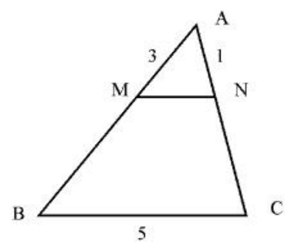
La propriété de Thalès est un élément central de l'enseignement de la géométrie au collège. On peut l'appréhender et l'utiliser sous deux aspects :
– il induit une reproduction à l'échelle ;
– il traduit, avec sa réciproque, un parallélisme de droites.
Le second aspect relève des présentations traditionnelles. Le premier s'inscrit dans une continuité avec Sixième-Cinquième.
Il serait dommage que les deux points de vue s'excluent. Tel ou tel prévaudra selon la situation en jeu. On trouvera ci-après une défense et illustration, originale, du premier aspect, « complémentaire, dit l'auteur, de celle que nous connaissons tous ». Elle pourrait être l'occasion d'un débat entre les lecteurs du Bulletin. N'hésitez pas à nous communiquer votre avis.

À propos du théorème de Thalès

Jean-Dominique Picchiottino(*)

Dans une revue, dédiée notamment à l'enseignement des mathématiques, on cherche à construire en vraie grandeur la figure ci-contre sachant que AM = 3, AN = 1, BC = 5, le périmètre de ABC égal à 17 et bien sûr (MN) // (BC).



Le problème y est résolu en posant AC = x et AB = y et on est conduit aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+5=17 \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y+5=17 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3} \end{cases}.$$

En posant NC = x et MB = y, l'auteur propose aussi les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 1+x+5+y+3=17 \\ \dfrac{1}{1+x}=\dfrac{3}{3+y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1+x+5+y+3=17 \\ \dfrac{1+x}{1}=\dfrac{3+y}{3} \end{cases}.$$

J'ai été étonné de tant d'artifices pour trouver AC = 3 et AB = 9 (conduisant à l'impossibilité de la construction, ce qui était voulu).

En effet, il est immédiat que AB + AC = 17 − 5 = 12 et que AM + AN = 3 + 1 = 4. Le triangle ABC est donc un agrandissement du triangle AMN et l'échelle est égale à $\dfrac{12}{4}$, c'est-à-dire 3. Par conséquent AB = 3 × 3 = 9 et AC = 3 × 1 = 3 ; on en conclut que le triangle est impossible à construire. Le problème peut donc se résoudre très simplement sans recours aux équations ni même aux systèmes.

Collège Henri Wallon (93 Aubervilliers) et Lycée notre Dame (92 Meudon).

Mais avoir l'idée d'une solution simple comme celle qui est proposée suppose une vision du théorème de Thalès dans le triangle qui échappe au carcan du $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

L'énoncé du théorème exposé dans les programmes officiels de Troisième n'est pas de nature à en simplifier l'usage dans des configurations usuelles au collège (par configuration de Thalès usuelle, j'entends un dessin représentant deux triangles homothétiques ayant un sommet commun). Et dès que des exercices demandent un autre calcul que celui d'une des six mesures AM, AN, AB, AC, MN et BC lorsqu'on en connaît trois autres bien choisies, on est conduit à des raisonnements dont l'exemple d'introduction illustre la lourdeur.

Voici l'énoncé officiel :

> Soient d et d' deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de d, distincts de A. Soient C et N deux points de d', distincts de A.
>
> Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

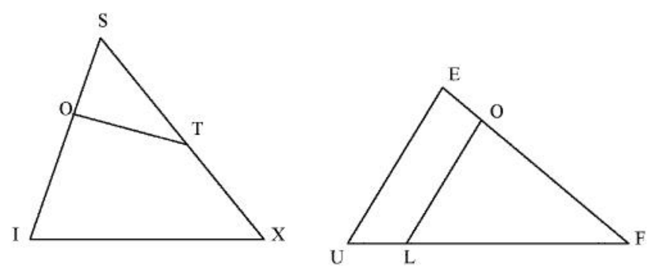
Pour alléger la part des calculs, il me semble qu'il suffit de changer le point de vue par lequel on introduit le théorème, et pour cela d'utiliser les notions d'échelle, d'agrandissement, de réduction et de reproduction de figures. Elles sont toutes liées.

Au collège les élèves ont rencontré la notion d'échelle notamment en géographie. Pour eux, et dans le meilleur des cas, une échelle de $\frac{1}{1\,000\,000}$ signifie que 1 cm sur la carte représente 10 km dans la réalité. Mais, dans la plupart des cas, lorsqu'ils mesurent une distance sur la carte égale à 2,4 cm par exemple, ils sont bien en peine de trouver les 2 400 000 cm réels, et donc 24 km. On comprend les professeurs de géographie qui renoncent à donner les échelles sous forme de fractions décimales et préfèrent des expressions comme « 1 cm sur la carte représente 10 km dans la réalité ». Dans ces conditions, que faire pour exploiter la notion d'échelle dans le cadre du théorème de Thalès ?

Dans un premier temps, prendre des exemples ailleurs qu'en géographie, avec des échelles plus grandes, et faire comprendre qu'une reproduction a la même forme que l'original. L'exemple des maquettes de voitures ou d'avions est à cet égard évocateur. Une maquette a donc la même forme que l'original, ça se voit, c'est incontestable et le modélisme est fait pour ça.

Ensuite demander ce que signifie qu'une maquette est à l'échelle $\frac{1}{14}$ et arriver à faire comprendre que toutes les dimensions de l'original ont été multipliées par $\frac{1}{14}$ pour construire la reproduction. L'idée fondamentale est là : soit e un nombre strictement positif ; dire qu'une maquette est réalisée à l'échelle *e* signifie que toutes les dimensions de l'original sont multipliées par *e*. Ainsi une échelle est un nombre strictement positif, ni plus ni moins(1). À ce stade de l'étude, les élèves devraient avoir une vision double d'une reproduction d'un objet : c'est un second objet qui a la même forme que l'original, ce qui équivaut à dire que toutes les dimensions de la reproduction sont égales à celles de l'original multipliées par le même nombre : l'échelle de la reproduction(2).

Poursuivre dans le plan avec des triangles ayant un sommet commun et dont deux côtés de l'un ont les mêmes supports que deux côtés de l'autre, comme SOT et SIX, FEU et FOL, pour arriver à formuler que, dans cette situation, un triangle est une reproduction de l'autre si les troisièmes côtés sont parallèles.



Enfin installer un vocabulaire précis.

- On a vu que **l'échelle** est un nombre strictement positif.
- Une **reproduction** d'une figure F est une figure F′ ainsi obtenue : toutes les dimensions de F′ sont les dimensions de F multipliées par un même nombre *e*. Ce nombre s'appelle l'échelle de la reproduction. Si $e > 1$, la reproduction est un **agrandissement** ; si $e < 1$, la reproduction est une **réduction** et, si $e = 1$, la reproduction est une **reproduction en vraie grandeur**.

Il ne me semble pas opportun, en classe de troisième, de parler de figures déduites l'une de l'autre par similitude, bien que cette transformation soit effectivement sous-jacente !

On peut alors conclure et formuler ainsi le théorème de Thalès :

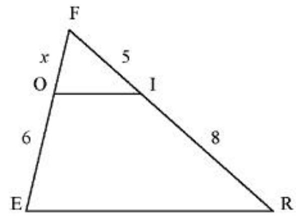
> Considérons deux triangles ABC et AMN de telle sorte que les points A, B, M d'une part, A, C, N d'autre part, soient alignés.
> Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors l'un des triangles est une reproduction de l'autre à une certaine échelle.

(1) À ce titre, l'échelle $\dfrac{1}{14}$ est plus grande que l'échelle $\dfrac{1}{1\,000\,000}$.

(2) Bien entendu, on peut souligner qu'il suffit de connaître certaines longueurs bien choisies pour construire la maquette.

Bien entendu cette échelle est indifféremment $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ ou $\frac{MN}{BC}$ (ou bien l'un des trois inverses) qui sont donc égaux.

Selon cette vision la recherche d'un problème dont le ressort est le théorème de Thalès repose sur la connaissance de l'échelle. On a vu son efficacité dans l'exemple d'introduction ; elle conduit en outre à d'autres considérations fructueuses.



Ainsi dans l'exemple ci-contre où (OI) // (ER), FOI est une réduction de FER à l'échelle $\frac{5}{13}$. Par conséquent $FI = \frac{5}{13}FR$ et donc $IR = \frac{8}{13}FR$ $\left(\frac{8}{13} = \frac{13}{13} - \frac{5}{13}\right)$. On en déduit que $FI = \frac{5}{8}IR$ et il en résulte par un raisonnement analogue que $OF = \frac{5}{8}OE = \frac{15}{4}$. Ce raisonnement paraît bien mieux adapté à la géométrie de Thalès que l'équation $\frac{x}{x+6} = \frac{5}{5+8}$ que ne manqueront pas de poser les inconditionnels du $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Pour l'avoir pratiquée en classe pendant deux ans, avec une troisième d'un bon niveau et une autre d'un niveau plus faible, je peux dire que cette approche du théorème de Thalès par les échelles, sans être miraculeuse, apporte un éclairage utile à bon nombre d'élèves. Elle est complémentaire de la version officielle. Pour tout dire, si l'on entre dans la logique du $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, on réduit inévitablement l'utilisation du théorème de Thalès à une résolution d'équations, parfois de systèmes, et il me semble que c'est en appauvrir la portée que de le réduire à une suite de calculs mécaniques.

La méthode d'introduction par les échelles et les reproductions recentre à mon avis la réflexion des élèves sur le raisonnement et surtout replace son étude dans un cadre beaucoup moins algébrique. Il serait maladroit de n'employer qu'elle dans la résolution de problèmes car, en se défaisant du carcan du $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, on tomberait sous le joug des échelles.