# L'école algébrique anglaise (1812-1854) : apports et prolongements

Marie-José Durand-Richard(*)

Dans la première moitié du 19e siècle, un groupe de mathématiciens, aujourd'hui identifié, depuis les travaux de L. Novy, sous le nom d'École Algébrique Anglaise(1), développe une conception symbolique de l'algèbre, où la signification des calculs, conçue comme interprétation contingente se trouve strictement subordonnée à la logique de lois opératoires, seule garante de leur nécessité formelle. Parmi eux, L. Novy cite George Peacock (1791-1858), Charles Babbage (1791-1871), Duncan F. Gregory (1813-1844) et George Boole (1815-1864). Il leur adjoint à tort William Rowan Hamilton (1805-1865), inventeur des quaternions, qui se démarquait des travaux d'un groupe qu'il qualifiait lui-même d'École Philologique Anglaise(2). Et il oublie John F. W. Herschel (1792-1871), le fils du découvreur d'Uranus, qui va pourtant jouer un rôle majeur dans l'émergence de cette conception symbolique de l'algèbre. Elle vise à légitimer les acquis de l'analyse algébrique indépendamment des heuristiques qui leur ont donné naissance. Elle va se trouver explicitée par Peacock en 1830, transposée par Babbage dans les plans d'une machine analytique (1834-1847) – dans laquelle les informaticiens reconnaissent l'ancêtre de l'ordinateur – investie par Boole pour donner à la logique la forme d'un calcul (1847-1854), et poursuivie par beaucoup d'autres, parmi lesquels Gregory, Augustus de Morgan (1806-1871), Arthur Cayley (1821-1895), James J. Sylvester (1814-1897), et toute une génération d'auteurs moins connus, sous la forme d'un calcul des opérations.

## 1. Les algébristes anglais et le courant réformateur

La naissance de ce courant de pensée, qui se développe d'abord à Cambridge, constitue une véritable surprise. En effet, la situation des mathématiques est alors plus brillante sur le Continent qu'en Grande-Bretagne, tandis que leur enseignement à Cambridge est resté figé dans une double fidélité à la géométrie euclidienne et à l'œuvre newtonienne, en particulier à la notation fluxionnaire du calcul infinitésimal, alors que la notation leibnizienne de ce même calcul a donné lieu à des développements bien plus conséquents sur le Continent au cours du XVIIIe siècle.

(*) Paris 8-REHSEIS.
(1) Novy, L., 1968, « L'École Algébrique Anglaise », *Revue de synthèse*, IIIº S., nº 49-52, janv-déc. 1968, 211-222. Et 1973, *Origins of Modern Algebra*, Prague.
(2) Hamilton, W. R., 183, « Theory of conjugate functions, or algebraic couples ; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time », *Transactions of the Royal Irish Academy*, 17, 203-422. *Mathematical Papers*, 3, 4-96.

L'histoire internaliste des mathématiques rapporte en général la stagnation des mathématiques anglaises consécutive à la querelle de priorité ayant opposé I. Newton (1642-1727) et G.W. Leibniz (1646-1716) au sujet de l'invention du calcul infinitésimal. Elle s'inscrit également dans une conception de la connaissance fondée sur le respect des Anciens et des valeurs du passé, telle qu'elle s'impose dans les deux universités anglaises de Cambridge et d'Oxford, universités anglicanes dont les statuts datent de 1570.

Sans reprendre ici l'analyse des conditions institutionnelles qui ont présidé à l'émergence de ce renouveau(3), au sortir de la Révolution Industrielle (1760-1830), il convient de rappeler qu'il s'inscrit dans une vaste entreprise de réformes de l'enseignement des mathématiques et des institutions scientifiques. Du côté des mathématiques, il va de l'introduction de la notation leibnizienne dans les examens de l'université de Cambridge (1817-1821) à la recherche des conditions épistémologiques qui puissent donner à l'algèbre le statut de science déductive, sans la couper ni de ses sources empiriques, ni de ses propres possibilités de développement : ce que Peacock appellera « the business of algebra ». Du côté des institutions scientifiques, ces réformateurs impulsent la création de nouvelles sociétés savantes, de la *Cambridge philosophical Society*, la *Royal Astronomical Society*, la *British Association for the Advancement of Science*, auxquelles ils veulent donner une dimension nationale. Babbage insiste sur la nécessité pour la science d'établir des liens nouveaux avec l'industrie et le pouvoir, afin de soutenir son dynamisme face aux sociétés provinciales et continentales. La détermination de Peacock ne faiblira pas :

*« Je vous assure, mon cher Herschel, que je ne cesserai jamais de me consacrer le plus possible à la cause de la réforme, et que je ne déclinerai jamais aucune tâche qui puisse me permettre d'accroître mon pouvoir d'y parvenir. Je suis presque certain d'être nommé au poste de " Moderator " pour l'année 1818-19, et comme je suis examinateur en vertu de ma fonction pour la nouvelle année, je poursuivrai avec encore plus de détermination, car je verrai ainsi si les étudiants ont été préparés aux changements, et s'ils doivent être initiés à un meilleur système par la publication de meilleurs manuels. J'ai une influence considérable comme " Lecturer ", et je ne la négligerai pas. Ce n'est que par la persévérance silencieuse que nous pouvons réduire l'hydre du préjugé et permettre à l'Université d'être en mesure de répondre à sa vocation de mère protectrice du savoir véritable et de la science »*(4)

Avec Herschel, il participera à la réforme des statuts de l'université de Cambridge au cours des années 1850, qui marquera une première laïcisation radicale de la vie universitaire.

(3) Durand-Richard, M.-J., « L'École Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », in (éds) Goldstein, C., Gray, J., Ritter, J., *L'Europe Mathématique – Mythes, histoires, identité*, Paris, Éds M.S.H, 445-477.

(4) Royal Society Library : *Herschel Papers*, Hs. 13.249, lettre de Peacock à Herschel du 17.03.1817.

Dans cette première moitié du XIX$^{e}$ siècle, il y a urgence à ce que l'Angleterre assimile aussi bien les acquis de la philosophie naturelle, que les effets de la Révolution Industrielle. Ce groupe réformateur, que l'historien des sciences W. Cannon baptisera le « network of Cambridge »(5), réalise un travail de médiation capital, face à l'extrême tension qui se manifeste dans un débat devenu permanent entre la critique utilitariste des institutions et la volonté d'en préserver une stabilité garante de l'équilibre social. Dans le domaine de la connaissance, dans la mesure où les mathématiques sont investies depuis Newton du rôle de Principes de la Philosophie Naturelle, il s'agit, au début du XIX$^{e}$ siècle, de substituer l'algèbre à la géométrie comme savoir fondamental. Mais une telle substitution ne peut intervenir qu'à condition que l'algèbre puisse répondre aux mêmes critères de rigueur logique que la géométrie qui, depuis les *Éléments* d'Euclide, apparaît comme le modèle même de la science déductive. Ce sera là l'ambition de Peacock en 1833.

## II. L'algèbre au cœur de la tension entre démarche inventive et déductivité

Depuis l'important compte-rendu qu'a rédigé John Playfair en 1808 sur la *Mécanique Céleste* de Laplace(6), l'analyse algébrique jouit en Angleterre du privilège d'avoir réconcilié les conceptions de Newton et de Leibniz quant à la stabilité du système du monde. Mais cette réconciliation ne suffit pas pour que l'algèbre puisse être intégrée dans les études universitaires avec le même statut que la géométrie. D'une part, elle est alors très mal fondée puisque, depuis qu'a commencé le processus de symbolisation de l'Algèbre, les mathématiciens n'ont cessé d'étendre la signification des symboles à des entités dépourvues de réalité, comme les quantités négatives ou impossibles, sans changer pour autant la signification des opérations, qui restent celles de l'arithmétique. D'autre part, dans la mesure où cette symbolisation permet d'oublier la signification des symboles, l'algèbre risque de n'être qu'automatisme, que mécanisme, et non un objet d'étude constamment contrôlé par la pensée, comme c'est le cas du discours géométrique. Face à un monde industriel envahi par le mécanisme productif et les déstabilisations qu'il engendre, un tel risque de mécanisation de la pensée déconsidère fortement l'algèbre et ses développements aux yeux de l'Université.

Ainsi, bon nombre de résultats de l'analyse algébrique reposent alors sur des analogies opératoires dont l'utilisation n'est fondée sur rien d'autre que l'identification formelle de deux écritures algébriques. C'est essentiellement le cas du théorème de Lagrange, qui établit une relation entre calcul différentiel et calcul aux différences finies, en s'appuyant sur l'analogie formelle entre l'opérateur différentiel et les symboles de quantités – analogie déjà relevée par Leibniz et Jean Bernoulli un siècle plus tôt, entre différentielle d'ordre $n$ d'un produit et puissance $n$-ième d'une somme – dans deux développements de fonctions en série : d'une part,

(5) Cannon, W.F., 1964, « Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network », *Journal of British Studies*, IV, nº 1, 65-88.
(6) Playfair, J., 1808, « Review of Laplace's *Traité de mécanique Céleste* », *Edinburgh Review*, 11, 249-284.

celui d'une fonction en série de Taylor :

$$u(z+x)=u(z)+\frac{du}{dz}x+\frac{d^2u}{dz^2}\frac{x^2}{2!}+\frac{d^3u}{dz^3}\frac{x^3}{3!}+\text{etc.}$$

et d'autre part, celui qui définit l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\text{etc.}$$

$[u(z+x)-u(z)]$ et $[\mathrm{e}^z-1]$ ont alors la même forme, dès lors qu'on identifie le $\frac{du}{dz}x$ du premier développement au $z$ du second, à condition encore d'identifier aussi puissance $n$-ième de la différentielle première et différentielle d'ordre $n$. Lagrange peut ainsi écrire l'accroissement fini d'une fonction(7) :

$$u(z+x)-u(z)=\Delta u=\mathrm{e}^{\frac{du}{dz}x}-1,$$

ce que L.F.A. Arbogast (1759-1803) écrira :

$$\Delta u=(\mathrm{e}^{x\delta}-1)\,u,$$

d'où :

$$\Delta^n u=(\mathrm{e}^{x\delta}-1)^n\,u.$$

en séparant l'opérateur différentiel $\delta=\frac{d}{dz}$ et le symbole $u$ de la fonction(8).

Cette analogie produit une économie très substantielle de travail dans les démonstrations. B. Brisson (1777-1828) et A L. Cauchy (1789-1856) poursuivront l'étude(9), et elle alimentera tout un débat poursuivi dans les *Annales de Gergonne* dans les années 1810 sur la nature des opérations(10). Mais elle va surtout prendre une importance décisive en Angleterre au moment où l'adoption de la notation différentielle fait ressurgir la question des fondements. Dans la traduction anglaise par Babbage, Herschel, Peacock du *Traité élémentaire de calcul différentiel et*

(7) Lagrange, J.L., 1772, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables », *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin, 185-221. 1867-1892, in (éds) Serret, J.A. & Darboux, G., *Œuvres*, 14 vols., Paris, Gauthier-Villars, 3, 439-476.

(8) Arbogast, Louis François Antoine, 1800, *Du Calcul des Dérivations*, Strasbourg, Levrault Frères.

(9) Brisson, B., 1808, « Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles » *Journal de l'École Polytechnique*, 7, 191-261. Cauchy, A., 1827, « Sur l'analogie des puissances et des différences », *Exercices de mathématiques*, in 1905-1938, *Œuvres*, série 2, 14 vols. vol. 7, 198-235.

(10) F.J. Français, 1811-1812, vol. 2, 325-331, « Méthode de différentiation indépendante du développement des fonctions en série ». J. F. Français, 1812-1813, vol. 3, 244-273, « Méthode tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation des fonctions qu'elles affectent ». J. F. Français, 1815-1816, vol. 6, 61-111, « Du Calcul des Dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites ». F.J. Servois, 1814-1815, vol. 5, 93-140, « Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel ».

*intégral* (1802) de Sylvestre F. Lacroix, Herschel en souligne l'importance :

« L'opération notée par $\Delta$ étant équivalente à la série des opérations notée par $e^{\frac{d}{dx}}-1$, et la répétition $n$ fois de cette dernière série d'opérations étant équivalente à une série d'opérations exprimée par $(e^{\frac{d}{dx}}-1)^n$, il est évident que l'opération notée par $\Delta^n$ est équivalente à celle qui est notée $(e^{\frac{d}{dx}}-1)^n$, et par conséquent $\Delta^n u_x = (e^{\frac{d}{dx}}-1)^n u_x$. »(11)

et Peacock insiste à son propos sur sa Supériorité sur la notation fluxionnaire :

« Le beau théorème de Lagrange, si important dans la théorie des Différences Finies,

$$\Delta^n u_x = (e^{\frac{d}{dx}}-1)^n u_x \quad \text{(Art. 387)}$$

et beaucoup d'autres qui lui sont rattachés, sont incapables d'une représentation par la notation fluxionnaire. ... La notation différentielle est également adaptée pour représenter à la fois les opérations et les quantités ; ses symboles sont distincts, et jamais ambigus, elle est symétrique dans tous les cas, et elle reste également simple, quel que soit l'ordre de la différentielle, ou la nature de la fonction à laquelle elle s'applique ; tandis que celle des fluxions est déficiente dans presque tous les exemples que nous venons d'énumérer, et, dans la représentation de nombreux théorèmes importants, elle faillit absolument. »(12)

L'analogie est au cœur de la tension entre abstraction inductive et déductivité. C'est pourtant elle qu'il s'agit d'éliminer pour faire de l'algèbre une science strictement déductive. Peacock, mathématicien whig anglican de l'université de Cambridge, tentera de maintenir ensemble cette double exigence d'un enracinement de l'algèbre dans l'expérience productive, et du caractère de stricte nécessité logique des résultats.

## III. L'Algèbre Symbolique de Peacock

C'est donc Peacock, le plus philosophe d'entre eux selon Herschel, qui fait aboutir cette restructuration de l'algèbre à laquelle ils ont tous deux travaillé avec Babbage dans les années 1820. Il vise à la constituer comme science déductive tout en prenant soin de ne pas rompre avec ses démarches inventives. D'abord dans un *Treatise on Algebra* en 1830, destiné aux étudiants, puis dans un « Report on the recent progress and actual state of certain branches of Analysis » en 1833, destiné à

(11) Lacroix, S.F., 1816, *An Elementary Treatise on the Differential and integral Calculus*, translated from the french, with an Appendix and Notes. Deighton and sons, Cambridge. Law & Whittaker, London. Traduction Babbage, Ch., Herschel, J.F.W., Peacock, G. p. 486.
(12) Ibid., p. 620.

ses condisciples, il présente l'Algèbre Symbolique comme le « langage du raisonnement symbolique », sans en donner pourtant une présentation axiomatique ou *a priori*. Du point de vue de l'abstraction, elle intervient comme troisième et dernière étape d'un processus dont l'Arithmétique constitue la première et l'Algèbre Arithmétique la deuxième, et qui toutes deux s'enracinent dans l'expérience. Cette méthodologie respecte scrupuleusement l'étape heuristique et l'étape généralisatrice du processus de symbolisation, dont Peacock va devoir expliciter les relations.

En l'absence d'une présentation axiomatique de l'Algèbre Symbolique, l'Algèbre Arithmétique est conçue comme « science de suggestion ». Il s'agit d'une « littéralisation » de l'Arithmétique, en ce sens que les nombres y sont remplacés par des symboles, « absolument généraux dans leur forme », mais « spécifiques dans leur valeur »(13) [Peacock, 1833, 200]. En conséquence, ces symboles doivent respecter les limitations de sens ou de valeur qui sont celles de l'Arithmétique. Ainsi, l'écriture $a - b$ n'a-t-elle de sens que si $a \geq b$.

L'Algèbre Symbolique, « langage du raisonnement symbolique » donc, marque un renversement radical de point de vue, puisqu'elle est destinée à faire sauter les verrous d'ordre conceptuel qui limitent les possibilités de l'Algèbre Arithmétique. Sa nécessité logique impose l'abandon du sens des symboles et une attention exclusive portée aux opérations. C'est pourquoi elle est définie comme un système de combinaisons de symboles arbitraires, généraux cette fois « dans leur forme comme dans leur valeur » [Peacock, 1833, 194, 208].

Peacock conçoit cependant tout à fait clairement la nécessité logique et épistémologique de justifier le saut conceptuel qui sépare alors la pratique arithmétique d'une théorie générale de l'algèbre. Mais, dans la mesure où il refuse tout autant de s'appuyer sur une procédure constructive que sur une approche axiomatique, seul un présupposé philosophique implicite lui permet de légitimer le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes, par lequel il s'autorise à transférer à l'algèbre symbolique, toutes les formes générales obtenues en algèbre arithmétique. Proposer ce double énoncé revient à présupposer de fait l'existence de cette même science comme justification des résultats de l'activité mathématique :

« (A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent. »

« (B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme. »(14)

(13) Peacock, 1833, « A Report on the recent progress and actual state of certain branches of Analysis », *Proceedings of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science*, Cambridge, p. 200.
(14) Peacock, 1833, ibid., p. 194.

Toute l'ambiguïté épistémologique du travail de Peacock réside dans ce doublé énoncé. Il exprime sa double volonté d'intégrer toute connaissance mathématique issue de l'expérience, et de maintenir sa subordination à l'existence de lois symboliques universelles. L'énoncé (B) exprime le fait que l'universalité de la connaissance acquise réside dans la généralité des formes obtenues : les symboles sont généraux aussi bien dans leur forme que dans leur valeur. Il témoigne de la foi de Peacock dans le symbolisme algébrique : la généralité de la forme une fois établie, elle s'impose comme généralité quant à la valeur des symboles utilisés. Auparavant, l'énoncé (A) suppose de fait la préexistence logique de l'Algèbre Symbolique : c'est parce que les possibilités opératoires sont préexistantes qu'elles pourront être découvertes dans une pratique qui est ici celle de l'algèbre arithmétique. La finalité de ce double principe, qui réside dans une volonté de voir l'Algèbre Symbolique légitimer toutes les analogies inventives sur lesquelles travaille alors l'analyse algébrique, sous-tend de fait l'idée d'une finalité préétablie, toute forme générale étant alors le signe, c'est-à-dire l'indice, d'une structure préexistante.

C'est l'existence de l'Algèbre Symbolique qui permet de légitimer les résultats des opérations symboliques en lieu et place de toute analogie avec des calculs numériques :

« Les opérations et les formes qui en résultent en Arithmétique et en Géométrie, exprimées par des symboles, sont porteuses d'une stricte analogie avec les opérations de même nom, et avec les formes qui en résultent semblablement en Algèbre, quand les symboles sont parfaitement généraux : mais c'est par la loi de permanence des formes équivalentes, et non par analogie, que nous sommes capables de passer de l'une à l'autre : c'est seulement dans la mesure, par conséquent, où l'analogie peut être considérée comme une expression modifiée de cette loi, que nous pouvons légitimement généraliser les conclusions que nous avons obtenues grâce à elle. »(15)

L'Algèbre Symbolique exprime de fait la primauté ontologique et l'indépendance de la rationalité des opérations vis-à-vis des objets sur lesquels elle s'exerce. Partant, si le caractère arbitraire du signe est affirmé haut et fort, il ne concerne précisément que ces objets. La signification des opérations elles-mêmes n'est pas totalement arbitraire. Elle ne concerne que l'ensemble des pratiques arithmétiques, définies cette fois par des lois symboliques d'opération :

*« Les opérations appelées addition et soustraction sont désignées par les signes + et –. Elles sont inverses l'une de l'autre.*

*Dans la concurrence des signes + et –, quelle que soit la manière dont ils sont utilisés, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou – et –, ils sont remplacés par le signe + ; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et –, ou – et +, ils sont remplacés par le seul signe –.*

*Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent.*

*Les opérations appelées multiplication et division sont désignées par les signes × et /, ou plus fréquemment par une position conventionnelle des quantités ou des*

(15) Peacock, 1830, *A Treatise on Algebra*, Cambridge, p. 108.

*symboles les uns par rapport aux autres.*

*Les opérations de multiplication et de division sont inverses l'une de l'autre.*

*Dans la concurrence des signes + et − dans la multiplication ou la division, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou − et −, ils sont remplacés par le seul signe + ; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et −, ou − et +, ils sont remplacés par le seul signe −.*

*Quand différentes opérations se succèdent, l'ordre dans lequel elles sont effectuées n'est pas indifférent.* »[16]

Cette construction des formes générales à partir du langage et du symbolisme algébrique, tout comme l'importance accordée aux opérations conçues comme combinaisons de symboles, relèvent d'une épistémologie historico-génétique très directement marquée par la conception du langage et de l'abstraction présente dans la philosophie de J. Locke relative à l'élaboration du langage[17]. L'identification des formes générales, dont la généralité est l'expression même de l'universalité, se substitue, comme chez Locke, à la capacité innée à saisir les universaux. Mais, comme chez Locke également, lorsqu'il est question de savoir quel est le rôle de ce langage construit dans l'expérience, le principe de permanence fait apparaître comme sous-jacente l'idée d'une finalité d'un monde conçu comme création achevée une fois pour toutes. Cette finalité permet à Peacock d'éviter la rupture épistémologique qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur potentiel d'un langage formel.

Dans ces conditions, l'Algèbre Symbolique n'assume son statut de science des vérités nécessaires qu'en renonçant à la signification des opérations telle qu'elle se donne dans le langage naturel. La question de la divergence des séries, par exemple, qui concerne la valeur numérique des formes algébriques, relève pour Peacock du domaine de l'interprétation des symboles, qui ne peut être que postérieur ou subordonné à la logique de l'opératoire :

*« C'est cette confusion entre vérité nécessaire et contingente qui a occasionné la plupart des difficultés attachées aux théories de l'interprétation des signes algébriques. On a supposé que la signification pouvait être transmise par une succession d'opérations seulement symboliques, et qu'il existerait en conclusion une connexion également nécessaire entre la définition primitive et l'interprétation finale, comme entre le résultat symbolique final et les lois qui le gouvernent. Tant que les définitions de la signification des symboles, et des opérations auxquelles on veut les soumettre, suffisent à déduire les résultats, ces résultats auront une interprétation nécessaire qui dépendra de la considération globale de toutes ces conditions ; mais à chaque fois qu'on doit effectuer une opération dans des circonstances qui ne lui permettent pas d'être strictement définie ou interprétée, la chaîne des connexions est rompue, et l'interprétation du résultat ne pourra plus être suivie à travers ses étapes successives. Ceci doit avoir lieu à chaque fois que sont introduites des quantités*

(16) Peacock, 1833, ibid., p. 196-197.

(17) Durand, M.J., 1990, « Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke », *Revue d'Histoire des Sciences*, 43, nº 2-3, 129-180.

*négatives ou autrement affectées, et que des opérations, sur ou avec ces quantités, doivent être effectuées, même si ces quantités et ces signes peuvent disparaître du résultat final. »*[18]

Les formes générales n'ont ainsi de signification qu'en tant qu'écritures symboliques organisées par les lois d'opération. Ce qui marque une rupture épistémologique dans le travail de Peacock, ce qui fait événement, et événement sémantique, c'est bien cette séparation radicale qu'il introduit entre logique opératoire et signification des calculs. L'abandon de l'exigence de la signification des calculs pour légitimer les lois opératoires constitue précisément le prix à payer dans l'affirmation de leur caractère non pas mécanique, mais universel. Faute d'examiner plus avant la dialectique des relations entre le contingent et le nécessaire, qui caractérise le caractère constructif de la connaissance, Peacock bute cependant sur une conception somme toute réaliste des opérations, qui reste, comme pour Locke avant lui et pour Boole un peu plus tard, celles de l'esprit. Toute expérience reste ainsi subordonnée à leur nécessité : si elle est valorisée, elle ne fonctionne que comme indicateur de régularités naturelles, mais reste incapable à elle seule d'expliquer la nécessité des choses dont elle témoigne.

## IV. Babbage et la machine analytique

Le travail de Babbage porte sur la machine analytique, dont l'organisation logique est celle de l'architecture Von Neumann d'un ordinateur moderne.

Dès ses premiers travaux sur les machines à calculer en 1822, Babbage conjugue l'idée de division du travail, qu'il applique à la décomposition des opérations, tant mécaniques que mentales, et celle de séparation des symboles d'opération de ceux de quantité, que la structure de ses machines va concrétiser. Il réalise d'abord une machine aux différences, qu'il conçoit pour débarrasser les tables astronomiques des nombreuses erreurs dont elles sont alors entachées.

Le calcul des tables est fondé sur la méthode des différences finies. Celle-ci s'appuie sur le fait que les différences secondes des nombres naturels sont nulles :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0

que les différences troisièmes des nombres carrés sont nulles :

0 1 4 9 16 25 36 49 64

1 3 5 7 9 11 13 15

2 2 2 2 2 2 2

0 0 0 0 0 0

et que les différences $(n + 1)$-ième des valeurs successives d'un polynôme de degré $n$ sont nulles, les différences $n$-ièmes restant constantes. Plus généralement, pour toute fonction développable en série de Taylor, il existe un intervalle sur lequel une

(18) Peacock, 1833, ibid., p. 230.

telle propriété est vraie, à une approximation près bien sûr, mais quelle que soit cette approximation[19]. Cette méthode permet donc, inversement, d'obtenir les valeurs successives d'une fonction par des suites d'additions, une fois connues la valeur de la dernière différence non nulle, ainsi que les premières valeurs des différents ordres de différence et le développement en série qu'on se propose d'utiliser. L'équation aux différences $\Delta^4 u_n = 0$ donne par exemple une approximation des fonctions logarithmes, satisfaisante pour les 10 premiers chiffres[20].

Dans la machine aux différences, chaque ordre de différence, ainsi que la fonction elle-même, se trouve matérialisé par une colonne de roues dentées dont chacune porte un chiffre. Chaque colonne peut donc recevoir un nombre qui correspond à la valeur de son ordre. Le mécanisme, actionné par une manivelle située horizontalement sur le dessus de la machine, assure le transfert, c'est-à-dire l'addition des valeurs d'une colonne sur l'autre. Cette machine est ainsi capable de fournir, à partir d'une suite de valeurs de la variable, une suite de valeurs pour une fonction dont la forme n'est pas nécessairement connue. Un tel court-circuit dans la connaissance d'une loi générale renforce de fait la référence de principe à la loi : comme dans l'analyse des analogies opératoires entre signes, un tel phénomène est interprété par ses contemporains comme l'existence d'une loi préalable encore inconnue, que le calcul mécanique permet justement de matérialiser. La légalité mécanique supplée provisoirement à la légalité analytique pour conférer aux tables ainsi obtenues l'honorabilité mathématique[21]. Du coup, Babbage considère que cette machine aux différences peut effectuer toute espèce de calcul, ce qu'il faut entendre comme toute espèce de calcul arithmétique. De fait, la machine aux différences peut traiter toute fonction récursive primitive, dont on peut établir la calculabilité par machine.

C'est la réflexion sur le type d'équations résolues par la machine aux différences qui va conduire Babbage à en modifier progressivement les plans, jusqu'à concevoir une séparation plus radicale encore des fonctions opératoires. La résolution d'équations telles que $\Delta^2 u_z = a \cdot u_{z+1}$ nécessite, si on veut éviter toute intervention humaine, une liaison entre la colonne de la fonction et la colonne de la dernière différence. Pour ce faire, Babbage envisage une structure circulaire, qui permet de faire intervenir le résultat obtenu sur les nouveaux calculs de la machine, donc de mettre en œuvre ce principe de rétroaction qui deviendra tellement essentiel dans l'automatisation et la pensée cybernétique. C'est d'autre part la réflexion sur le stockage des retenues qui conduit Babbage à penser en termes de mémoire, et à séparer cette mémoire du mécanisme arithmétique, unique et central, accomplissant directement l'une quelconque des quatre opérations, dans un ordre indiqué par un organe de commande.

(19) Weierstrass démontrera en 1865 que cette propriété est vraie pour toute fonction continue.
(20) Lacroix, S.F., *Traité de Calcul différentiel et du calcul intégral, Partie III : Des différences et des Séries*, Paris, 2ème éd., 1810-1819, p. 13.
(21) Mosconi, J., « Charles Babbage : vers une théorie du calcul mécanique », Revue d'Histoire des Sciences, XXXV, nº 1, 1983, 69-107.

L’essentiel de la machine analytique réside, non pas dans sa réalisation, puisque seulement une partie de l’unité de calcul a été assemblée, mais dans la nouveauté de ses conceptions. Les plans de Babbage donnent à voir une séparation des plus poussées entre les différentes fonctions opératoires, chacune étant matérialisée par une partie spécifique de la machine, à laquelle Babbage attribue des noms directement empruntés au vocabulaire des manufactures. La machine analytique correspond de fait à un « calculateur contrôlé par programme », machine immédiatement antérieure à l’ordinateur, qui est un « calculateur à programme interne »(22). Le Magasin (« the Store ») correspond à la mémoire d’une calculatrice universelle, le Moulin (« the Mill ») à son processeur, et les deux types de crémaillère (« the Rack »). qui assurent le transfert des nombres entre le Magasin et le Moulin préfigurent les canaux d’entrée et de sortie. Les cartes perforées permettent l’exploitation d’un programme externe qui correspond au « software », tandis que les cylindres à picots qui assurent le contrôle des opérations peuvent être assimilés à des sous-ensembles « micro-codés » de programme interne. La machine analytique permet d’effectuer un traitement algorithmique des opérations. Et si la programmation ne pouvait aller très loin en l’absence d’une machine effectivement construite, Lady Ada Lovelace, qui assiste Babbage dans certains travaux, détaille plusieurs exemples de programmes et Babbage envisage les opérations de contrôle indispensables au bon fonctionnement de sa machine quant à la validité de ces programmes.

Pour ses contemporains, la machine analytique représente la matérialisation même de l’analyse mathématique, d’où elle tire son nom. Et les commentaires de Menabrea et de Lady Lovelace témoignent de l’impact qu'elle eût auprès des contemporains les plus éclairés de Babbage. Tous deux la reconnaissent comme une machine universelle, puisqu’elle peut calculer les valeurs de n’importe quelle fonction, alors que la machine aux différences n’était qu’une machine particulière traitant d’une suite spécifique d’opérations(23). Menabrea précise la nature des calculs effectués et le rôle d’exécutant de la machine :

*« (La machine analytique) est fondée sur deux principes : le premier, qui consiste en ce que tout calcul arithmétique dépend en définitive de quatre opérations principales, l’addition, la soustraction, la multiplication et la division ; le second en ce que tout calcul analytique peut se réduire à calculer les coefficients des différents termes d’une série. Si ce dernier principe est vrai, toutes les opérations de l’analyse sont du domaine de la machine.*

*L’objet essentiel de la machine étant de calculer, d’après les lois qui lui sont dictées, la valeur de coefficients numériques qu’elle doit ensuite distribuer convenablement sur les colonnes qui représentent les variables, il s’ensuit que l’interprétation des formules et des résultats est en dehors de ses attributions, à moins toutefois que cette interprétation ne soit elle-même susceptible d’être exprimée*

(22) Ligonnière, *Préhistoire et histoire des ordinateurs*, Paris, Laffont, 1987, p. 74-110.
(23) Tout comme Babbage dans son autobiographie. Babbage, C., 1864, p. 117, Works, 11, p. 89.

*par le moyen des symboles dont elle fait usage. Ainsi elle n'est point elle-même l'être qui pense, mais on peut la considérer comme l'être qui exécute les conceptions de l'intelligence. »*(24)

Lady Lovelace, pour qui la machine analytique est particulièrement adaptée aux méthodes d'Arbogast, insiste bien davantage sur le caractère symbolique des opérations ainsi effectuées, et sur la séparation entre les symboles d'opération et ceux qui marquent les résultats.

*« De nombreuses personnes qui ne connaissent pas les études mathématiques imaginent que, puisque la tâche de la machine est de donner ses résultats en notation numérique, la nature de ses procédures doit donc être arithmétique et numérique, plutôt qu'algébrique et analytique. C'est une erreur. La machine peut organiser et combiner les quantités numériques exactement comme si c'étaient des lettres ou n'importe quels autres symboles généraux, et elle pourrait en fait donner ses résultats en notation algébrique, si on prenait des dispositions en conséquence. Elle pourrait développer trois ensembles de résultats simultanément, c'est-à-dire des résultats symboliques, des résultats numériques, et des résultats algébriques en notation littérale. »*(25)

Ressaisir les travaux de Babbage sur la machine analytique dans le cadre des réflexions collectives de ce groupe d'algébristes anglais sur le symbolisme est donc essentiel pour préciser ce qui constitue, au-delà des réalisations techniques, l'importante avancée conceptuelle que représente la séparation du caractère opératoire de l'algèbre et de la signification des résultats. L'absence revendiquée de signification du calcul prendra un relief encore plus conséquent au XXe siècle avec le développement des ordinateurs. Et si elle est implicitement fondée ici sur les opérations de l'esprit, elle mérite d'être constamment interrogée dès lors que disparaît cette référence.

## V. Gregory et le calcul des opérations

Gregory, dont Peacock a été le tuteur au Trinity College de Cambridge, s'engage plus radicalement que son maître du côté d'un calcul sur les opérations. Il franchit une étape supplémentaire en renonçant à n'expliciter qu'une seule algèbre symbolique universelle. Dès 1839, mais surtout en 1840, dans un grand article intitulé « On the real nature of Symbolical Algebra », il isole des classes d'opérations soumises aux mêmes lois et affirme que, pour les opérations d'une même classe :

*« Puisque ces opérations sont toutes soumises aux mêmes lois de combinaison, tout ce qui est prouvé au moyen de ces seules lois, est nécessairement également vrai de toutes les opérations. »*(26)

(24) Menabrea, L.F., (in) Babbage, *Works*, 3, p. 80-81.
(25) Lovelace, A.A., 1843, « Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage, Esq. By L. F. Menabrea, of Turin, officer of the Military Engineers, with notes upon the memoir by the translator », (in) Babbage, 1989, *Works*, 3, 89-170, p. 144.
(26) Gregory, Duncan F., 1839, « On the solution of linear dîfferential equations with constant coefficients », *Cambridge Mathematical Journal*, 1, 25-36, *Mathematical Writings*,

Ce que j'appellerai « le théorème de Gregory ». Se référant explicitement à Peacock, ainsi qu'à Arbogast et Servois, Gregory s'intéresse tout particulièrement à l'application de ce théorème à l'opérateur différentiel et à l'opérateur de différence finie, investissant ses méthodes symboliques dans la résolution d'équations du même type. Le théorème de Lagrange devient sous sa plume la « forme symbolique du théorème de Taylor ». Il met en évidence le fait que les opérations $\frac{d}{du}$, Δ et D sont soumises toutes trois aux mêmes lois suivantes :

Loi commutative : $ab = ba,$
Loi distributive : $c\,(a + b) = ca + cb,$
Loi des indices : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

et qu'il peut donc leur appliquer son propre théorème, calquant ainsi une méthode symbolique de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants sur la méthode de résolution des équations algébriques. Par exemple, dans l'équation linéaire générale à coefficients constants :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{A}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{R}\frac{dy}{dx} + \mathrm{S}y = \mathrm{X},$$

Gregory sépare le symbole « $y$ » du symbole « $\frac{d^r}{dx^r}$ ». Il écrit alors l'équation sous la forme : $f\left(\frac{d}{dx}\right)y = \mathrm{X}$, et affirme que trouver une solution consiste à **pouvoir** écrire $y$ sous la forme $y = \left[f\left(\frac{d}{dx}\right)\right]^{-1}\mathrm{X}$.

$y$ sera donné explicitement si on peut effectuer l'opération inverse de $f\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Pour ce faire, Gregory établit, toujours formellement, le théorème général :

$$\left(\frac{d}{dx} \pm a\right)^n \mathrm{X} = \mathrm{e}^{\mp ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{e}^{\pm ax}\,\mathrm{X}.$$

Et, en traitant $f\left(\frac{d}{dx}\right)$ exactement comme une fonction de $x$ de la même forme, implicitement supposée polynomiale, Gregory la remplace dans l'équation sous sa forme factorisée :

Cambridge, 1865, 14-27. Et 1840, « On the Real Nature of Symbolical Algebra », *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14, 208-216.

$$\left(\frac{d}{dx}-a_1\right)\left(\frac{d}{dx}-a_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-a_n\right)y=\mathrm{X}$$

où $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ sont les racines de $f(z) = 0$.

Appliqué à $\left(\frac{d}{dx}-a\right)$ le théorème général précédemment établi permet d'écrire cette équation sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dx}-a_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-a_n\right)y=\left(\frac{d}{dx}-a_1\right)^{-1}\mathrm{X}=e^{a_1x}\int \mathrm{e}^{-a_1x}\mathrm{X}dx.$$

D'où, par réitération de la méthode

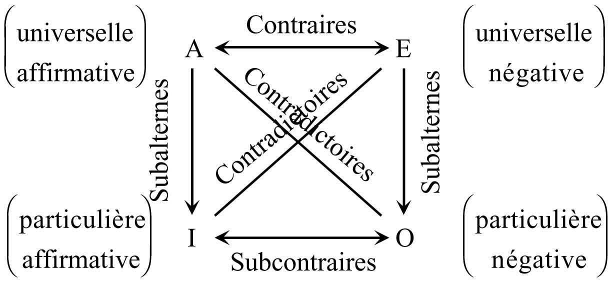
$$y=\frac{e^{a_1x}\int \mathrm{e}^{-a_1x}\mathrm{X}dx}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+\ldots+\frac{e^{a_nx}\int \mathrm{e}^{-a_nx}\mathrm{X}dx}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Gregory conçoit alors la résolution des équations aux différences finies, aux différences mixtes, et des équations différentielles partielles linéaires à partir de la même méthode de séparation des symboles, qu'il réfère systématiquement à Herschel qui l'utilisait dès 1816 pour la résolution des équations différentielles – c'est-à-dire, comme le remarque Gregory, cinq ans avant Cauchy, se référant à Brisson. Cette méthode est systématiquement utilisée. Gregory radicalise le point de vue de Peacock jusqu'à concevoir les quantités elles-mêmes comme des opérations sur l'unité, et ces méthodes seront systématiquement utilisées par tous les auteurs de ce mouvement, dont Boole dès 1841 et Cayley dès 1843.

## VI. Boole et la symbolisation algébrique de la logique

Dans la première moitié du XIX$^{e}$ siècle en Grande-Bretagne, les débats qui ont lieu à propos de la situation des mathématiques à Cambridge ont également lieu à propos de la situation de la logique à Oxford. Ce sont eux qui vont nourrir la réflexion de Boole sur ce thème, ainsi que ses premiers travaux sur le calcul des opérations, publiés dans le même *Cambridge Mathematical Journal* que ceux de Gregory, co-fondateur de ce premier journal consacré aux mathématiques dans ce pays

Depuis les travaux d'Aristote (IV$^{e}$ s. avt notre ère) et de la scolastique médiévale, la logique est restée attachée à l'analyse de la langue naturelle. La proposition, décomposée en sujet, copule et prédicat, en constitue l'élément de base, sous les quatre formes du « carré logique » : universelle affirmative (A), universelle négative (E), particulière affirmative (I), particulière négative (O) :




Boole se réfère directement à l'Algèbre Symbolique, celle de Gregory, dès les premières pages de *Mathematical Analysis of Logic* (1847), alors qu'il insiste sur la distinction entre les lois de combinaisons et leur interprétation. Lui aussi imprégné par la philosophie de Locke, il fonde la logique, aussi bien en 1847 que dans *An Investigation on the Laws of Thought* en 1854, sur l'acte mental de sélection dans l'univers des objets, un acte mental qui n'est pas considéré du point de vue de sa nature, mais dans sa réalisation elle-même, muni des lois de combinaison et de succession. Le symbole électif $x$ représente l'opération mentale grâce à laquelle les éléments sont choisis, avant d'être identifié à cette classe elle-même. Boole peut ici s'appuyer sur la notion d'univers du discours que de Morgan vient de dégager. La référence, implicite chez Peacock, aux opérations de l'esprit, devient explicite et centrale dans le travail de Boole. Le but de la logique est pour lui de :

« Déduire les lois des symboles logiques à partir de l'examen des opérations de l'esprit qui interviennent dans l'usage strict du langage comme instrument de raisonnement.

Le rôle d'un nom ou d'un terme descriptif quelconque, employé dans des limites données, est de susciter dans l'esprit la conception, non pas de tous les êtres ou objets auxquels ce nom ou cette description est applicable, mais seulement de ceux qui existent dans l'univers du discours donné…

De même que le mot homme nous conduit à sélectionner mentalement, dans cet univers, tous les êtres auxquels le terme « homme » peut s'appliquer, de même l'adjectif « bon » dans la combinaison « homme bon » nous conduit, en outre, à sélectionner mentalement, dans la classe des hommes, tous ceux qui possèdent la qualité supplémentaire d'être « bon » ; et si l'on ajoutait un autre adjectif à la combinaison « homme bons », cela nous conduirait à effectuer une nouvelle opération de même nature, correspondant à cette propriété supplémentaire que l'on aurait choisi d'exprimer. »[27]

C'est en s'appuyant sur le théorème de Gregory que Boole va pouvoir systématiquement s'appuyer sur les analogies d'écriture entre le calcul algébrique et ce qu'il établit pour la première fois comme le calcul logique, produisant ainsi une écriture algébrique des lois de la logique. La conjonction « et » est ainsi traduite par l'opération de multiplication :

(27) Boole, George, 1992. *Les lois de la pensée*, traduit de l'anglais par Souleymane Bachir Diagne. Paris, Vrin, p. 58-59.

*« Ainsi, si x seul remplace “ choses blanches ” et y “ moutons ”, posons que xy représente “ moutons blancs ”…*

*Il est évident que l’ordre dans lequel les symboles sont écrits est indifférent*

$$xy = yx \qquad (1)$$

*… La loi exprimée par (1) sera mieux caractérisée si l’on souligne que les symboles littéraux x, y, z sont commutatifs comme les symboles algébriques. En disant cela, on n’affirme pas que l’opération de multiplication en algèbre, dont la loi fondamentale est exprimée par l’équation xy = yx présente en elle-même une analogie avec l’opération de composition logique, représentée plus haut par xy : mais seulement que si les opérations arithmétique et logique sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle. »*[28]

Boole écrit de même comme une addition algébrique la réunion « ou », à savoir :

$x + y = y + x$,

$z(x + y) = zx + zy$,

| | | |
|---|---|---|
| $x = y + z$ | équivaut à | $x - z = y$, |
| $x = y$ | permet d’écrire | $x + z = y + z$, |
| | | $x - z = y - z$. |

Mais

$zx = zy$ ne permet pas d’écrire $x = y$.

Grâce à ces écritures, l’étude des syllogismes de la logique scolastique se réduit à un travail d’élimination d’une inconnue entre deux équations. Et Boole peut à juste titre prétendre étendre cette nouvelle méthode à un nombre plus grand d’équations. L’étude booléenne de la logique correspond à notre calcul des classes et des propositions, dont il établit d’ailleurs l’équivalence.

Le travail de Boole, qui comporte une application à l’étude des probabilités, et une discussion sur la place des mathématiques et de la logique dans le champ du savoir, s’inscrit directement dans les débats contemporains sur ces thèmes, et participe d’une volonté de réflexion sur le statut de la connaissance certaine et de la connaissance probable.

## Conclusion

Ainsi, les premières réflexions sur une définition strictement opératoire du calcul, indépendante de toute signification qui puisse être attribuée à ses termes, sont-elles fondées, dans les travaux de l’École Algébrique Anglaise, sur une confiance totale dans la généralité de l’écriture, qui s’articule sur la philosophie lockéenne du langage pour enraciner la légitimité symbolique de l’opératoire sur les opérations de l’esprit.

Cette problématique est cependant porteuse de ses propres limites, dans la mesure où elle refuse du même coup toute référence au caractère local ou numérique pour valider la légitimité d’un calcul, qui se trouve rejeté comme contraire à l’universalité de la science. C’est ce caractère local que développe Cauchy pendant la même

(28) Boole, Ibid., p. 46-49.

période en s'attachant davantage aux conditions de légitimité des notions de l'analyse, comme celles de limite ou de continuité[29]. C'est lui également que saura ressaisir Gottlob Frege (1848-1925) vingt ans plus tard en logique lorsqu'il élaborera son *Idéographie* : c'est en construisant les classes d'objets à partir de leurs éléments qu'il pourra introduire en logique les quantificateurs et le calcul des prédicats[30]. C'est le même caractère local qui sera retenu dans la résolution des équations différentielles par Émile Picard (1856-1941) à la fin du siècle, étendant aux équations différentielles linéaires la théorie de Galois des équations algébriques en isolant leur groupe de substitutions[31].

Le calcul symbolique, outre la coupure radicale qu'il affirme haut et fort entre calcul et signification, et qui va prendre une importance si considérable au XXe siècle avec le développement des ordinateurs, va alimenter tout un courant de recherche sur le calcul opérationnel et sur le calcul fonctionnel, comme en témoigne le grand article de S. Pincherle dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* de Molk[32] de 1905. Il nourrira également toute une étude des structures algébriques, notamment celles de groupe et de corps, amorçant une mutation de l'algèbre qui attendra le XXe siècle pour devenir totalement effective.

(29) Cauchy, A.L., 1821, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, première partie : Analyse Algébrique, Paris. Œuvres (11, 3), 1-331.

(30) Frege, G., 1879, *Begriffsschrift : eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, (Écriture des concepts, une langue formulaire de la pensée pure, imitée de l'arithmétique) : 1999, *Idéographie*, Paris, Vrin. Traduction, préface, notes et index par C. Besson. Postface de J. Barnes.

(31) Picard, Émile, 1928, *Traité d'analyse*, t. III, Paris, Gauthier-Villars.

(32) Molk, Jules, (dir.), 1905, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier- Villars.