# Maximum d'un écart-type d'une série statistique bornée et docimologie

Serge Chesney

## 1. Introduction

Les enseignants calculent régulièrement des moyennes. La moyenne $m$ est un paramètre de position ; on peut comparer deux moyennes et l'on peut dire si une moyenne est élevée ou non. D'autre part l'écart-type $s$ donne une idée bien imprécise, à mon avis, de la dispersion des notes autour de la moyenne. Plus $s$ est grand et plus les notes sont dispersées, certes ! Mais quel est l'écart-type maximum ? II est difficile de comparer deux dispersions car l'écart-type dépend de la moyenne $m$, de l'effectif $n$ et de l'extremum $a$ des notes. Si l'on suppose que les notes sont réparties suivant la loi normale, la probabilité pour qu'une note soit comprise entre $m - 2s$ et $m + 2s$ est environ 0,95. Mais cette hypothèse de répartition n'est pas toujours vérifiée notamment pour des classes dont l'effectif est inférieur ou égal à 35. L'utilisation des probabilités, ici, n'est pas pratique. Une approche statistique me semble plus utile puisque nous sommes ici dans un cas particulier : les notes sont bornées par 0 et $a > 0$. Si on peut calculer le maximum de $s$, on pourra, indépendamment de $a$, $n$ et $m$, mesurer la dispersion et, par différence, l'homogénéité des notes du devoir,

## 2. Mathématisation de la situation

On considère, donc, un espace affine euclidien de dimension $n$, d'origine O et les points M et A de coordonnées respectives $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(m,\ldots,m)$ où les $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont les notes de $n$ élèves à un devoir donné et $m = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ la moyenne arithmétique des $x_i$ ; comme $0 \leq x_i \leq a$, $0 \leq m \leq a$.

On suppose maintenant que, $m$ étant fixé, les $x_i$, $i = 1, \ldots, n$ varient. Soit $\Pi$ l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = nm$ et $\Gamma$ l'hypercube compact de dimension $n$, défini par $0 \leq x_i \leq a$. Géométriquement, M appartient donc à l'intersection I de l'hyperplan $\Pi$ et de l'hypercube $\Gamma$, donc I est compact. Le point A appartient à $\Pi$ puisque ses coordonnées vérifient l'équation de $\Pi$. Comme $0 \leq m \leq a$, A appartient à $\Gamma$. D'où A appartient à I. I est un hyperpolygone dont les sommets appartiennent aux arêtes de $\Gamma$ et à $\Pi$. Soit S $(a,\ldots,a)$ ; alors le segment [OS] est une diagonale de $\Gamma$. La droite (OS) est orthogonale à $\Pi$ au point A car $\overline{\text{OS}}$ $(a,\ldots,a)$ est normal à $\Pi$.

$s = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{(x_i - m)^2}{n}} = \dfrac{\text{AM}}{\sqrt{n}}$ est une fonction continue positive ou nulle des $x_i$ et atteint, d'après le théorème de Weierstrass, sur le compact I, son minimum 0 lorsque les $x_i$ sont égaux à $m$ et son maximum $s_n(m)$ pour des valeurs inconnues, pour le moment, des $n$ variables $x_i$. Pour $n$ fixé, $s$ est maximum lorsque AM l'est.

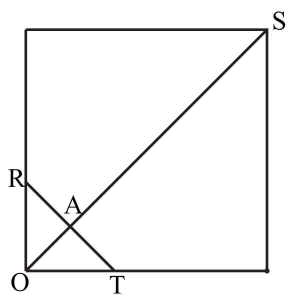
## 3.Recherche du maximum $s_n(m)$ de $s$

**a) $n = 1$**

Γ, Π, I et A sont confondus. $x_1 = m$, donc $s_1(m) = 0$.

**b) $n = 2$**

Γ est un carré dont O (0,0) et S (a,a) sont deux sommets opposés. Π est la droite d'équation : $x_1 + x_2 = 2m$. Elle passe par le point A de coordonnées $(m,m)$ et est perpendiculaire à (OS). I est le segment [RT] de milieu A. Le maximum $s_2(m)$ de $s$ est atteint quand M est confondu avec les extrémités R et T. Il y a deux possibilités :




• Si $0 \leq 2m \leq a$, c'est dire $0 \leq m \leq \frac{a}{2}$, alors les coordonnées de R et T sont $(0,2m)$ et $(2m,0)$.

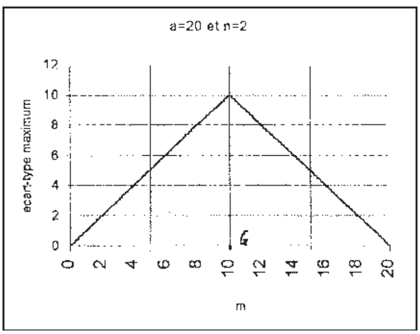
D'où $s_2(m) = \frac{\text{AM}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(2m-m)^2+(0-m)^2}}{\sqrt{2}} = m$.

• Si $a \leq 2m \leq 2a$, c'est dire $\frac{a}{2} \leq m \leq a$, alors R et T ont pour coordonnées $(2m - a,a)$ et $(a,2m - a)$.

D'où $\text{AM} = \text{AT} = \frac{\sqrt{(2m-a-m)^2+(a-m)^2}}{\sqrt{2}} = (a-m)$, donc $s_2(m) = a - m$.

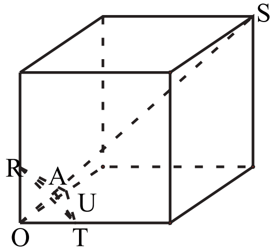
Le maximum $s_2(m)$ est donc obtenu, sur $[0,a]$, pour $m = \frac{a}{2}$ et il est égal à $\mu = \frac{a}{2}$.

D'où le graphique :



**c) $n = 3$**

$\Gamma$ est un cube, $\Pi$ est le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$. [OS] est une diagonale du cube et est perpendiculaire au plan $\Pi$. Il y a trois possibilités :




* Si $0 \leq 3m \leq a$, c'est-à-dire $0 \leq m \leq \frac{a}{3}$, I est le triangle équilatéral RTU, réduit au point O si $m = 0$. A $(m,m,m)$ est son centre. Le maximum est atteint lorsque M est confondu avec les points T $(3m,0,0)$, U $(0,3m,0)$, R $(0,0,3m)$. D'où :

$$s_3(m) = \frac{\text{AT}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(3m-m)^2 + m^2 + m^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}m\,.$$

• Si $a < 3m < 2a$, c'est-à-dire $\frac{a}{3} < m < \frac{2a}{3}$, les sommets de I ont une coordonnée égale à $a$, une autre égale à 0 et la troisième égale à $3m - a$ de façon que leur somme soit égale à $3m$. Il y a $3 \times 2 = 6$ possibilités. Cela prouve que I est un hexagone inscrit dans un cercle de centre A. Le maximum est donc atteint lorsque M est un sommet de I d'où :

$$s_3(m) = \frac{\sqrt{(3m-a-m)^2 + (a-m)^2 + (0-m)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6m^2 - 6am + 2a^2}}{\sqrt{3}}\,.$$

• Si $2a \leq 3m \leq 3a$, c'est-à-dire $\frac{2a}{3} \leq m \leq a$, I est à nouveau un triangle équilatéral de centre A, réduit au point S pour $m = a$, et dont les sommets ont chacun deux coordonnées égales à $a$ et la troisième égale à $3m - 2a$. Le maximum est atteint lorsque M est un sommet de I :

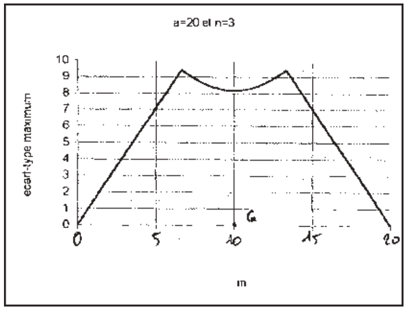
$$s_3(m) = \frac{\sqrt{(a-m)^2 + (a-m)^2 + (3m-2a-m)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6m^2 - 12am + 6a^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}(a-m)\,.$$

Le maximum $s_3(m)$ sur $[0,a]$ est obtenu pour $m = \frac{a}{3}$ ou $m = \frac{2a}{3}$ et est égal à

$$\frac{\sqrt{2}a}{3} < \frac{a}{2} = \mu\,.$$

Ici $\frac{a}{2}$ n'est atteint pour aucune valeur de $m$ Le maximum n'est pas atteint pour

$m = \frac{a}{2}$. D'où le graphique:




**d) Cas général**

$\Gamma$ est l’hypercube de dimension $n \geq 1$ et $\Pi$ l’hyperplan de dimension $n - 1$ d’équation : $x_1 + \ldots + x_n = nm$. Comme $0 \leq m \leq a$, on obtient $0 \leq nm \leq na$. Pour tout $m \geq 0$ et pour tout $n$ entier $> 0$, il existe $i \geq 1$ entier tel que $(i - 1)\, a \leq nm < ia$, c’est-à-dire $\dfrac{(i-1)a}{n} \leq m < \dfrac{ia}{n}$, d’où $\dfrac{nm}{a} < i \leq \dfrac{nm}{a} + 1$. E étant la fonction partie entière,

$$i = \mathrm{E}\left(\frac{nm}{a} + 1\right) = \mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right) + 1 \qquad (1)$$

Pour $m = 0$, I $= \{$O$\}$ et pour $m = a$, I $= \{$S$\}$. Pour $m \neq 0$ et $m \neq a$, il y a $n$ possibilités obtenues pour $i = 1, \ldots, n$.

Les sommets de I ont tous $i - 1$ coordonnées égales à $a$, une coordonnée égale à $(mn - (i - 1)a)$ et les $n - i$ coordonnées restantes égales à 0. Cela prouve que I est un hyperpolygone inscrit dans l’hypersphère de centre A. Le nombre de sommets de I est : $\mathrm{C}_n^{i-1} \times \mathrm{C}_{n-i+1}^{1} = n \times \mathrm{C}_{n-1}^{i-1} = n \times \mathrm{C}_{n-1}^{n-i}$.

Donc ce nombre est un multiple de $n$ et les hyperpolygones I sont isométriques pour $i - 1$ et $n - i$.

D’autre part le maximum de s est:

$$s_n(m) = \frac{\sqrt{(i-1)(a-m)^2 + (nm-(i-1)a-m)^2 + (n-i)(0-m)^2}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n(n-1)m^2 - 2(i-1)nam + i(i-1)a^2}}{\sqrt{n}}$$

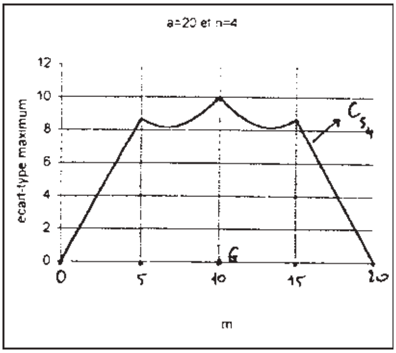
$$s_n(m) = \sqrt{(n-1)m^2 - 2(i-1)am + \frac{i(i-1)}{n}a^2}$$

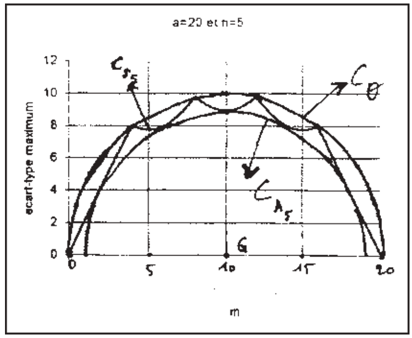
et en utilisant (1) on obtient:

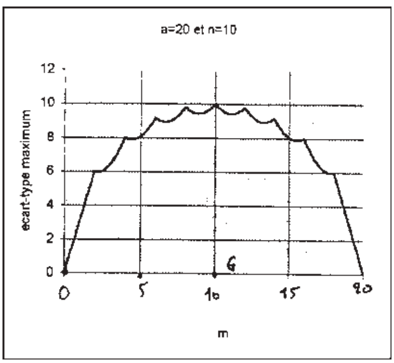
$$s_n(m) = \sqrt{(n-1)m^2 - 2\,\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)am + \frac{\left(\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)+1\right)\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)}{n}a^2} \qquad (2)$$

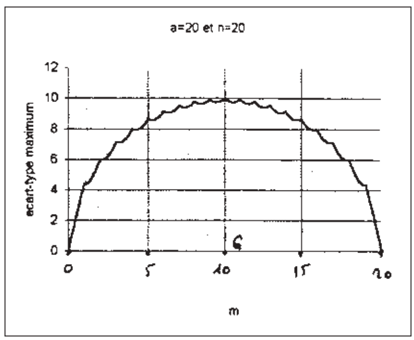
$n$ et $a$ étant fixés, la relation (2) donne, pour tout $m \in [0,a]$, le maximum de $s$. On est en présence d'une fonction continue sur $[0,a]$ dérivable partout sauf en $\dfrac{ia}{n}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

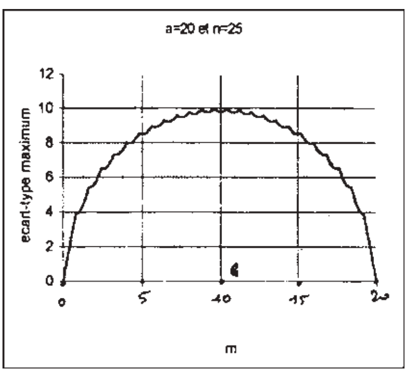
Voici, lorsque $a = 20$, les courbes représentatives de $s_n$, pour quelques valeurs de $n$ :

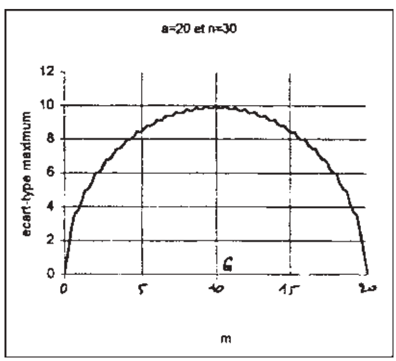



**Remarque 1**. $E\left(\dfrac{nm}{a}\right) = \dfrac{nm}{a} - \varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon < 1$, $\varepsilon$ étant la partie décimale de $\dfrac{nm}{a}$.

D'où, en utilisant la formule (1),

$$s_n(m) = \sqrt{m(a-m) - \frac{a^2\varepsilon}{n}(1-\varepsilon)} \qquad (3)$$

Quand $n$ tend vers l'infini, $s_n$ tend uniformément vers la fonction $\theta$, continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$ définie par :

$$\theta(m) = \sqrt{m(a-m)} \qquad (4)$$

On pose $\lambda_n(m) = \sqrt{m(a-m) - \frac{a^2}{4n}}$ définie sur $\left[\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right), \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\right]$.

Comme $0 \le \frac{a^2\varepsilon}{n}(1-\varepsilon) \le \frac{a^2}{4n}$, $\lambda_n(m) \le s_n(m) \le \theta(m)$, donc la représentation graphique $\mathcal{C}_{s_n}$ de $s_n$ est située au-dessous de celle $\mathcal{C}_\theta$ de $\theta$ (demi-cercle de centre G $(0, \frac{a}{2})$ et de rayon $\frac{a}{2}$) et au dessus de celle $\mathcal{C}_{\lambda_n}$ de $\lambda_n$ ( demi- cercle de centre G et de rayon $\frac{a}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}$). $\theta$ constitue donc une bonne approximation de $s_n$ pour les valeurs de $n$ suffisamment grandes (30 semble convenir lorsque $a = 20$). Le maximum de $s_n$ est donné par l'ordonnée du plus haut des nœuds de la guirlande représentant $s_n$, donc des points d'abscisse $\frac{i}{n}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

**Remarque 2**. D'après (4),$\theta(m)$ est maximum quand $m(a-m) = -\left(m-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$ l'est, c'est-à-dire quand $m = \frac{a}{2}$. On en déduit que $\mu = \frac{a}{2}$ est le maximum de $\theta(m)$. C'est un majorant de $s_n(m)$ pour toutes les valeurs de $n$ et aussi le plus petit des majorants puisqu'il est atteint, lorsque $m = \frac{a}{2}$, pour certaines valeurs de $n$.

Donc, pour tout $n$ et pour tout $m$, le maximum de $s$ est :

$$\mu = \frac{a}{2} \qquad (5)$$

$\mu$ est donc égal à la « moyenne ». Ce qui, *a posteriori*, n'a rien d'étonnant.

## 4. Mesure de la dispersion et de l'homogénéité des notes du devoir.

Revenons à notre devoir dont les notes sont $x_1, \ldots, x_n$, la moyenne $m$ et l' écart-type $s$. J'appelle :

a) *dispersion* des $x_i$ le nombre $d = \frac{s}{\mu} = 2\frac{s}{a}$,

b) *homogénéité* des $x_i$ le nombre $h = 1 - d = 1 - 2\frac{s}{a}$.

On a donc $0 \le d \le 1$ et $0 \le h \le 1$. Cela permet de comparer des devoirs, quels que soient la note maximum $a$, le nombre de copies $n$ et la moyenne $m$. Plus $d$ (resp. $h$) est proche de 1 et plus la série de notes est dispersée (resp. homogène). Plus $d$ (resp. $h$) est proche de 0 et moins elle est dispersée (resp. homogène). On peut obtenir, en multipliant $d$ et $h$ par 100 ou $a$, une note sur 100 ou sur $a$, de la dispersion et de l'homogénéité. Ces notes sont, pour la dispersion $200\frac{s}{a}$ et $2s$ et pour l'homogénéité $100 - 200\frac{s}{a}$ et $a - 2s$.

## 5. Conclusion

$n$ et $a$ étant fixés, pour tout $m \in [0,a]$, $s$ a pour maximum :

$$s_n(m) = \sqrt{(n-1)m^2 - 2\,\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)am + \frac{\left(\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)+1\right)\mathrm{E}\left(\frac{nm}{a}\right)}{n}a^2}$$

Quand $n$ est grand, on peut remplacer $s_n(m)$ par $\theta(m) = \sqrt{m(a-m)}$.

Pour tout $m$ et tout $n$, le maximum de $s$ est $\frac{a}{2}$.

La dispersion est $d = 2\frac{s}{a}$ et l'homogénéité $h = 1 - 2\frac{s}{a}$.

Cela permet de noter sur $a$ la dispersion par $2s$ et l'homogénéité par $a - 2s$. Une série de notes comprises entre 0 et $a$ peut être caractérisée par deux nombres $m$ et $a - 2s$, ce qui a plus de sens, à mon avis, que $s$.

On peut généraliser ces résultats à d'autres situations pourvu que les séries statistiques soient bornées. Mais n'est-ce pas toujours le cas, même si on ne connaît pas les bornes ?

## 6. Bibliographie

Gunnar Blom. *Probability and statistics. Theory and applications*. Springer-Verlag.
Amzallag, Piccioli, Bry. *Introduction à la statistique*. Hermann.
Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste. *L'optimisation*. Presses Universitaires de France.

Je remercie, tout particulièrement, Paul-Louis Hennequin pour ses conseils et Christiane Zehren pour ses encouragements.