\pi R} \left[(2 - 2 \cos \frac{s}{R}) - [(xx' + yy')(1 - \cos \frac{s}{R})]' + (x'^2 + y'^2)(1 - \cos \frac{s}{R}) \right] ds \\ &= 2R \int_0^{2\pi R} ds - 2R \int_0^{2\pi R} \cos \frac{s}{R} ds \\ &\quad - [R(xx' + yy')(1 - \cos \frac{s}{R})]_0^{2\pi R} + R \int_0^{2\pi R} (1 - \cos \frac{s}{R}) ds \\ &= 4\pi R^2 - 0 - 0 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2. \end{aligned}$$

Si la base \mathcal{B} est symétrique [c'est le cas d'une droite (\rightarrow cycloïde)] les surfaces limitées par Γ et Γ' avec \mathcal{B} sont elles mêmes symétriques et ont donc la même aire $3\pi R^2$.

5. Calcul moderne

Longueur

$$\mathcal{L} = \int_{\Gamma} ds \text{ avec } ds = R\sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta = R\sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta = 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\text{D'où : } \mathcal{L} = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 8R.$$

Aire

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi R} y dx = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = 3\pi R^2.$$

C'est-à-dire à trois fois celle du cercle générateur.

Bibliographie

Voici quelques références grâce auxquelles le lecteur pourra éventuellement compléter ses connaissances, notamment historiques, sur la cycloïde.

1. BERNOULLI (J) : *Opera omnia* (1742).
2. EULER : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sine solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (1744).
3. GALILÉE : *Opere* (Édition nationale : Barbera-Firenze 1890-1909).
4. HUYGENS : *Horologium oscillatorium* (Paris 1673) ou sa traduction : *Œuvres complètes* de C. HUYGENS).
5. LAGRANGE : *Miscellanea Taurinensia* 2 (1767).
6. ROBERVAL : *Traité des indivisibles* (1634).
7. J de BIASI : *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne* : Tome 1 (1998), tome 2 (2000) (édités par Ellipses). Bulletin APMEP n° 328 (avril 1981).