À quel type de vérité les mathématiques peuvent-elles prétendre?

Michèle Tainmont Villetard,

Le titre peut être reformulé de la façon suivante : *de quelle espèce de vérité relèvent les énoncés mathématiques ?*

La présence du verbe « prétendre » dans la première formulation n'implique nullement l'idée que les mathématiques auraient ou non des « prétentions illégitimes », mais, comme le suggère un des participants, qu'il y a, comme pour une jeune fille, des « prétendants ».

On ne cherche pas à savoir ici si la vérité mathématique est absolue ou relative, si elle est modèle normatif de la recherche de la vérité. On ne discutera pas le jugement de Descartes, énoncé dans son autobiographie intellectuelle que constitue la première partie du *Discours de la méthode* : « je me plaisais aux mathématiques à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons ».

On souhaite interroger la notion de vérité et dégager différentes espèces : vérité adéquation, vérité interprétation, … et voir si les mathématiques relèvent de telle ou telle espèce.

S'agit-il d'une question de mathématicien ou d'une question de philosophe ?

Pour certains mathématiciens, les succès et la fécondité de la recherche mathématique relèguent ce type de question à l'arrière-plan (Jean Dieudonné). Pour d'autres, en particulier ceux qui travaillent en liaison avec la logique informatique, la question de la vérité en mathématiques est actuelle (Jean-Paul Delahaye).

Quant aux philosophes, il y a ceux qui s'intéressent à l'activité scientifique, ce qui est le cas de tous les philosophes de la tradition. Et il y a les autres … en particulier ceux qui ont mal compris la phrase de Heidegger : « la science ne pense pas ».

Nous affirmons cependant que la question de la vérité est une question philosophique.

En effet, la philosophie occidentale naît en posant cette question, avec Parménide, philosophe du VI^{e} siècle avant notre ère. Certes, toute société connaît l'opposition vérité - mensonge et valorise la vérité comme véracité, puisque sans confiance il n'y aurait pas de relations sociales possibles, ce que présuppose d'ailleurs le menteur, qui ne tirerait aucun avantage dans une société de menteurs, si elle pouvait exister. La philosophie a inventé la notion de vérité en tant qu'elle s'oppose à l'erreur et en a fait un objet explicite de réflexion.

Que désignons-nous ici par le terme de « vérité » ?

Rien de plus que le caractère des jugements vrais, c'est-à-dire ceux qui s'imposent à notre esprit et à tout esprit, « pourvu qu'on les considère comme il faut », précise Descartes, car il y a l'expérience de l'erreur, voire de la mauvaise foi…

Précisons encore que la vérité n'est pas la réalité, sauf si on est platonicien… En effet, on peut penser et dire vrai à propos de ce qui n'existe pas. Ainsi, l'énoncé « la chimère est un être imaginaire » est vrai.

Après ces préliminaires, entrons dans la question en commençant par distinguer deux espèces de vérité : la vérité adéquation que nous définissons comme l'accord de l'esprit avec lui-même ou avec une chose extérieure à lui, et la vérité interprétation, qui est recherche du sens. Dire « “ en ce moment nous sommes à Lille ” est une proposition vraie » relève de la première espèce. Commenter un poème relève de la seconde espèce. Dans la première on pose qu'il n'y a qu'un énoncé vrai (celui qui est en accord avec la chose) et qu'il peut y avoir une pluralité d'énoncés faux : « nous sommes à Marseille », « nous sommes à Paris », ou « $2 + 2 = 6$ », « $2 + 2 = 5$ », etc. Tandis que dans la vérité interprétation, nous posons qu'il y a plusieurs interprétations possibles : le sens d'un poème n'est jamais épuisé par une interprétation. Tout texte, comme toute parole relève de l'interprétation.

Nous pensons que la distinction entre ces deux espèces de vérité a été initiée par Kant lorsqu'il a affirmé nettement contre toute une tradition philosophique, que la vérité dans les questions métaphysiques (notre âme est-elle immortelle ? Dieu existe-t-il ? …) n'était pas de la même espèce que la vérité dans les questions scientifiques. On a d'abord pensé la vérité philosophique sur le modèle de la vérité scientifique, la réponse juste devant mettre fin aux conflits entre les opinions multiples. Kant fait au contraire le constat d'un désaccord persistant sur les questions métaphysiques. On a pu penser aussi que les questions politiques relevaient d'une science du juste. La démocratie ne peut reposer sur une telle conception.

Les mathématiques relèvent-elles de la vérité interprétation ?

Si on se situe du point de vue de l'histoire des mathématiques, la réponse semble être positive. Si on considère les mathématiques comme une science constituée, transmise par l'enseignement, la réponse paraît négative.

Le travail de l'historien des mathématiques est en effet un travail de lecture de textes anciens ou récents. Ce travail relève pour partie de la vérité adéquation. Ainsi lorsqu'on rencontre dans un texte de Platon ou d'Euclide le terme « ligne », il faut savoir qu'il s'agit d'un segment de droite, tout objet étant nécessairement déterminé, donc limité, pour un Grec. Mais le travail de l'historien relève aussi de la vérité interprétation, par exemple quand on se demande pourquoi Euclide privilégie les raisonnements par l'absurde et que l'on répond en se référant à la pratique grecque de la discussion, dans laquelle il s'agit de ne pas laisser de prise pour des objections possibles de l'adversaire.

Mais si on considère, comme le fait l'enseignement, les mathématiques comme une science constituée, lorsqu'on parle de la vérité d'un énoncé mathématique, il ne s'agit pas de l'énoncé tel qu'il est exprimé dans tel texte de tel mathématicien, mais d'un énoncé tombé dans le patrimoine universel et intemporel des mathématiques.

Euclide écrivait au V^{e} livre des Éléments : « ce que la première grandeur est à la seconde, la troisième l'est à la quatrième », nous écrivons A/B = C/D. Il n'y a plus à interpréter, ne serait-ce que parce que l'écriture est devenue symbolique ; elle est censée exprimer directement l'idée, sans passer par les ambiguïtés du langage naturel. Le sens est (censé être) devenu univoque(1).

Quand on se demande de quel type de vérité relèvent les mathématiques, on ne se demande pas de quel type de vérité relèvent les énoncés des textes des mathématiciens, mais les énoncés des sciences mathématiques constituées. Nous pouvons donc dire qu'ils relèvent de la vérité adéquation et non de la vérité interprétation.

Le problème est que la vérité adéquation se dédouble elle-même en vérité formelle que nous définissons comme l'accord de la pensée avec elle-même et vérité matérielle, où il s'agit de l'accord de la pensée avec une réalité extérieure et indépendante. Cette dernière espèce se dédouble à son tour en vérité matérielle empirique, s'il est question de l'accord de l'esprit avec un objet d'expérience, comme lorsque nous nous interrogeons sur la vérité de la proposition « aujourd'hui nous sommes à Lille » et vérité matérielle idéale lorsqu'il est question de l'accord de l'esprit avec une réalité idéale, non sensible, par exemple lorsque nous nous demandons laquelle de ces deux propositions est vraie : « La guerre en Afghanistan est juste », « La guerre en Afghanistan n'est pas juste » et si nous présupposons que la Justice comme absolu existe, sous une forme idéale.

La vérité mathématique relève-t-elle du type vérité matérielle empirique ?

Il semble que non d'une part parce que les objets mathématiques ne sont pas des objets de l'expérience : le mathématicien ne raisonne pas sur le carré qu'il dessine ou sur le carré du carrelage, mais sur le carré parfaitement carré, dont les côtés sont parfaitement rectilignes et sans épaisseur, etc. Et parce que, d'autre part, la justification des propositions non primitives se fait par démonstration et non par observation ou vérification empiriques (on ne mesure pas les angles intérieurs d'un triangle pour établir que leur somme est égale à deux droits). Nous disons que les objets des mathématiques et les démarches de validation des énoncés sont *a priori* et non *a posteriori*.

Affirmer que la vérité mathématique ne relève pas de la vérité matérielle empirique n'invalide en rien la thèse empiriste concernant l'origine des notions mathématiques. Pour Hume, philosophe anglais du XVIII^{e} siècle, les objets mathématiques ont une origine empirique mais les mathématiques, traitant des relations entre idées, ne sont pas des sciences empiriques.

Peut-on dire alors que la vérité mathématique est du type adéquation avec un objet idéal (vérité matérielle idéale) ?

Cet objet serait indépendant des opérations de notre esprit, et serait donc découvert et non inventé.

(1) Le problème de l'enseignement, comme l'a montré la discussion est pour l'enseignant, de parvenir à communiquer ce sens et donc de prendre conscience des sens autres que l'élève est susceptible de donner.

C'est la thèse de Platon, pour qui les objets mathématiques sont des Idées, non pas des idées représentatives situées dans notre esprit, mais des réalités intelligibles, c'est-à-dire des choses qui ne peuvent être saisies que par l'esprit, et qui existent indépendamment de l'esprit, qui sont éternelles, immuables, …

C'est aussi, d'une autre façon, la thèse de Descartes. Les idées sont ici des représentations des essences ou « natures simples » mathématiques. Connaître consiste à saisir par intuition intellectuelle (saisie immédiate par opposition à la déduction qui est médiate) ces natures simples. Il s'agit de saisir un objet qui est présent à l'esprit mais qui dans son être est extérieur à l'esprit puisque créé par Dieu. Précisons que la méthode cartésienne est intuitive avant d'être déductive et que Dieu dans la création des vérités mathématiques n'était contraint par aucune nécessité : il aurait pu faire que 2 fois 2 ne soit pas 4.

Comment est pensée la démonstration dans cette conception ? Elle permet le transport de la vérité matérielle de propositions premières vers les propositions déduites. La vérité des propositions premières ne peut être démontrée, elle est donc donnée dans l'évidence d'une intuition.

Quelle est la valeur de cette conception (Platon, Descartes) de la vérité mathématique ? Incontestablement elle est lourde métaphysiquement. Mais elle rend compte du caractère idéal des objets mathématiques et du fait aussi que le mathématicien ne peut pas dire n'importe quoi, qu'il rencontre ce que Alquié appelle une expérience intellectuelle : il y a des nombres pairs et des nombres impairs, il y a des nombres premiers. L'esprit n'est pas uniquement limité par le principe de non contradiction. Il n'invente pas tout, il découvre ce qui est (pour Platon et Descartes, il n'invente rien).

La conception kantienne des mathématiques peut en un certain sens être rattachée à cette conception d'une vérité matérielle idéale. Pour Kant en effet, les mathématiques démontrent à partir de concepts construits dans l'intuition *a priori* (de l'espace pour la géométrie, du temps pour l'arithmétique qui compte dans la succession).

Il y a des axiomes en mathématiques, c'est-à-dire des principes intuitivement certains : « trois points déterminent un plan » en est un. Ces axiomes n'ont pas à être justifiés parce qu'ils correspondent à ce qui peut être construit, ici dans l'espace.

L'espace est, avec le temps, une des formes *a priori* de la sensibilité, c'est-à-dire condition universelle et *a priori* de notre rapport au monde : quand nous percevons un objet, nous ne pouvons pas ne pas le situer dans l'espace. Ainsi l'espace n'est pas dans le monde, ni dans l'esprit, mais il est comme une structure du rapport de l'esprit humain au monde. Il est donc une « forme », qui a un contenu déterminé (en l'occurrence, l'espace pour Kant est euclidien), ce qui fait que certains objets peuvent y être construits par l'esprit, et d'autres non.

Les objets mathématiques ne préexistent pas à l'activité de l'esprit, comme c'est le cas chez Platon ou Descartes ; les objets ne sont pas cependant des constructions arbitraires de l'esprit : l'esprit ne peut pas tout construire, encore une fois.

Il demeure donc chez Kant l'idée d'une vérité matérielle idéale (ici *a priori*, c'est-à-dire antérieure à l'expérience et indépendante de celle-ci) des principes. Ils n'expriment pas ce qu'est l'être (la réalité intelligible) comme chez Platon, mais donnent les propriétés de ce qui est constructible dans l'espace ou dans le temps.

En conséquence, il n'y a de démonstration qu'en mathématiques nous dit Kant ; en philosophie il y a de simples preuves.

Le mathématicien peut-il aujourd'hui être kantien?

L'intérêt du kantisme est qu'il ne présuppose plus aucune thèse métaphysique. D'un autre côté, on ne peut plus maintenir que l'intuition spatiale est nécessairement euclidienne. Ne pourrait-on pas alors dire que l'espace euclidien est la structure de notre rapport perceptif au monde, mais que l'esprit a la capacité d'intuitionner d'autres types d'espace ?

Résumons le chemin parcouru dans notre petite recherche.

Nous nous sommes d'abord demandé si la vérité mathématique relevait de la vérité d'interprétation. Pour l'essentiel, nous avons répondu négativement.

Nous nous sommes alors demandé si elle relevait de la vérité d'adéquation. Mais la question n'est pas simple. Nous en avons examiné la première partie, celle qui consiste à se demander si la vérité mathématique est de type vérité matérielle, c'est-à-dire accord avec un contenu extérieur à la pensée. Cette question elle-même s'est dédoublée : nous nous sommes demandé si le contenu extérieur à la pensée est de nature empirique ; dans ce cas il s'agirait de vérité matérielle empirique ; nous avons répondu négativement. Puis nous nous sommes demandé si les mathématiques relevaient de la vérité matérielle idéale, accord de l'esprit avec un contenu non empirique, à la manière de Platon, de Descartes ou de Kant. Nous n'avons pas tranché la question, nous avons simplement montré les avantages et les inconvénients de cette thèse sous les différentes formes qu'elle peut prendre.

La question qui nous occupe maintenant est celle-ci : peut-on penser la vérité mathématique comme vérité formelle ?

La formule est souvent employée, à tort ou à raison.

Il faut d'abord s'entendre sur le sens à donner à l'adjectif « formel ».

Le « formel » appliqué aux mathématiques peut se pendre, semble-t-il, en deux sens : soit d'un point de vue sémantique : les mathématiques sont alors conçues comme des systèmes hypothético-déductifs ; soit d'un point de vue syntaxique : les mathématiques sont alors conçues comme des systèmes formels.

La conception hypothético-déductive des mathématiques a été élaborée autour de problèmes engendrés par l'apparition des géométries non euclidiennes : une proposition géométrique n'est plus vraie absolument, elle est vraie relativement au système des propositions premières que l'on a choisi. Par exemple, la proposition « la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits » n'est vraie que dans le système euclidien. On passe d'une vérité apodictique (absolue) à une vérité hypothétique.

Cette conception est allée de pair avec les pratiques d'axiomatisation des mathématiques. Axiomatiser consiste en une mise en ordre, après coup, dégageant, dans une partie des mathématiques, les propositions premières et les propositions déduites. En ce sens, la première axiomatisation est celle d'Euclide. Mais pour Euclide les propositions premières sont matériellement vraies, tandis que dans les axiomatiques modernes, la question de la vérité matérielle des axiomes est évacuée : un axiome n'est plus une proposition évidente par elle-même mais une proposition placée en tête de la déduction, par une acte décisoire de l'esprit, comme dit Poincaré.

Ce qui ne veut pas dire que n'importe quelle proposition peut devenir un axiome. Il y a des limitations, mais elles ne relèvent plus du contenu, mais de conditions formelles ou logiques. Hilbert a démontré qu'un système d'axiomes devait répondre à trois exigences : complétude, non contradiction et indépendance des axiomes les uns par rapports aux autres.

Quelle conception de la vérité est en jeu ici ? On peut dire qu'il s'agit d'une vérité formelle, dans le sens où on ne s'intéresse qu'au respect des règles de validité du système d'axiomes et aux règles de validité de l'inférence lorsque l'on passe des axiomes aux théorèmes. On élimine la question de la vérité matérielle des principes, et donc des propositions déduites. Mais on considère que les propositions disent quelque chose, qu'elles ont un sens, et que leur vérité est relative, et non plus absolue. Le respect des règles d'inférence garantit le transport de cette vérité, des propositions initiales aux propositions finales. On conserve donc l'idée d'un contenu des propositions, mais ce n'est plus cela qui importe. Jean Dieudonné se situe dans une conception hypothético-déductive des mathématiques, mais il refuse le qualificatif de formaliste. Il n'y a formalisme au sens strict que s'il y a élimination de tout contenu des propositions, ce qui nous conduit au point de vue syntaxique.

Envisagé d'un point de vue syntaxique, la vérité formelle est celle des systèmes formels. Il n'y aurait de vérité formelle en mathématiques que lorsque les mathématiques sont assimilées à des systèmes formels.

Qu'est-ce qu'un système formel ? C'est un ensemble formé 1° d'un alphabet, 2° de mots formés à partir de cet alphabet selon des règles données, 3° de règles de combinaison qui autorisent les constructions des énoncés.

Par exemple, en logique propositionnelle, l'alphabet est composé de trois espèces de signes : les symboles de variables propositionnelles p, q, r, s, …, les symboles des opérateurs logiques $\equiv$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$, …, les parenthèses et les crochets. Les règles sont les suivantes : « p est une expression bien formée », « $\neg\, p$ est une expression bien formée », « $p \supset p$ est une expression bien formée ».

Dans cette conception toute référence à l'idée même d'une vérité est évacuée. Il n'y a même plus la notion de validité d'une inférence comme dans la conception hypothético-déductive. La construction du système est un simple jeu de déplacement de « marques » dépourvues de sens, comme au jeu de dames : il suffit de respecter les règles de déplacement de ces marques ; ici les règles sont donc des règles de réécriture. Par exemple, tout comme $(a + b)^2$ se réécrit : $a^2 + 2ab + b^2$, $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ se réécrit : $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg\, \mathrm{B})$.

Il y a démonstration ou preuve quand je peux parvenir à l'énoncé à prouver en une suite finie de mots obtenus par réécriture selon les règles autorisées.

Si la vérité mathématique est du type de celle des énoncés d'un système formel, alors il s'agit d'une vérité formelle au sens strict du mot.

Cette vérité, que l'on peut appeler validité formelle est la calculabilité : dans une système formel est « vrai » ce qui est démontré, c'est- à-dire ce qui peut être obtenu en un nombre fini de « coups » (de réécriture). Ce qui est « vrai » est ce qui est calculable. L'algorithme donne une méthode formelle de calcul pour un problème donné ; il dit comment il faut agencer ses coups pour arriver au résultat cherché. Il constitue une méthode effective, c'est-à-dire un schéma de résolution du problème qui réussit chaque fois qu'on le met en œuvre.

Il reste encore à savoir s'il est possible de considérer les mathématiques comme un système formel.

On connaît à ce propos la tentative de Hilbert au début du XX^{e} siècle : pour mettre fin à la « crise des fondements », il entend ramener les mathématiques à la seule arithmétique (dans ce cas on parle de la mathématique et non plus des mathématiques). Mais en arithmétique on raisonne sur des ensembles infinis d'entiers. Hilbert pense que ces raisonnements doivent pouvoir être réduits à des procédés utilisés pour des ensembles finis. On appelle cette thèse le postulat finitiste. Pour ce faire il transforme l'arithmétique en un système formel.

Deux remarques avant de poursuivre : 1° il formalise l'arithmétique, donc il y a un contenu préexistant, 2° quand on est au niveau du système formel on n'est plus dans les ou la mathématique(s), mais dans la logique c'est-à-dire à un niveau métamathématique.

On sait que le postulat finitiste de Hilbert a été mis en échec, dans le sens où Gödel a démontré qu'on ne peut pas démontrer, de l'intérieur d'un système formel, la non contradiction de ce système. Pour ce faire, il faudrait passer à un système de niveau supérieur, dont il faudrait pouvoir alors aussi démontrer la non contradiction, et ainsi de suite à l'infini : on ne peut réduire l'infini au fini.

Il en résulte que si les mathématiques veulent prétendre à la vérité formelle comme calculabilité, elles sont confrontées aux limites que rencontre tout système formel, mais qui ne sont pas des limites propres aux mathématiques.

L'acquis positif de cette limitation est l'apparition de la notion d'indécidabilité.

De Hilbert à Gödel certes on a perdu l'espoir de fonder les mathématiques sur la logique, mais on a « gagné » la notion d'indécidabilité : on peut démontrer, en un nombre fini d'étapes que certains problèmes ne sont pas calculables, c'est à dire qu'il n'existe aucun algorithme pour les résoudre.

Jusqu'ici nous avons considéré la question de la vérité mathématique en dehors du temps, en dehors d'une histoire de la vérité. Peut-être que la question de la vérité mathématique gagnerait à être posée du point de vue d'une histoire des mathématiques. Mais n'avons-nous pas déjà parlé d'une histoire des textes mathématiques ? De quelle histoire s'agit-il maintenant ?

Il s'agit d'abord d'une histoire objective, et non plus de l'histoire subjective des inventions de mathématiciens géniaux ; on considère les inventions/découvertes comme l'exigence de solution d'un problème qui appelle solution : les mathématiques progressent par position de problèmes et par tentative de résolution de problèmes (problèmes ouverts, conjectures).

Il s'agit encore d'une histoire interne des mathématiques. Du point de vue de Brunschvicg ou de Cavaillès il y aurait une autonomie des mathématiques par rapport à la logique, à la physique, aux conditions socio-économiques. Il y aurait un « devenir historique original » des mathématiques. Faut-il voir là de l'idéalisme ?

En outre, il s'agira, en particulier avec Cavaillès, moins d'une conception historique de la vérité que d'une théorie de la dynamique du concept. Le mouvement des mathématiques dans le temps est conçu en effet par Cavaillès comme le dynamisme d'un organisme vivant qui s'auto-produit, qui tend à croître par lui-même, la croissance en mathématique s'effectuant par interconnexion entre un énoncé nouveau et les énoncés préexistants. Dans cette conception, la garantie de la certitude, donc de la vérité, réside dans le fait que le processus ne s'interrompe pas. Les mathématiques auto-produisent leur vérité, qui est justifiée par le mouvement même de production. Ce n'est pas l'histoire qui importe, c'est la vie, le dynamisme.

On passe alors d'une théorie de la connaissance fondée sur le modèle du contact avec l'être (Platon) ou sur le modèle de la représentation (Descartes, Kant) à une théorie de la connaissance pensée sur le modèle de la production de significations. Le sens ne relève ni d'une analyse objective, c'est-à-dire ni de la vérité adéquation ni d'une démarche d'interprétation, mais de la production d'une intelligibilité.

Nous pouvons conclure provisoirement.

Au cours de la recherche ouverte par la question : « à quel type de vérité les mathématiques peuvent-elles prétendre? » nous avons rencontré deux réponses négatives : les mathématiques ne relèveraient pas de la vérité matérielle de type empirique et, en tant que mathématiques, elles ne relèveraient pas de la vérité formelle de type calculabilité.

Les impasses relatives que constituent les solutions intermédiaires nous ont conduit à reformuler la question initiale et à chercher des pistes du côté des conditions historiques de la vérité mathématique.

Une certitude demeure : la question initiale renvoie au moins à un problème ouvert, peut-être à un problème indécidable.