Des mathématiques au cœur des sciences(*)

Jean Pierre Bourguignon(**)

L'objet de cet exposé est de présenter trois exemples d'objets mathématiques dont la naissance et le développement ont été motivés, ou grandement amplifiés, par leur usage dans d'autres sciences. Ils sont de natures très différentes mais, à mon avis, ils permettent d'illustrer des aspects complémentaires des interactions des mathématiques avec les autres sciences. Mieux comprendre ces imbrications est à mes yeux important, et encore plus aujourd'hui où la multiplication des situations qu'il est possible de mieux comprendre grâce à l'intervention d'outils mathématiques dans de nombreux domaines de la connaissance force les mathématiciens à accorder plus d'attention à ces interfaces.

Le premier exemple a trait à l'introduction par Isaac Newton du *calcul infinitésimal*, et de la *loi fondamentale de la dynamique*, en particulier du concept d'accélération. Il peut apparaître assez banal mais j'essaierai d'expliquer en quoi cette œuvre mérite toujours l'attention, et donc pourquoi consulter l'ouvrage initial d'Isaac Newton doit être toujours à mon avis vivement encouragé.

Le deuxième est centré autour de la notion de « *spineur* » et trouve son origine dans la physique quantique. Ces objets ont vite acquis un rôle central dans la physique moderne alors que les mathématiciens ont mis plus de temps à se les approprier. Leur introduction remonte au premier quart du XX^{e} siècle même si des prémices peuvent être trouvés au milieu du XIX^{e}. Leur véritable conquête par les mathématiciens n'a eu lieu que vers la fin du XX^{e} siècle.

Le troisième enfin a trait aux *chaînes* introduites par Markov au début du XX^{e} siècle (et qui maintenant portent son nom) pour traiter des questions de battage de cartes, mais cette notion a trouvé aujourd'hui un nouveau terrain d'utilisation en génomique, un des domaines de développement récent qui est un véritable laboratoire pour l'analyse de données massives.

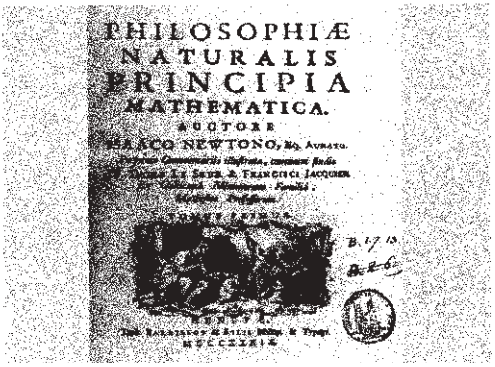
En fait cet exposé est aussi un prétexte pour inciter le lecteur à :
- rechercher l'inspiration dans des textes d'importance historique,
- examiner comment le savoir théorique s'organise et se développe dans d'autres

(*) Je remercie l'APMEP de m'avoir invité à présenter cet exposé devant le public nombreux et attentif de ses Journées Nationales de Lille en octobre 2001 et en particulier à Pierre Stéphan pour sa patience et son aide pour que ce texte voie le jour. Des remerciements particuliers vont à Élisabeth Jasserand qui a saisi la bande son de cette conférence, ce qui a constitué une aide précieuse pour préparer la version écrite. La préparation PowerPoint qui a été utilisée pendant l'exposé oral est disponible sur le serveur de l'APMEP sous le titre jpb.lille.2001.
(**) CNRS-Institut des Hautes Études Scientifiques et École polytechnique.

sciences, en particulier dans leur interaction avec les mathématiques,
- et envisager les conséquences que ces interactions ont sur les mathématiques elles-mêmes.

Les Principia d'Isaac Newton

La première édition des fameux *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Les Principes mathématiques de la philosophie naturelle*) d'Isaac Newton date de 1687 et a été produite à une centaine d'exemplaires.



Dans une préface étendue d'une réédition récente, le physicien britannique Steven Hawking écrit : « Les Principia d'Isaac Newton constituent sans doute l'œuvre la plus importante jamais publiée dans le domaine des sciences physiques… Newton écrivit cet ouvrage sous l'impulsion d'Edmond Halley, qui se demandait si les orbites elliptiques des planètes pouvaient s'expliquer à partir de l'hypothèse d'une force centripète, inversement proportionnelle au carré de leur distance par rapport au Soleil. Cette question, Newton l'avait résolue quelques années auparavant, mais il n'avait publié aucun de ses résultats… Toutefois, le défi lancé par Halley, ainsi que le désir de réfuter les hypothèses avancées par d'autres savants tels que Hooke et Descartes, incitèrent Newton à entreprendre la rédaction d'un compte rendu élaboré de ses résultats. Pour ce faire, il lui fallait d'abord développer une théorie de la mécanique et les techniques mathématiques nécessaires pour soutenir cette théorie ».

Cette œuvre contient trois contributions majeures au développement des sciences : la première est le premier usage effectif et incontournable du calcul infinitésimal ; la deuxième est l'énoncé de la loi fondamentale de la dynamique, qui forme le pilier de la mécanique moderne ; la troisième est l'introduction de la loi d'interaction gravitationnelle qui a permis de donner un fondement solide à toute la Mécanique Céleste. Il contient également une illustration spectaculaire du calcul vectoriel, une technique qui est devenu un des piliers des mathématiques depuis cette époque.

Une nouvelle mécanique fondée sur une nouvelle mathématique

L'architecture même de ce livre est souvent occultée, et elle est pourtant très intéressante tant du point de vue épistémologique que du point de vue des ambitions de Newton. Ce livre est en effet construit sur le modèle des *Éléments* d'Euclide : il contient des définitions, des axiomes, des théorèmes et finalement des applications.

Citons quelques exemples : la définition 3, portant sur la force d'inertie, contient une affirmation extrêmement importante, parce qu'en rupture avec les affirmations acceptées antérieurement (elle incorpore le *principe de relativité* de Galilée) ; la définition 4 contient la notion fondamentale de l'édifice newtonien, celle de *force*, et est ainsi formulée : « *La force appliquée est l'action qui s'exerce sur un corps pour en changer l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme* ».

Il est temps de passer à la loi 1 : « *Tout corps demeure à l'état de repos ou poursuit un mouvement rectiligne uniforme à moins d'être soumis à une force extérieure* ». Steven Hawking la reformule ainsi : « *Au vieux principe aristotélicien selon lequel l'état naturel d'un corps est le repos, Newton substitua sa première loi qui lie la notion de force introduite par Newton dans ses définitions avec la cinématique qui va faire appel à de nouvelles mathématiques* ».

C'est la loi 2 qui est la plus exigeante sur le plan mathématique car elle fait appel au taux de variation de la vitesse, à savoir l'accélération, une notion finalement assez subtile. La loi 2 s'énonce ainsi: « *L'accélération, ou taux de variation de la vitesse, est proportionnelle à cette force* ». Pour la définir, on a absolument besoin du calcul infinitésimal, car on doit disposer de la vitesse instantanée, et même encore mieux que ça, du taux de variation instantané de la vitesse instantanée. De quoi s'agit-il ? Sur une trajectoire, on considère les déplacements du point courant qu'on voit comme des vecteurs que l'on peut diviser par des temps de plus en plus petits pour finalement donner naissance à la vitesse instantanée. En un autre point, on a une autre vitesse instantanée. Pour considérer le taux de variation de la vitesse, il faut prendre garde à la subtilité suivante, sur laquelle il convient de méditer. En effet la vitesse instantanée est attachée au point où on l'a calculée. Pour trouver l'accélération en un point, il est nécessaire de faire une opération pas si bénigne que ça consistant à ramener au point initial la vitesse instantanée des points voisins, et ensuite à regarder comment ces vecteurs vitesse varient. Implicitement on translate tous ces vecteurs au point où l'accélération est à calculer, une construction qui s'appuie fortement sur la structure linéaire de l'espace ambiant qui permet de les translater. En fait la compréhension profonde de la notion d'accélération devra attendre un siècle de plus, i.e. la fin du XVIII^e^ siècle ; elle est due à Joseph-Louis De Lagrange qui, le premier, a su exprimer l'accélération en coordonnées quelconques.

Les lois de Kepler réinventées

Newton continue en appliquant tous ses principes au mouvement des corps en général. Il énonce en particulier la *loi d'action et de réaction*, bien connue en Mécanique. Une grande partie du texte est alors consacrée à l'étude du mouvement des corps, et c'est dans ce contexte qu'il propose sa théorie de la *gravitation*. Il établit qu'une force, centripète, colinéaire au vecteur donnant la position relative des deux corps et proportionnelle au carré de leur distance provoque un mouvement satisfaisant à la loi des aires. C'est la première loi qu'on trouve chez Newton dans la section 2 de ce même livre. On peut noter qu'il désigne la source de la force par la lettre S, ce qui n'est évidemment pas anodin puisque son étude couvre le mouvement d'une planète autour du Soleil, donc d'une étoile (*stella* en latin). Pour cette loi d'attraction, les trajectoires sont d*es ellipses dont un des foyers est la source d'où émane la force*. Newton déduit donc de ses axiomes, de sa loi fondamentale de la Mécanique et de la forme qu'il propose pour l'interaction gravitationnelle, les lois sur le mouvement des planètes trouvées expérimentalement par Johannes Kepler. Le rêve de tout théoricien !

Dans le livre suivant qui traite du « *système du monde* », il étudie l'ensemble du système planétaire, et on y trouve une intéressante théorie du mouvement de la Lune.

La fréquentation des textes historiques

Pour terminer sur une note plus personnelle, je trouve qu'étudier un document qui a eu une influence aussi considérable sur l'Histoire de l'Humanité est une expérience personnelle toujours gratifiante. Pouvoir manipuler une de ses éditions anciennes ajoute le petit frisson que procure la contemplation d'un objet rare. Les mathématiques comptent finalement peu de textes de cette importance et il ne faut pas se priver de ces plaisirs.

On peut aussi se poser la question de savoir si ce travail aurait été fait si Newton n'avait pas existé, et si oui par qui ? Mon opinion est que quelqu'un en aurait sûrement proposé une variante mais cela aurait pu peut-être se passer plus tard. Cette théorie a joué un rôle fondamental dans la transformation de la société de l'époque en société industrielle. Sans les lois fondamentales de la Mécanique, l'industrie n'aurait pas pu se développer comme elle l'a fait à partir du milieu du XVIIIe siècle. On peut noter que les savants français se sont longtemps montrés réfractaires à cette théorie révolutionnaire venue d'ailleurs, qui contredisait ce que Descartes avait dit sur le sujet(1)… C'est finalement une traduction de cette œuvre coordonnée par Voltaire qui lui a donné la publicité qu'elle méritait et l'a installée comme la référence d'une théorie scientifique pour plus de deux siècles.

Les spineurs : des constituants élémentaires pour les mathématiques aussi ?

Mon deuxième exemple vise à introduire la notion de « spineur », ce qui me fournit un bon prétexte pour aborder le débat philosophique récurrent concernant la nature des objets mathématiques : est-ce qu'on les découvre ou est-ce qu'on les invente ?

Élie Cartan fut la première personne qui a vraiment été confronté au concept de spineur. Je crois qu'on peut, dans ce cas, se hasarder à dire que c'est une « découverte ». Par contre, en ce qui concerne le second contributeur majeur de cette théorie, le physicien Paul-Adrien-Maurice Dirac, je pense que le mot « invention » est plus approprié, même si une certaine prudence dans cette affirmation est indispensable comme je l'évoquerai à la fin de ce paragraphe.

(1) Le chauvinisme scientifique s'est manifesté à répétition au cours de l'Histoire … et je crains qu'il n'ait pas disparu !

Alors, d'où part-on ? D'une situation bien connue, celle de $\mathbf{R}^3$, l'espace ordinaire de la géométrie euclidienne, et on s'intéresse aux rotations de cet espace. Les rotations agissent sur les vecteurs dont l'origine est l'origine de l'espace en préservant leur produit scalaire et en préservant l'orientation. Cette définition est tout à fait précise mais abstraite, et ne nous dit pas trop de combien de paramètres elles dépendent, ni comment nous pouvons les manipuler. Les deux propriétés fondamentales qui permettent de se faire une bonne représentation géométrique d'une rotation et de savoir précisément en quoi elle consiste sont les suivantes : elles possèdent toutes un axe de vecteurs invariants dans le plan perpendiculaire duquel elles tournent les vecteurs d'un certain angle θ. En particulier cela signifie que, si on choisit bien la base de $\mathbf{R}^3$ (ou si vous préférez le système de coordonnées), on peut en donner la représentation matricielle très simple suivante (dans laquelle il est patent que le troisième vecteur de base est colinéaire à l'axe, et les deux autres lui sont perpendiculaires, et sont perpendiculaires entre eux) :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

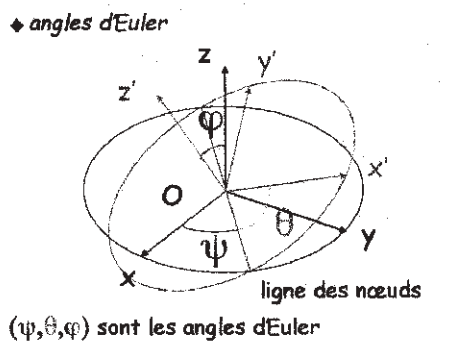
Il est utile de faire la remarque suivante (qui va nous être très utile par la suite), à savoir que les rotations se présentent spontanément comme reliées de façon naturelle à la transformation identité (qui est la rotation d'angle nul autour d'un axe qui est indéterminé). Le chemin naturel consiste à prendre toutes les rotations de même axe que la rotation considérée avec des angles variant de θ à 0, qui est l'angle de la transformation identique.

En fait, l'objet qui va nous intéresser n'est pas une rotation particulière mais l'espace formé de toutes les rotations que nous nommons Rot_3 (habituellement les mathématiciens l'appellent SO_3 où O est là pour transformation orthogonale, 3 pour donner la dimension et S pour spécial afin de rappeler qu'on préserve l'orientation). La notion de spineur à 3 dimensions va vraiment naître d'une analyse de la structure de cet espace. Comment peut-on faire pour comprendre comment est fait « globalement » Rot_3 ? En fait nous avons à notre disposition plusieurs façons différentes et, comme bien souvent, c'est de la diversité des points de vue qu'on va gagner une compréhension plus profonde.

Les angles d'Euler

La première façon de paramétrer le groupe des rotations Rot_3 a été indiquée par Euler dans la première moitié du XVIII^{e} siècle. Elle est intéressante géométriquement mais présente certains défauts. En tout cas elle a joué un rôle important en astronomie.

On part d'un trièdre OXYZ. Pour étudier une rotation il suffit de connaître comment elle transforme ce trièdre. Il s'agit donc de se donner un moyen de comparer ce trièdre OXYZ à un autre trièdre OX′Y′Z′, son image par la rotation. Il va être commode de singulariser le plan OXY et donc aussi le plan OX′Y′. Ces deux plans se coupent suivant une droite qu'on appelle souvent la « *ligne des nœuds* » (c'est un nom emprunté à l'astronomie). On fait ensuite une succession de trois rotations « élémentaires » que l'on construit géométriquement : leurs angles vont être précisément les « *angles d'Euler* », que nous construisons maintenant.



Le premier, appelé ψ, est l'angle entre l'axe OX et la ligne des nœuds. La rotation d'axe OZ et d'angle ψ envoie donc OX sur la ligne des nœuds et préserve OZ. On peut noter que ψ est un angle de droites qui n'est défini qu'à π rad près.

Le deuxième angle qui intervient est l'angle φ entre l'axe OZ et l'axe OZ′. La rotation d'axe la droite des nœuds et d'angle φ envoie bien sûr OZ sur OZ′ et préserve la droite des nœuds. Dans la composition de ces deux rotations, l'axe OX se retrouve sur la droite des nœuds et l'axe OZ est envoyé sur OZ′.

Le troisième angle qui intervient est l'angle, noté θ, entre la ligne des nœuds et l'axe OX′ (il s'agit donc à nouveau d'un angle de droites). La dernière rotation élémentaire qu'il convient d'introduire est la rotation d'axe OZ′ et d'angle θ. Elle envoie la droite des nœuds sur OX′ et préserve OZ′.

La rotation envoyant le trièdre OXYZ sur le trièdre OX′Y′Z′ est bien la composée de ces rotations élémentaires. En connaissant les trois angles (ψ,φ,θ), on peut construire les trois rotations élémentaires à partir du trièdre OXYZ, et donc construire le trièdre OX′Y′Z′, ce qui permet d'affirmer que les angles d'Euler fournissent une représentation de la rotation étudiée.

Cette représentation a au moins deux faiblesses. La première tient aux dégénérescences qui peuvent apparaître parce que, pour définir la ligne des nœuds par exemple, on a besoin que les deux plans OXY et OX′Y′ se coupent vraiment. S'ils sont confondus, la construction doit être conduite un peu différemment. Dans le même ordre d'idées, les angles ψ, φ et θ ne sont pas tous de même nature : le premier et le dernier sont des angles de droites définis à π rad près alors que l'angle φ est un angle de vecteurs donc défini à 2π près. Et peut-on distinguer les valeurs 0 et π pour ψ ? Pour résumer, ce paramétrage donne l'impression que Rot_3 s'obtiendrait comme le produit de trois cercles paramétrés par les trois angles d'Euler, donc serait un « *tore* » à 3 dimensions, ce qui est une information trompeuse sur sa structure topologique globale.

Compactifier $\mathbf{R}^3$

Une construction géométrique élémentaire fournit une autre approche pour « voir » comment est fait Rot_3.

Nous avons déjà vu qu'une rotation de l'espace à 3 dimensions a un axe. Connaissant cet axe, comment fait-on pour construire l'image d'un point M par cette rotation ? On considère le plan perpendiculaire à l'axe passant par M. Dans ce plan, qu'on oriente en choisissant un vecteur unitaire normal, soit V, la rotation d'angle θ, dont on prend la détermination entre $-\pi$ et π, envoie le point M sur un point M′. L'idée est alors d'associer un point de $\mathbf{R}^3$ à la rotation, à savoir le point d'abscisse $\tan \theta/2$ sur l'axe orienté par V. On remarque alors que, si nous avions pris le vecteur $-$V pour orienter l'axe, l'angle de la rotation serait $-\theta$, ce qui conduit au même point représentatif. De la même façon on remarque qu'avec la détermination prise pour θ, l'angle $\theta/2$ varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, ce qui assure que la fonction tan est bien définîe, sauf si la rotation est une symétrie axiale, et θ vaut $-\pi$ ($= \pi$ à 2π près). Dans ce cas on doit prendre un point à l'infini dans la direction de l'axe (sans pouvoir faire de différence entre les deux bouts de l'axe).

Nous avons cette fois une bonne description de la topologie de Rot_3 mais il a fallu pour cela passer par le « *compactifié en droites* » de $\mathbf{R}^3$.

Quel est le point faible de cette représentation ? Il est évident : il semble vraiment difficile *a priori* de décrire le point représentatif du produit de deux rotations d'axes distincts. Remarquons que nous aurions aussi pu mettre en avant cette faiblesse dans la représentation par les angles d'Euler.

La construction de Rover William Hamilton

Une construction due à William Hamilton en 1843 va nous permettre de surmonter aussi cet obstacle … et nous mettre sur la voie des spineurs. Pour l'anecdote il semblerait que ce soit lors d'une promenade avec sa famille qu'il a brusquement eu l'idée de cette construction d'où le fait que la formule fondamentale qui résume sa découverte soit gravée sur un pont de Dublin, endroit où il se promenait.

Qu'a fait Hamilton ? Le grand détour suivant : inspiré par les nombres complexes, il a fabriqué de nouveaux nombres, souvent appelés « *hypercomplexes* », en décrétant une loi de multiplication des vecteurs de $\mathbf{R}^4$: la base de $\mathbf{R}^4$ est notée $(1,i,j,k)$ et en copiant la multiplication des nombres complexes, il pose : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. L'usage du symbole 1 est justifié par le fait qu'il est pris comme unité de la multiplication. Il pose enfin $ij = k$. Il est facile de voir qu'après extension de la multiplication par bilinéarité à tous les vecteurs de $\mathbf{R}^4$, on définit ainsi une structure de corps sur $\mathbf{R}^4$ mais, attention, on vérifie facilement à partir des relations que nous venons de donner que $ij = -ji$, autrement dit que *ce corps n'est pas commutatif*. Il est devenu traditionnel de désigner $\mathbf{R}^4$ muni de cette multiplication par la lettre H (pour rappeler Hamilton) et de dénommer « *quaternions* » les éléments de H.

Parmi les relations qu'il est nécessaire d'établir pour prouver que H est un corps, il y a celle donnant l'inverse d'un quaternion $q = t1 + xi + yj + zk$. Ceci se fait facilement si on s'inspire d'une construction classique pour les nombres complexes utilisant la *conjugaison* qui à q associe $q^* = t1 - xi - yj - zk$. L'inverse q^{-1} de q n'est rien d'autre que $q^{-1} = q{\cdot}q^*/|q|^2$ où $|q|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Sur cette formule, on voit facilement que les « *quaternions-unités* » u (les quaternions tels que $|u|^2 = 1$) ont pour inverse leur conjugué, et donc forment un groupe que nous appelons Spin_3. On vient donc de faire apparaître un groupe intéressant mais quelle peut bien être sa relation avec les rotations de $\mathbf{R}^3$?

C'est là qu'un petit miracle se produit(2). En effet si on s'intéresse aux quaternions v qualifiés d'« *imaginaires* » (comme pour les nombres complexes, ce sont ceux qui vérifient $v^* = -v$, i.e. ceux dont la composante t suivant le vecteur de base 1 est nulle), ils forment un espace vectoriel de dimension 3 que nous notons Im H. De plus, pour un quaternion-unité u, le quaternion $u{\cdot}v{\cdot}u^*$ est encore un quaternion imaginaire (c'est une vérification élémentaire dès qu'on a pris garde que le conjugué d'un produit de quaternions est le produit des quaternions conjugués *pris dans l'ordre inverse*). Dès lors la transformation $\sigma_3(u)$ définie par $\sigma_3(u)(v) = u{\cdot}v{\cdot}u^*$ est une transformation de Im H dont on vérifie facilement qu'elle est orthogonale (encore un calcul direct avec les normes) et qu'elle préserve l'orientation (parce qu'on peut la relier à la transformation identique par un chemin continu en reliant u à 1), donc une rotation ! Les informations cruciales du point de vue géométrique sont alors les suivantes : l'axe de cette rotation est donné par le quaternion $xi + yj + zk$, autrement dit la partie imaginaire du quaternion u (nous la noterons U) et son angle θ est défini entre 0 et 2π par la formule $t = \cos \theta/2$. En résumé le quaternion u s'écrit donc $u = \cos \theta/2\ 1 + \sin \theta/2\ \mathrm{U}'$, où U' est colinéaire à U et de longueur 1.

Remarquons alors que la rotation $\sigma_3(-u)$ associée à $-u$ coïncide avec la rotation associée à u. Ceci se voit sur la formule elle-même ou sur l'écriture à partir de l'axe et de l'angle (puisque le vecteur directeur de l'axe est changé en son opposé et l'angle remplacé par son complémentaire à 2π rad). La chose la plus importante est le fait que le composé des rotations aux quaternions-unités u et v n'est rien d'autre que la rotation $\sigma_3(u{\cdot}v)$, ce qui se résume dans la formule $\sigma_3(u{\cdot}v) = \sigma_3(u) \circ \sigma_3(v)$. L'avantage fondamental de la représentation provenant des quaternions d'Hamilton, par rapport aux deux présentations précédentes, est que le produit des rotations correspond à une opération extrêmement simple à écrire sur les quaternions, et donc au besoin facile à programmer. De plus on dispose dans cette construction d'une formule analytique transparente pour trouver l'axe et l'angle, ce qui n'était pas évident. D'où le fait

(2) Cela vaut la peine de réfléchir sur la nature de ce fait en prenant un peu de distance avec les mathématiques, notamment à la lumière des développements physiques dont nous allons faire état un peu plus loin. Pour le physicien, ce que nous venons de mettre en lumière est la trace géométrique du fait que les vecteurs sont des objets composites provenant de la combinaison d'objets plus fondamentaux, les « spineurs », à la lumière du fait que la nature de l'espace et celle de la matière sont indissolublement liées.

qu'aujourd'hui, quand en robotique on doit piloter le bras d'un automate, donc se déplacer dans le groupe des rotations, la formulation utilisée est presque toujours la représentation des rotations par les quaternions.

Où sont les spineurs ?

Pourquoi avoir donné le nom Spin_3 au groupe des quaternions-unités ? Nous avons vu que les rotations de $\mathbf{R}^3$ ne venaient pas avec un choix privilégié de leur axe. Imaginons que l'objet fixe autour de l'origine de $\mathbf{R}^3$ ne soit pas un simple solide mais un solide tournant sur lui-même dans un certain sens, donc possédant une sorte de rotation intrinsèque, ce que les physiciens appellent le « *spin* ». Dans une telle situation il y a une raison de privilégier une orientation de l'axe de rotation, conformément au spin ou dans le sens opposé. Autrement dit Spin_3 apparaît naturellement comme *l'espace des rotations des corps à spin*. De plus Spin_3 est un objet très simple puisqu'il s'agit d'une sphère dans $\mathbf{R}^4$, donc un espace dont on connaît parfaitement la topologie. L'application σ_3 qui envoie Spin_3 dans Rot_3 est appelée un revêtement à 2 feuillets pour signifier que dans la contre-image d'une rotation de Rot_3 il y a exactement deux éléments de Spin_3, celui reliant l'identité et la rotation de 4π autour du même axe. Pour cela après avoir fait faire un tour complet au cube figuré sur l'illustration dont les sommets sont reliés à des points fixes d'un bâti par un lien suffisamment long, il se révèle impossible de défaire l'entortillement des liens sans toucher le cube tourné sur lui-même, alors qu'il est possible de les défaire lorsque le cube a fait deux tours complets sur lui-même.

Mais où sont les spineurs dans tout cela ? Ce sont justement les quaternions. Ils forment donc un espace de dimension 4 sur le corps des nombres réels. Mais l'écriture utilisée jusque là cache en fait quelque chose : nous devons pousser l'analogie avec les nombres complexes plus loin et regrouper $\mathbf{R}\cdot 1 \oplus \mathbf{R}\cdot i$ en $\mathbf{C}$ et se souvenir que puisque $k = ij$, alors $\mathbf{R}\cdot j \oplus \mathbf{R}\cdot k$ peut s'écrire $\mathbf{C}\cdot j$. Cela montre qu'on peut écrire $\mathrm{H} = \mathbf{C}\cdot 1 \oplus \mathbf{C}\cdot j$, donc que l'espace des spineurs dans notre cas est un espace vectoriel de dimension 2 sur les nombres complexes. Donc, comme M. Jourdain faisait de la prose sans le savoir, Hamilton faisait des spineurs sans le savoir.

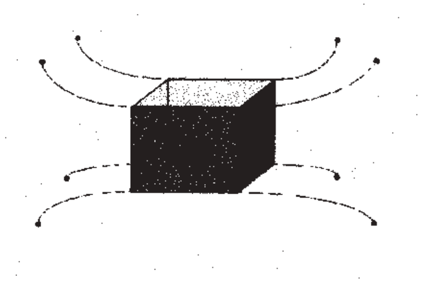
En fait c'est en 1913 que les spineurs sont apparus pour la première fois en mathématiques. Élie Cartan s'intéressait à un problème typiquement mathématique, celui de la classification de toutes les façons dont les matrices anti-symétriques peuvent se représenter dans n'importe quelle dimension, i.e. comment envoyer l'espace des matrices anti-symétriques d'une certaine taille dans un autre espace de matrices de telle sorte que les crochets des matrices soient envoyés les uns sur les autres.

Le lien avec la physique quantique

D'où est venue la connexion avec la physique quantique ? Il faut passer en dimension 4. Dans cette dimension le groupe des rotations Rot_4 a une structure bien différente, car il n'est plus vrai qu'une rotation a un axe. Tout au contraire une rotation donne lieu à une décomposition de l'espace en deux sous-espaces de dimension 2 perpendiculaires dans lesquels la transformation agit comme une rotation(3). On peut cependant encore introduire le revêtement à deux feuillets Spin_4 de Rot_4 et un miracle se produit à nouveau : il est possible de donner une description complète de ces objets en termes de quaternions car Spin_4 s'identifie au produit $\mathrm{Spin}_3 \times \mathrm{Spin}_3$ à cause de la formule $\sigma_4(u_1,u_2)(v) = u_1{\cdot}v{\cdot}u_2{}^*$. Dans ce cas l'espace des spineurs est un espace vectoriel de dimension 4 sur **C**, qui admet une décomposition naturelle sous la forme $\mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}^2$ que les physiciens appellent respectivement spineurs « *droits* » et spineurs « *gauches* » précisément à cause de la formule précédente.

C'est Paul-Adrien-Maurice Dirac qui a installé les spineurs au cœur de la Mécanique Quantique en comprenant qu'une des façons de rendre compatibles à la Relativité Restreinte les équations régissant le mouvement des électrons était d'abandonner l'idée que la fonction d'ondes qui les décrit complètement du point de vue quantique serait une fonction à valeurs complexes et de la remplacer par une fonction d'ondes prenant ses valeurs dans un espace de spineurs. Les électrons sont repésentés par des champs de spineurs sur l'espace-temps. Pourquoi est-il besoin de faire là encore un tel détour ? La raison est directement algébrique : il s'agit de décrire l'opérateur des ondes qui régit le mouvement des électrons comme le carré d'un opérateur que l'on appelle depuis lors *l'opérateur de Dirac*. Ceci n'est possible que dans le cadre d'une algèbre pour laquelle toute forme quadratique peut être écrite comme le carré d'une forme linéaire à valeurs dans une algèbre qui opère justement sur les spineurs.

L'expérience de Dirac



Bien sûr une telle algèbre n'est pas commutative et par voie de conséquences les coordonnées de l'espace sur lequel elle opère ne le sont pas non plus. Cette non-commutativité est directement liée à un principe fondamental de la chimie quantique, le « *principe d'exclusion de Pauli* » selon lequel deux électrons ne peuvent occuper le même état quantique. Ce principe est à la base de la théorie moderne des liaisons entre atomes.

Les particules comme l'électron sont représentées par des champs de spineurs qui obéissent à cette statistique *exclusive* dite de Fermi ; c'est pourquoi on les appelle des « *fermions* ». C'est le cas des particules de matière. D'autres particules qui servent

(3) D'une certains façon on peut dire la même chose en dimension 3 et constater que l'axe de vecteurs invariants qu'on y rencontre n'est là que parce que la seule rotation à une dimension est l'identité !

de vecteurs aux interactions fondamentales de la physique sont appelées des « *bosons* » car ils suivent une autre statistique « anti-exclusive », dite de Bose-Einstein. Un des grands chantiers de la physique des particules moderne est de mettre en évidence un nouveau type de symétrie, appelée une « *supersymétrie* », qui changerait les fermions en bosons et vice-versa, donc les spineurs en vecteurs et vice-versa. Elle permettrait de justifier pourquoi le nombre des familles de particules élémentaires semble être limitée à 3.

Les physiciens ont donc accordé une grande importance aux spineurs depuis leur introduction en physique par Dirac. Il a fallu plus de temps pour que les mathématiciens fassent de même mais, petit à petit, les spineurs ont pris leur place dans le paysage mathématique, spécialement via l'opérateur de Dirac qui s'est révélé un outil décisif dans l'étude de beaucoup de questions de géométrie et d'analyse, à cause de son caractère fondamental. Il est une sorte de « racine carrée » de l'opérateur de Laplace et les spineurs des sortes de « racine carrée » des vecteurs, ce qui permet en quelque sorte d'en faire des objets élémentaires pour les mathématiques aussi.

Les chaînes de Markov : des battages de cartes au séquençage du génome

Différentes sciences (astronomie, biologie, linguistique, médecine, …) ou situations sociales (démographie, assurances, …) engendrent ou s'appuient sur de l'étude de données en grandes quantités.

Les *statistiques* ont pour objet d'étudier de telles données et de proposer des modèles pour en tirer des informations à partir d'hypothèses. La théorie des probabilités fournit un contexte général pour l'étude de ces modèles. Nous allons aborder une situation particulière, celle de la génomique, et de l'usage qui est fait dans l'étude de cette théorie d'un outil particulier, les chaînes de Markov.

Les chaînes de Markov

Les « *chaînes de Markov* » sont des processus agissant sur un nombre fini d'états qui vérifient la « *propriété de Markov* », à savoir que « *le futur ne dépend du passé que par le biais du présent* ». Cette notion a été introduite par Markov au début du XX^{e} siècle. Il y a beaucoup de situations où cette propriété est vérifiée comme le battage d'un jeu de cartes, la gestion des stocks, la linguistique, … Dans un certain nombre de cas il peut être utile d'« élargir » la notion de présent en autorisant la définition du présent comme incluant quelques instants antérieurs. La description des états du « présent élargi » se fera donc en prenant autant de copies de l'espace des états que le nombre d'instants du présent élargi, voire en prenant une version continue de ces processus. Cette approche conduit aux « *processus de Markov* », introduits par Nicolai Kolmogorov.

La description mathématique d'une chaîne de Markov consiste en une probabilité de transition de l'état i à l'état j, notée p_{ij}. On forme de cette façon une matrice, dite « *matrice de transition* ». Ces matrices sont particulières en cela que la somme des lignes et des colonnes est égale à 1 ; on les appelle « *stochastiques* ». La transition entre deux instants séparés par un intervalle de temps s est associée à la matrice P^s. Il est facile de voir que les états-limites sont liés aux valeurs propres de ces matrices qui sont bien étudiées.

Un aperçu de la génomique

La *génomique* est l'étude de la structure de l'ADN qui code les propriétés ds cellules. Elle est née de la découverte fondamentale de Crick et Watson de la structure en *double hélice* de l'ADN, qui est un texte écrit avec un alphabet de quatre lettres A, C, G et T[(4)], avec le *principe de complémentarité* entre les paires A-T et C-G des deux brins. « *Séquencer le génome* », c'est identifier ce texte très long, dont pourtant seulement 10 % est signifiant.

Le problème fondamental est de distinguer les parties « codantes », les *exons*, qui produisent des protéines, de celles qui sont inertes, les « introns » (elles ne jouent qu'un rôle séparateur ou interstitiel). Quelles méthodes pour repérer le passage d'une zone à l'autre ? Une idée naturelle du point de vue biologique est de « *repérer les endroits de coupure au moment de la transcription* », ce qui est difficile à faire expérimentalement !

Une tentative pour repérer les codons ou groupes de base est de se concentrer sur les lettres qui commencent les introns (rôle des triplets finissant par GT) et qui terminent les introns (rôle des doublets finissant par A précédé par T ou C), et de faire l'hypothèse que « *les probabilités d'apparition des bases différent suivant qu'elles appartiennent à une zone intronique ou exonique* ».

Une idée consiste à essayer d'utiliser des chaînes de Markov par le biais des chaînes de Markov « cachées » qui présentent deux processus imbriqués :
– l'un est une vraie chaine de Markov,
– l'autre est un processus observé vérifiant une condition de Markov.

Il s'agit de construire des indicateurs statistiques pour ce genre d'exercice, et les valider. C'est ainsi qu'il sera possible de savoir si la déviation des statistiques ordinaires permet d'identifier les introns et les exons. Pour cela on doit disposer de données obtenues par le séquençage physique de séquences assez longues du génome.

Quelques remarques en forme de conclusion

Les mathématiques interagissent avec les autres sciences de diverses façons :
1) dans certaines situations, les concepts mathématiques peuvent préexister, être reconnus comme importants par d'autres scientifiques dans le champ de leur discipline ou encore sous-estimés ;
2) les concepts mathématiques peuvent être créés pour l'occasion.

(4) Les lettres sont les initiales des acides aminés suivants : A pour *adémine*, C pour *cytosine*, G pour *guénine* et T pour *thymine*.

La place des modèles mathématiques peut différer beaucoup d'une science à l'autre, et les mathématiciens ont besoin de connaître les fondements des autres sciences :
– pour comprendre comment les concepts s'agencent (le cas le plus naturel du point de vue mathématique n'étant pas forcément celui qui est pertinent),
– pour pouvoir envisager de façon systématique l'appropriation dans les mathématiques des nouveaux concepts,

La notion centrale est celle de « *modèle* ». Il convient de remarquer les points suivants :
1) historiquement, elle a mis beaucoup de temps à émerger (après les travaux séminaux de Laplace et de Poincaré, ce dernier étant le premier à affirmer l'autonomie des mathématiques impliquées dans la construction d'un modèle) ;
2) leur pouvoir prédictif varie beaucoup d'une science à l'autre ;
3) aujourd'hui, l'étude de cette notion est à peu près absente de l'enseignement : on a pourtant vraiment besoin que ses règles et ses limites soient perçues, mais son introduction n'est pas évidente.