Géométrie élémentaire

Pierre Marlier

Pierre Marlier, enseignant en Belgique, a animé un atelier aux journées nationales de Nice. Nous souhaitons faire part aux lecteurs du bulletin de quelques activités que nous avons extraites de son compte rendu.

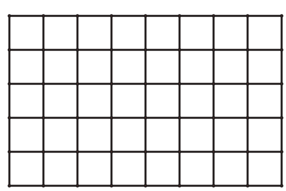
Introduction

L'atelier a mis en relief certaines activités mathématiques réalisables avec un matériel dérivant de la planche Géoplan (une planche comportant des clous répartis aux intersections d'un quadrillage carré régulier).
La variation repose sur l'idée de base qui consiste à utiliser un géoplan, mais en y remplaçant les clous par des trous qu'on a forés sur les sommets d'un quadrillage dessiné (ou collé) sur la planche. Le diamètre des trous est tel qu'on peut assez facilement y mettre ou en retirer des clous dûment calibrés de manière qu'ils tiennent assez quand on les y met mais qu'on puisse les retirer sans pince et sans se meurtrir les doigts.
D'après des informations recueillies à source fiable, cette idée d'un support où n'apparaissent que les points qu'on veut mettre en évidence n'est pas nouvelle. On rencontre parfois, au gré de promenades champêtres, des choses qu'on prend pour des sources et qui ne sont que de modestes résurgences. Je reconnais volontiers à d'autres qui l'ont fait avant moi et dont je ne me souviens pas, le mérite de ce qu'inconsciemment je leur dois et qui a opportunément refait surface dans mon esprit.

1. Première approche

Aires et périmètres de rectangles

L'outil qui est ma référence actuelle se présente comme dans la figure ci-contre. Une première activité à proposer aux élèves est de leur demander combien il y a de lignes de carrés, combien de colonnes de carrés, combien de carrés en tout, combien de lignes de trous, combien de colonnes de trous, …



Si on laisse à tous les élèves le temps et l'opportunité d'exprimer leur recherche, on constatera certainement que les raisonnements « *Il y a cinq lignes de huit carrés donc en tout 40 carrés* » ou « *Il y a six lignes de neuf trous, donc en tout 54 trous* » ne sont pas évidents pour tout le monde. Mais n'est-ce pas une bonne situation-problème que de proposer un dénombrement où il y a risque de « s'emmêler les pinceaux » mais pour lequel une stratégie de comptage limité

(*) Pierre MARLIER. Rue de Plainevaux, 185/15 B-4100 SERAING, BELGIQUE. 32/4/337.49.45. pierremarlier@swing.be

(avec risque d'erreur assez réduit) et une petite opération arithmétique est bien plus performante.

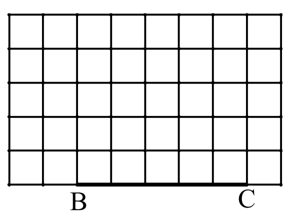
Autres questions du même tonneau :
1.1a – Un géoplan comportant cinq lignes de sept clous est-il identique à un géoplan ayant quatre lignes de six carrés ?
1.1b – Quelle est l'aire (exprimée en « p », « p » comme « pavés ») d'un rectangle ayant six lignes de quatre trous ? Quel en est son périmètre (exprimé en « c », « c » comme « côté d'un pavé ») ? Il est bien entendu opportun de faire apparaître ce rectangle sur le géoplan.
1.1c – Sur notre géoplan-type, quelle est l'aire d'une ligne de huit carrés ? quel en est le périmètre ? Et si on supprime un (deux, trois) carré(s) à une des extrémités ?
1.1d – Un pré rectangulaire mesure 70 m de long et 40 m de large. On l'entoure d'une clôture mais en laissant une ouverture de 20 m de large sur une des longueurs. On place un piquet de clôture tous les 10 mètres (mais pas au milieu de la « porte ». Combien faut-il de piquets ? Quelle longueur de fil est-elle nécessaire si on met un fil en haut des piquets et un à mi-hauteur.
Faire un modèle réduit de ce pré sur le géoplan.
1.1e – Même exercice que le précédent, mais les dimensions du pré sont 49 m pour la longueur et 35 m pour la largeur.

Un avantage de la méthode ici proposée, c'est que l'élève va construire lui-même le modèle réduit et pas seulement regarder la figure que le maître a dessinée au tableau. Il peut toucher les objets dont on parle. Il plante les clous dans la planche comme on plante les piquets autour du pré ; il peut compter les « piquets » un à un en les touchant avec son doigt, de même que les intervalles d'élastique.

Du point de vue de la pédagogie différenciée, on peut fort bien imaginer que les élèves les plus forts fassent les exercices 1.1d et 1.1e, et même d'autres qu'on leur inventera. De même, il est fort pensable que dans la construction du « modèle réduit » sur le géoplan, on laisse le choix de l'échelle aux élèves comme supposé dans la manière de formuler l'énoncé, mais qu'on aide les moins inventifs à choisir la bonne échelle.

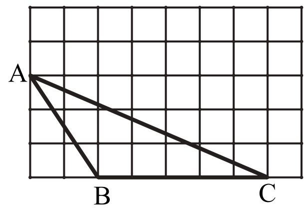
On pourra aussi laisser ceux qui n'ont pas besoin de ce support intuitif qu'est le géoplan passer directement à la phase dessinée dans le cahier tandis que les autres se livreront à un fructueux exercice d'*essai-erreur* que le géoplan permet fort bien.

Les triangles et leurs angles



Sur le géoplan, on a placé deux clous et un élastique pour déterminer un segment [BC].

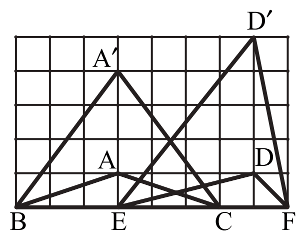
On demande aux élèves de placer un point A et les élastiques appropriés pour que le triangle ABC ait deux angles obtus, ou un angle obtus et un angle droit, ou deux angles droits. C'est l'occasion de (se) rappeler que la somme des angles d'un triangle vaut toujours deux droits.



On demande ensuite de faire apparaître un triangle ayant un angle obtus. Il est probable que l'angle obtus demandé sera en B ou en C, comme par exemple sur la figure ci-contre.

Expérience faite avec quelques élèves faibles, la question apparaît plus difficile si on demande que l'angle obtus soit en A. Et c'est bien compréhensible. Dans le premier cas, l'élève place en premier lieu les éléments qu'on lui donne ; dans celui-ci il doit d'abord imaginer ce que sera la figure terminée avant de placer le clou A. Mais ceci peut bien évidemment se résoudre par tâtonnements par la méthode *essai-erreur*. Ces tâtonnements seront l'occasion de découvrir qu'*un triangle a toujours au moins deux angles aigus*. D'où la classification :
Un *triangle* qui a deux angles aigus et le troisième obtus est dit *obtusangle*.
Un *triangle* qui a deux angles aigus et le troisième droit est dit *rectangle*.
Un *triangle* qui a deux angles aigus et le troisième également aigu est dit *acutangle*.

Cette manière de formuler la classification est évidemment bien plus satisfaisante que la formulation habituelle selon laquelle un *triangle obtusangle* a **un** angle obtus, un *triangle rectangle* a **un** angle droit, et un *triangle acutangle* a **trois** angles aigus.



Supposons maintenant que l'élève, avec ou sans l'aide du maître, ait trouvé le triangle ABC qui est manifestement obtus en A. On lui demande alors de prendre en considération le triangle A′BC qui, lui, est manifestement aigu en A′. Si on tire sur l'élastique pour passer du clou A au clou A′, le triangle s'est déformé pour passer de manière continue du caractère obtusangle au caractère acutangle : l'angle Â a progressivement diminué d'amplitude jusqu'à devenir aigu en Â′. Il s'est donc trouvé une position intermédiaire où il était droit. Trouver ce point. Expliquer qu'il s'agit bien d'un triangle rectangle.

Même problème si on passe du triangle obtusangle DEF au triangle acutangle D′EF. Trouver ce point. Expliquer qu'il s'agit bien d'un triangle rectangle.

Dans le premier cas, le point recherché est sur le quadrillage ; il se trouve une unité sous A′ et le triangle est rectangle et isocèle. La justification est assez simple puisque les côtés [AB] et [AC] sont des diagonales des côtés qu'ils traversent ; les angles qu'ils forment avec les horizontales ou les verticales sont des angles de 45°. Quand on dit que c'est assez simple, on ne dit évidemment pas que cela apparaîtra immédiatement à tous les élèves, mais que normalement, après quelques tâtonnements, quelques essais-erreurs, la vérité du fait sera acquise pour tout le monde.

Dans le deuxième cas, le point recherché se trouve aussi sur le quadrillage, mais la justification en est un peu plus difficile. On peut la formuler à ce moment, ou, comme fait dans ces feuilles, la reporter à un peu plus loin.

Dans les deux cas, il suffit de déplacer les points A, A′ ou D, D′ d'un carré vers la gauche pour que le point recherché existe toujours bien mais ne soit plus un point du quadrillage. Il va de soi qu'on commence à quitter ici le niveau des notions de base à maîtriser par tout le monde.

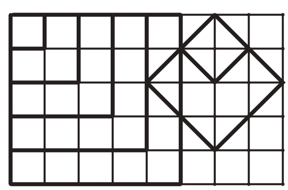
Qui ne voit l'intérêt du recours à des figures « qui bougent » ? S'il se trouve quelques élèves plus forts et qui en outre savent utiliser CABRI, pourquoi ne pas leur poser en outre la question de savoir où se trouvent tous les points A (ou tous les points D) tels que le triangle ABC (ou DEF) est rectangle. Ici, on est assurément bien au-dessus des socles de connaissances, mais pour ceux qui en sont capables, il prolonge de manière assez naturelle les premières recherches. Est-ce un péché pédagogique que d'ouvrir des perspectives ?

2. Parallélisme et perpendicularité

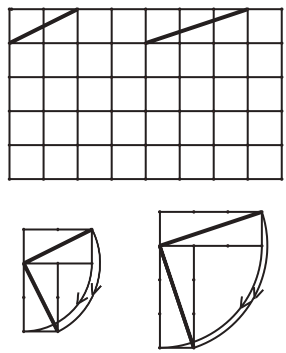
Dans cette séquence, on va exploiter systématiquement la notion de perpendicularité qu'on vient de rencontrer une première fois et la notion de parallélisme dont elle est indissociable. Nos pré-requis sont que les élèves ont au moins une notion élémentaire de ce qu'est un carré, un rectangle, un parallélogramme, … Cette requête n'est pas démesurée puisque depuis l'âge d'un an ou deux les enfants ont eu comme jouet un cylindre dans lequel étaient stockés des cylindres et des prismes, à base carrée ou rectangulaire ou …, et un couvercle percé de trous ayant les formes adéquates pour que les solides puissent y passer. Souvent, ils ont appris dès l'école maternelle à nommer ces différentes formes de trous. De toute manière, ces notions font partie du vocabulaire de base : si elles ne sont pas maîtrisées au moment où on aborde ce qui suit, ce peut être le bon moment de les apprendre.

Sur notre géoplan habituel, combien peut-on dessiner de carrés différents (non isométriques) ?

Il est probable que beaucoup d'élèves trouveront les cinq premiers, qui ont leurs côtés sur les lignes du quadrillage, encore qu'il ne soit pas sûr qu'on les ait du premier coup dans la disposition rationnelle où ils se trouvent sur la figure ci-contre ; mais c'est aussi une chose à apprendre que de travailler systématiquement pour arriver à un dénombrement complet.



En fonction de ce qui aura été fait avant, la découverte des deux autres sera facile ou un peu plus laborieuse. Il peut être raisonnable d'estimer que, selon l'âge des enfants, la limite de la maîtrise minimale se situe ici quelque part. Mais plusieurs autres carrés peuvent encore être dessinés sur ce géoplan.



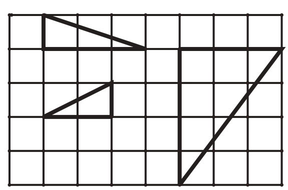
Pour trouver ces carrés supplémentaires, la considération de la figure ci-contre sera sans doute éclairante. Elle suggère dans deux cas la position d'un des côtés des carrés à trouver ; puis le bas de la figure une rotation; en identifiant le centre de symétrie et en tenant compte que les horizontales deviennent verticales et réciproquement, on a, avec certitude, l'angle de la rotation. Par ailleurs, des diagonales de rectangles isométriques sont certainement isométriques. Les figures ainsi obtenues ne peuvent être que des carrés.

Attention ! Il n'est pas dit que les carrés dont la construction est suggérée sont les seuls possibles. En cherchant bien, vous en trouverez encore deux autres.

Sur notre géoplan habituel, combien peut-on dessiner de rectangles non carrés différents (non isométriques) ? Combien de losanges non carrés différents (non isométriques) ?

Ces deux dernières questions ne relèvent bien sûr pas du niveau de base. Un intérêt qu'elles présentent, outre l'utilisation des notions de perpendicularité, de parallélisme et d'isométrie des segments, est certainement la nécessité de travailler de manière systématique pour avoir un dénombrement complet.

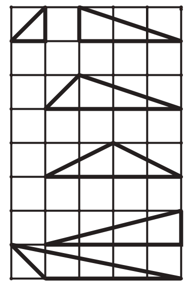
3. Aires



Quelle est l'aire (exprimée en nombre de « p » (pavés)) des triangles dessinés ?

Une des idées qui préside à cette séquence est que l'aire d'une figure s'exprime toujours en nombre de « pavés » qui sont les UA (Unités d'Aire). Pour les mathématiciens, la notion d'aire d'une figure n'a pas de sens puisque l'aire est la classe d'équivalence pour une relation spécifique.

En termes moins savants mais raisonnablement proches de la notion mathématique, et dans un contexte restreint, on peut dire que :
Deux figures (rectilignes planes) ont même aire si et seulement si
– **elles sont isométriques** ou
– **elles sont superposables « par morceaux »** ou
– **elles peuvent être couvertes par le même nombre de pavés identiques** ou
– **elles sont la somme ou la différence de figures de même aire (« même aire » étant pris ici dans un des sens précédents)**.

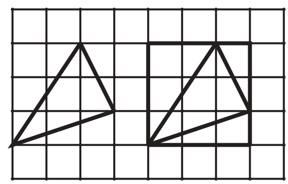


Sur la première ligne de la figure ci-contre, un ensemble de deux triangles. Quelle est l'aire de chacun de ces deux triangles ?

Sur la deuxième ligne, la « somme » des deux triangles de la première ligne(1) ; quelle en est l'aire ?

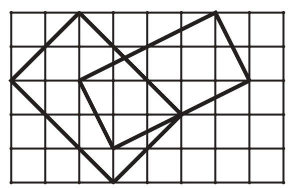
Quelle est l'aire des triangles des troisième et quatrième lignes ?

On serait tenté d'en conclure qu'un triangle est toujours un demi-rectangle. Mais la considération de la figure de la dernière ligne fera prendre conscience que, si c'est vrai, l'explication peut en être un peu moins simple qu'il ne pouvait paraître à première vue.



Et si le triangle n'a pas de côté sur une des lignes du quadrillage comme sur la figure ci-contre ?

Il n'est bien sûr pas dit qu'il faille poser aux élèves la question de l'aire du triangle en leur montrant du premier coup les deux figures. Il semble au contraire plus opportun de leur proposer d'abord la figure de gauche puis, s'ils ne trouvent pas, d'entourer le triangle proposé d'un nouvel élastique qui fait apparaître le carré comme à droite. Il reste encore à l'élève à trouver que l'aire demandée est la différence entre celle du carré et des trois triangles rectangles qui entourent le triangle initial.



Calculer l'aire des onze carrés trouvés précédemment.

Calculer l'aire des rectangles dessinés dans la figure ci-contre.

Dessiner d'autres quadrilatères (quelconques) et en calculer l'aire.

En guise de conclusion

On espère avoir montré par ces quelques exemples que grâce à un outil assez simple permettant de travailler sur des figures toujours suffisamment proches de la perfection idéale des figures abstraites des mathématiciens, il y a moyen de faire à un niveau élémentaire de la recherche par essais et erreurs et de vrais raisonnements mathématiques.

Si des personnes trouvent ce point de vue intéressant, l'auteur sera heureux de recevoir leurs réactions.

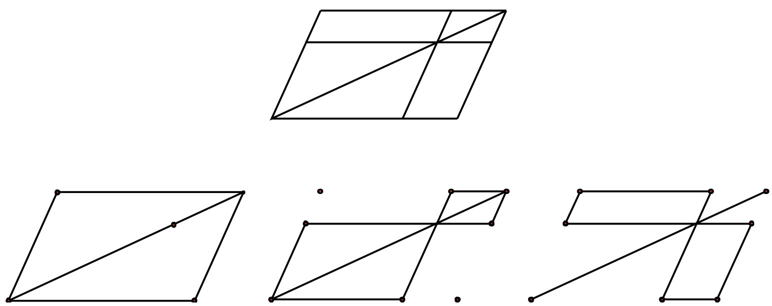
(1) On ferait sans doute mieux de dire *une* somme de ces deux triangles, mais cette précision apportera sans doute beaucoup de difficulté pour un bénéfice quasi-nul. On préférera donc garder l'abus de langage du texte.

Annexe

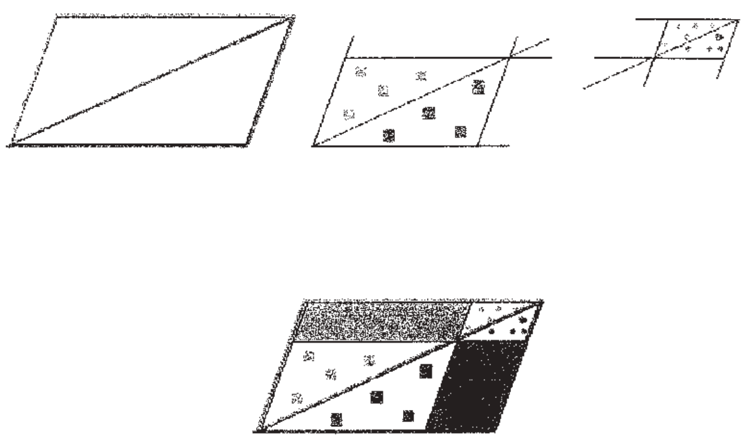
Voici maintenant un (double) exemple de démonstration sans parole. Le problème est le suivant :

Étant donné un parallélogramme et une de ses diagonales. Par un point de celle-ci, on trace les parallèles à ses côtés. On crée ainsi, en haut à gauche et en bas à droite, deux parallélogrammes. On demande de démontrer que ces parallélogrammes ont même aire.

Démonstration sans parole 1



Démonstration sans parole 2



Il n’y a plus qu’à verbaliser !