Rôle des instruments mathématiques et numériques dans la modélisation

Guiseppe Geymonat(*)
et Jacques-Louis Lions

1. À partir de la moitié du dix-septième siècle, la coupole de la cathédrale Saint-Pierre de Rome, œuvre de Michel-Ange, a commencé à présenter des signes de plus en plus inquiétants d'endommagement. Des fissures toujours plus nombreuses et importantes sont apparues au cours des décennies suivantes, jusqu'à susciter, vers 1740, de sérieux doutes sur la stabilité globale de toute la structure. Le choix des interventions nécessaires devint alors de première importance, puisque la simple action de colmater les fissures (éventuellement avec des morceaux de marbre comme en 1735) ne paraissait pas suffisante. Dans un langage actuel, on peut dire que la coupole constituait un système *complexe* ayant un comportement *inconnu*, *imprévu*. La *réponse* d'un tel système aux premières actions exercées sur lui n'était pas suffisante pour en comprendre le fonctionnement et faire des prévisions sur son évolution.

(*) G. Geymonat. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil. Cnrs/Université de Montpellier II. Case courrier 048, place Eugène Bataillon, 34095 MONTPELLIER CEDEX 5.

En effet le couple (*action*, *réponse*) peut être utilisable pour améliorer la connaissance des relations de cause à effet qui déterminent l'évolution d'un système à condition de savoir isoler les *phénomènes secondaires* dont on ne veut ou on ne peut pas tenir compte (au moins dans un premier temps). Le processus de modélisation joue alors un rôle essentiel, puisque, moyennant une opportune schématisation (ou *réduction*, *analogie*, …), le système complexe est remplacé par un modèle plus simple qui en résume les aspects jugés essentiels.

Dans le cas de la coupole de Saint-Pierre, le 12 janvier 1743, le Pape Benoît XIV confie au Marquis Giovanni Poleni, la tâche d'analyser la situation et de proposer les interventions nécessaires. Giovanni Poleni est parmi les plus renommés savants en Italie : non seulement il enseigne à Padoue sur la chaire qui avait été celle de Galilée et il est consultant de la République de Venise, mais il est aussi membre des plus prestigieuses académies européennes. La démarche suivie par Poleni est d'une grande modernité. En effet, on savait à cette époque que la configuration d'équilibre d'un arc homogène de section constante est décrite par l'équation de la chaînette renversée, i.e., au renversement près, par la solution du problème de l'équilibre sous son poids propre d'une chaîne constituée de sphères rigides (identiques et en contact sans frottement entre elles). Poleni observe tout d'abord que l'en peut diviser la coupole en quartiers, et même en double quartiers solidaires, chacun de ceux-ci devant être considéré comme un arc à section variable. L'étape suivante de la modélisation consiste à subdiviser chaque quartier en seize tranches dont Poleni détermine expérimentalement la position et le poids. Enfin, *en poussant l'analogie au-delà des bases théoriques alors connues*, il construit une chaîne non homogène de seize sphères de plomb dont les masses sont proportionnelles à celles des tranches. La configuration obtenue, par ailleurs assez proche de celle d'une chaînette, permet une première conclusion importante : la forme globale de la voûte de Michel-Ange est satisfaisante.

En suivant le processus de schématisation qui a conduit au modèle, à « l'action réelle » sur le système correspond une « action théorique » sur le modèle. La réponse théorique permet avant tout de voir si l'action que l'on veut exercer va permettre d'expliquer le lien de causalité que l'on cherche. Dans ce cas, la confrontation ultérieure avec la réponse réelle du système permet à la fois de valider le modèle, d'en voir les limitations et ainsi de trouver dans quel sens il doit être modifié ou même parfois complètement abandonné. Dans tous les cas, la compréhension du système complexe augmente.

L'intérêt de la modélisation proposée par Poleni ne s'arrête pas à la seule vérification de la bonne forme globale de la voûte. Elle suggère un mécanisme de ruine possible de la structure par « ouverture » des doubles fuseaux. En conséquence, Poleni juge opportun d'augmenter la résistance globale de la coupole en utilisant un cerclage formé de cinq chaînes en fer, dont il calcule les dimensions à partir de soigneuses données expérimentales. Au mois de juin de la même année, Poleni fait parvenir ses premières conclusions qui sont immédiatement approuvées. Les travaux commencent en juillet de la même année. C'est la réponse réelle du système qui incite depuis plus de 250 ans à admirer cette modélisation !

2. Comment construit-on un modèle ? D'après Poleni, « le meilleur moyen pour connaître les œuvres de la Nature, serait de les contrefaire. Pour cela il faudrait en donner (pour ainsi dire) des représentations qui permettent de produire les mêmes effets à partir de causes bien connues et bien contrôlées ». Dans ce but, on doit utiliser d'une part un cadre théorique accepté *a priori*, et on pourrait dire de façon métaphysique (par exemple, la mécanique newtonienne, …) et, d'autre part, les instruments (mathématiques, numériques, expérimentaux) dont on dispose et que l'on sait utiliser. Dans une publication complète parue en 1748, Poleni présente non seulement le modèle choisi pour la coupole de Saint-Pierre, mais aussi une description précise du cadre théorique et des divers instruments utilisés.

Lorsque la confrontation de la réponse réelle du système avec la réponse théorique ne permet pas de valider le modèle, plusieurs possibilités se présentent :

a) affiner le modèle en utilisant le même cadre théorique et les mêmes instruments ;

b) changer les instruments tout en conservant le cadre théorique ;

c) changer le cadre théorique (et ceci est typiquement le cas des révolutions scientifiques).

Dans les dernières décennies, le rôle du cadre théorique et les raisons de ses mutations (et la signification des « révolutions scientifiques ») ont été l'objet d'un grand débat entre les théoriciens et les spécialistes de la Philosophie des Sciences, commencé dans les travaux de Kuhn, Popper et Lakatos.

Il nous semble, en revanche, que le rôle des instruments a été moins analysé. À notre avis, les succès ou les insuccès de la modélisation ont un effet important sur les instruments utilisés, pour en suggérer de meilleurs et surtout pour en stimuler des développements innovateurs quitte à « forcer » les bases théoriques de la modélisation. On doit aussi souligner que ces développements non seulement sont stimulés par la modélisation, mais influencent à leur tour le choix des actions, l'interprétation des réponses et donc ont un effet de rétroaction sur la structure du modèle.

En outre, l'inadéquation des instruments peut conduire dans une impasse une modélisation par ailleurs extrêmement innovatrice. L'élan de l'école galiléenne s'est arrêté à partir du moment où elle n'a pas su utiliser les nouveaux instruments du calcul différentiel et a voulu utiliser uniquement la théorie des proportions.

3. Illustrons maintenant l'interaction complexe entre le modèle et les instruments utilisés en suivant très brièvement quelques étapes du développement de la modélisation du comportement des matériaux solides et des structures.

À la fin du XVIII^{e} siècle, les pierres, les briques, le bois et la fonte étaient les matériaux de construction les plus utilisés. La résistance à la compression de la pierre, des briques et de la fonte était utilisée pour la construction de grandes structures telles que les voûtes et les ponts à arc. Les poutres et les treillis exploitaient la résistance à la traction et à la compression du bois. La théorie de Coulomb donnait les bases théoriques à la modélisation et au calcul effectif de telles structures.

L'ensemble des connaissances théoriques est exposé de façon magistrale dans les cours de Navier à l'École des Ponts et Chaussées de 1822-23. La technique du laminage du fer, développée à la fin du siècle précédent, permet de construire des treillis en fer et fournit par là même de nouvelles applications aux méthodes exposées par Navier. Les ponts suspendus construits à Saint-Pétersbourg en 1824-1826 sont dus à deux jeunes ingénieurs français : Lamé et Clapeyron(1).

Dans les années suivantes, Navier, Cauchy, Poisson établissent les équations générales du modèle de l'élasticité linéaire. Déterminer les efforts et les déformations dans un corps solide déformable soumis à l'action de forces agissant à l'intérieur (efforts à distance) et de forces agissant sur le bord (efforts de contact) ou encore contraint à avoir une certaine position, se ramène, dans le cas du modèle de l'élasticité, à déterminer les fonctions représentant les composantes du déplacement en tout point du corps solide. De telles fonctions sont solutions d'un système d'équations (linéaires dans les cas plus simples) aux dérivées partielles à l'intérieur du solide (les équations d'équilibre) et satisfont en plus d'opportunes conditions sur le bord.

À la différence de la chaînette et des treillis, écrire les équations du modèle général de l'élasticité ne permet pas d'obtenir la configuration d'équilibre. La première méthode utilisée pour l'obtenir consistait à chercher une solution particulière de l'équation d'équilibre et à vérifier les conditions aux bords grâce à un développement en série de fonctions spéciales. De cette façon, le problème était ramené à des équations différentielles ordinaires. Cette méthode, proposée tout d'abord par Lamé et Clapeyron, était efficace seulement pour quelques chargements et quelques configurations géométriques.

La deuxième famille de méthodes se développa à la suite des recherches de Green sur la théorie du potentiel. Lord Kelvin, en 1848, et surtout Betti en 1872, avec le théorème de réciprocité, montrèrent l'intérêt d'appliquer la théorie du potentiel.

L'origine de la troisième famille de méthodes est liée à l'étude par G. B. Airy (1862) des cas bidimensionnels. Il note alors que la répartition des contraintes d'un corps solide soumis uniquement à des forces volumiques constantes et à des efforts de contact sur le bord peut être exprimée par l'intermédiaire des dérivées d'une seule fonction convenablement choisie. Cette fonction est la solution d'une équation aux dérivées partielles relativement simple.

Que ce soit pour l'une ou l'autre des deux premières méthodes, les solutions explicites ne pouvaient être déterminées que dans quelques cas. La troisième méthode était par sa nature applicable aux seuls cas plans de l'élasticité. C'est en partie pour ces raisons que le modèle général de l'élasticité eut, pour de nombreuses années, un intérêt uniquement théorique.

Les équations d'équilibre des plaques, introduites en 1828 par Poisson et Cauchy et substantiellement améliorées par Kirchhoff à partir de 1850, furent plus riches d'applications. Même si ces équations (du type équation de Laplace) sont difficiles à

(1) En France, le premier pont suspendu fut réalisé, en 1824, sur le Rhône par Marc Seguin.

résoudre en général, on peut plus facilement en trouver une solution en forme fermée pour des géométries simples, du fait de leur caractère scalaire.

4. Vers la moitié du XIX^{e} siècle, le développement des chemins de fer est à la base de la recherche de nouvelles méthodes pour la construction des ponts. En 1845, la ligne Londres-Chester-Holyhead nécessite la construction de deux ponts. La solution choisie apparaît très originale et hardie : construire des ponts couverts à structure tubulaire en fer dans lesquelles passeront les trains. Un de ceux-ci, le Britannia Bridge sur le détroit de Menay au Pays de Galles, a la forme d'une poutre rectiligne de plus de 400 mètres appuyée sur quatre pylônes à 30 mètres au-dessus du niveau de la mer. Ce pont, en effet, ne devait créer aucune gêne au passage des bateaux et donc la forme en arc était inadéquate. Comme le note Clapeyron, « les immenses capitaux engagés dans les chemins de fer ont donné une vive impulsion à la science des constructions, en mettant souvent les ingénieurs dans la nécessité de résoudre des difficultés devant lesquelles, il y a quelques années à peine, ils auraient dû se reconnaître impuissants. Parmi les solutions nouvelles des grands problèmes qu'ils ont eu à résoudre, aucune ne frappe davantage par son originalité et sa grandeur que le pont construit par l'illustre Robert Stephenson sur le détroit de Menay. La forme générale est celle d'une poutre droite reposant sur quatre appuis. La matière dont il se compose est la tôle de fer, les moyens d'assemblage sont ceux qui sont pratiqués dans la construction des chaudières. Ici comme dans bien d'autres circonstances, la pratique a devancé la théorie : il n'en est pas moins de son devoir d'intervenir à son tour, de rendre compte des faits et poser des règles là où nos devanciers n'avaient eu pour guide que des vagues inspirations »[(2)].

Même si Clapeyron est, dans cette Note aux Comptes Rendus, parmi les premiers à donner une formulation générale de la méthode de l'énergie en élasticité, dans les applications il préfère se ramener à des structures réticulées formées par un nombre fini de poutres élastiques, chacune étant modélisée avec les méthodes exposées par Navier. En effet, le calcul est relativement simple dans le cas des structures isostatiques et le cas des structures hyperstatiques peut être ramené au précédent à l'aide de quelques artifices.

L'attitude de Clapeyron est très instructive : l'absence d'instruments adéquats rend inutilisable le modèle général de l'élasticité. Il convient donc d'exploiter la modélisation plus simple des structures réticulées constituées de poutres et d'y appliquer des idées nouvelles. Le succès de cette modélisation est à la base des recherches de Saint-Venant qui le conduisent en 1855 à introduire son « principe ».

Les prévisions obtenues permettent d'affronter des problèmes toujours nouveaux devant chacun desquels l'ingénierie civile et mécanique aurait dû se reconnaître impuissante. Les succès remportés stimulent l'application de ces méthodes à des structures de plus en plus complexes d'un point de vue géométrique, formées non seulement de poutres mais aussi de plaques reliées de diverses façons entre elles.

(2) Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 45, n° 26, p. 1076-1080, 1857, 2^{e} Semestre.

5. Au début du XX^{e} siècle, le processus de modélisation utilise de plus en plus les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. Toutefois les méthodes analytiques ne s'appliquent que dans des situations où la géométrie est simple. Or, remarque L. F. Richardson dans un article très intéressant, « aussi bien l'ingénierie que les sciences moins exactes telle la biologie, ont besoin de disposer de méthodes rapides, faciles à comprendre et utilisables pour des équations non usuelles et dans des domaines irréguliers. Tant mieux s'ils sont précis, mais une erreur de un pour cent est suffisante dans des nombreuses situations »(3). Les méthodes que Richardson propose se fondent sur la substitution des dérivées partielles par des différences finies, comme déjà Euler remplaçait les dérivées ordinaires par les différences finies pour l'approximation de la solution d'une équation différentielle ordinaire (la méthode d'Euler !). Naturellement, aux nœuds internes il faut ajouter les nœuds de la frontière où il tient compte des conditions aux limites. Dans le cas des problèmes variationnels elliptiques, auxquels est dédiée la plus grande partie du mémoire, « on obtient ainsi un système de $n + s$ équations algébriques pour n nœuds internes et s nœuds à la frontière ».

Il s'agit d'une idée très originale. Les exemples étudiés par Richardson paraissent très convaincants. Toutefois, ces méthodes n'ont pas le succès qu'elles méritent parce que manquent les instruments pour réaliser effectivement les calculs. En effet, Richardson lui-même remarque que l'efficacité d'une méthode aux différences finies dépend de l'erreur commise en remplaçant les dérivées par les différences (avec le langage actuel, de l'erreur locale de troncature). Pour diminuer cette erreur, « une règle apparemment d'application universelle est de prendre des incréments plus petits et de répéter le calcul ». Pour tester la validité de cette règle, Richardson compare, dans quelques cas simples, les résultats numériques avec ceux obtenus à l'aide d'un calcul par séparation des variables et développement en série de Fourier. La comparaison est tout à fait satisfaisante. Quelques années plus tard il essaye d'appliquer cette méthode à un problème non-linéaire extrêmement compliqué, celui de la prévision météorologique. Le résultat étant complètement décevant, l'instrument des différences finies paraissait inutilisable pour cette problématique.

Il faudra attendre le mémoire fondamental de R. Courant, K.O. Friedrichs et H. Lewy de 1928 pour mieux comprendre la situation. Ces auteurs ne cherchent pas à approcher *l'équation* aux dérivées partielles, mais la *solution* du problème aux limites et/ou aux conditions initiales. Il s'agit d'un changement de perspective : il ne suffit pas de prendre des « incréments de plus en plus petits » car, même si chaque terme de l'équation est de mieux en mieux approché, cela ne signifie pas que la solution soit, elle, de mieux en mieux approchée. En particulier dans les problèmes d'évolution, il intervient un paramètre géométrique essentiel lié à la discrétisation. Il s'agit de la *condition de stabilité*. Dans les premiers exemples considérés par Richardson, cette condition est automatiquement satisfaite car il s'agissait d'équations elliptiques et d'un exemple d'équation de la chaleur (où elle l'était

(3) *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical problems involving Differential Equations, with an Aplication to the Stresses in a Masonry Dam*, Phil. Trans. Royal Soc. London, ser. A, vol. 210, 1911, p. 307-357, mémoire lu le 13 janvier 1910.

apparemment par hasard). Par contre, dans l'application à la météorologie, la situation était complètement différente : la méthode n'était pas stable !

6. La contribution de Courant-Friedrichs-Lewy doit beaucoup à l'analyse des problèmes aux limites faite quelques années plus tôt par J. Hadamard qui avait conduit à la notion de *problème bien posé*. Un problème écrit sous forme abstraite :

$$\textit{Étant donné } f \in \mathrm{F} \textit{ chercher } u \in \mathrm{E} \textit{ tel que } \mathrm{A}u = f,$$

où F et E sont des espaces fonctionnels donnés, est bien posé d'après Hadamard quand les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) la solution existe ;

(ii) la solution est unique ;

(iii) la solution dépend avec continuité des données.

La première condition signifie que le modèle mathématique n'impose pas des conditions incompatibles entre elles et la deuxième que les seules incertitudes et ambiguïtés sont celles inhérentes à la situation physique (c'est le cas, par exemple, des valeurs propres). La troisième condition peut sembler plus délicate, mais elle est tout aussi importante. En effet elle traduit l'affirmation « natura non facit saltus » par la condition qu'à *une petite variation* de la donnée $f \in \mathrm{F}$ doit correspondre une petite variation de la solution $u \in \mathrm{E}$. La petitesse de la variation dépend du choix d'une distance (plus généralement d'une topologie) sur chacun des espaces E et F.

Si, parmi les données du problème, il y a aussi le choix de l'opérateur A, on peut compléter ces conditions avec une condition sur l'influence d'une *petite variation* de A. Dans le cas d'un opérateur linéaire en dimension finie, il s'agit alors du *conditionnement* de l'opérateur A.

7. L'analyse théorique de Courant-Friedrichs-Lewy permet de comprendre comment il faut utiliser l'instrument introduit par Richardson. Il faudra, toutefois, attendre encore presque vingt ans avant de pouvoir utiliser toute la puissance des méthodes aux différences finies. En effet, très rapidement, la quantité de calcul nécessaire devient très importante et même l'aide dune calculatrice électromécanique est insuffisante.

Déjà plus utiles sont les calculateurs analogiques qui exploitent l'analogie des forces et des déplacements dans le treillis avec l'intensité et la tension dans un circuit électrique.

La situation change complètement, spécialement aux États-Unis, à la fin de la Deuxième Guerre Mondiale pour deux raisons. La première est liée au développement de l'industrie aéronautique qui requiert le calcul précis de structures de plus en plus complexes. Pour cela on utilise des calculateurs analogiques toujours plus puissants qui permettent d'analyser des structures avec un nombre croissant de degrés de libertés (quelques centaines au début des années Cinquante). Ces structures imposent une standardisation des calculs à l'aide d'une formulation précise en termes de matrices.

La deuxième est liée à la mise en service des premiers ordinateurs. Dès la fin de 1945, von Neumann est convaincu que les ordinateurs peuvent et doivent devenir des instruments de recherche. Par exemple, il écrit dans une lettre du 23 janvier 1946 : « les possibilités d'un ordinateur doivent se juger à la lumière de sa contribution à la résolution de problèmes de types nouveaux et au développement de nouveaux modèles ».

À partir de 1953, les ordinateurs sont utilisés chez Boeing pour l'analyse des fuselages. Avec une méthodologie tout à fait analogue à celle de Poleni, les fuselages sont modélisés par des assemblages d'éléments plus simples : plaques, nervures, longerons, … La méthode est très efficace et, dans les années qui suivent, elle devient de plus en plus populaire, même si les calculateurs analogiques sont encore utilisés. Par exemple, en France en 1967 l'aile du Concorde est analysée avec 2000 degrés de libertés sur un calculateur analogique.

Au début des années Soixante, les ingénieurs, en suivant les idées de Clapeyron, utilisent une formulation variationnelle et, devant un choix de plus en plus large d'éléments, vont surgir les problèmes liés à la convergence de l'approximation et à sa rapidité.

Les instruments à la base du succès de la modélisation suggèrent de nouvelles questions de caractère théorique, dont l'étude s'étalera sur plusieurs années. À ce propos, il est intéressant de rappeler que dès 1943 R. Courant avait étudié, dans un but essentiellement théorique, l'approximation de la solution d'un problème variationnel à l'aide de fonctions linéaires par morceaux définies sur une triangulation du domaine. Si la triangulation est assez régulière, la détermination de la solution ainsi approchée équivaut à la solution des équations aux différences finies du problème. Toutefois au début des années Soixante ce travail semblait être « oublié », cf. les remarques de Babuskall(4).

8. Grâce au développement des ordinateurs et aux résultats théoriques sur les estimations d'erreurs, la méthode des éléments finis a eu un grand essor, et est devenue un instrument essentiel dans l'ingénierie. Les codes ont été conçus pour le modèle général de l'élasticité anisotrope ; cela a entraîné un renouveau de l'intérêt pour la détermination *expérimentale* des coefficients d'élasticité. Les prévisions obtenues pour des structures réelles se sont montrées tout à fait fiables, comme il avait été imaginé par les pionniers de ces méthodes. « Il faut s'attendre à ce que le développement d'ordinateurs très rapides rende possible une approche plus fondamentale des problèmes de calcul de structures ; nous pourrons baser notre analyse sur une modélisation théorique des structures réelles plus effective et plus détaillée que celle utilisée dans le passé »(5).

(4) L Babuskall, *Courant Element : Before and After, Finite Element Method, Fifty Years of the Courant Element*, ed. by M. Krizek, P Neittaanmaki, R. Sternberg. Marcel Dekker, 1994, p. 37-51.

(5) M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp, *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 23, nº 9, p. 805-823, 1956.

Ces succès ont encouragé l'utilisation de modélisations plus compliquées(6), mais plus réalistes, pour le comportement des matériaux nouveaux et/ou des structures soumises à des chargements « extrêmes ». Ces modélisations prennent en compte certains phénomènes non linéaires et/ou irréversibles observés tout d'abord expérimentalement (plasticité, naissance et propagation de fissures, couplage avec des effets thermiques, chimiques, magnétiques, …). Dans la modélisation plus simple de l'élasticité, il s'agissait de phénomènes secondaires dont l'effet était jusqu'alors essentiellement traduit par des « coefficients de sécurité ».

La simulation numérique à l'aide de ces modèles a été possible par les ordinateurs des générations suivantes. À leur tour ces modèles, d'une part, ont suggéré de nouveaux et difficiles problèmes mathématiques et, d'autre part, ont mis en évidence la nécessité de réaliser des essais expérimentaux originaux pour obtenir les constantes phénoménologiques utilisées dans la modélisation des caractéristiques de chaque matériau. Il est à signaler que les maquettes utilisées dans les essais sont maintenant, en général, calculées d'abord à l'aide d'une modélisation « plus simple »…

9. Dans ce qui précède nous avons tenté de donner un aperçu, à partir d'exemples historiques importants, du rôle des outils mathématiques et numériques dans la modélisation et de l'usage que l'on peut faire de cette modélisation pour arriver à la simulation, élément essentiel pour la conception des systèmes, pour leur réalisation et pour leur gestion.

Ces considérations de base demeurent valides – et même, à vrai dire, prennent une importance de plus en plus grande – au fur et à mesure de la croissance des capacités des ordinateurs, croissance des mémoires, des vitesses d'exécution d'opérations élémentaires et des vitesses de transmission des données.

En effet, cette croissance conduit à développer des modélisations de plus en plus riches et à imaginer des actions de plus en plus ambitieuses pour le contrôle de systèmes toujours plus complexes. À leur tour les succès toujours renouvelés conduisent à de nouvelles questions théoriques et suggèrent de possibles utilisations pour des ordinateurs encore plus puissants.

Dans cette course, apparemment sans fin, les ordinateurs peuvent être comparés à la lunette de Galilée. Non seulement il faut savoir les « tourner vers le ciel » mais il faut, aussi, avoir une théorie pour interpréter les observations puisque les ordinateurs ont quelques caractéristiques spécifiques : ils renvoient à l'opposition discret/continu et ils utilisent des concepts fortement liés aux fondements mêmes des mathématiques (calculabilité, décidabilité, complexité computationnelle, …).

On peut donc raisonnablement se demander quelles sont les « limites » à la modélisation mathématique et quelles sont les évolutions envisageables. Il avait déjà été remarqué dans (5) que « la méthode expérimentale continuera à être utilisée soit à la place soit comme validation finale de la modélisation. Toutefois les maquettes sont coûteuses, requièrent beaucoup de temps pour leur construction et deviennent

(6) Certains parmi ces modèles se trouvent par exemple dans J. Lemaitre, J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.

rapidement obsolètes ». Mais il y a plus : dans certaines situations les expériences mêmes sont impossibles, en tous cas des expériences en vraie grandeur.

L'exemple le plus connu est certainement celui de la modélisation du système de la Planète Terre. Elle utilise un vaste ensemble d'équations pour la modélisation de l'atmosphère, des océans liquides et solides, des calottes glaciaires, de la végétation, des émissions de gaz à effet de serre. Dans ce cas les expériences globales sont physiquement dénuées de sens.

Un autre exemple, développé dans des conditions toutes différentes, est celui de la modélisation des armes nucléaires. Ici les expériences sont désormais interdites par des accords internationaux. Par conséquent, pour répondre aux décisions politiques de suivi des armes nucléaires, la simulation est le seul outil !

Dans les deux cas, il faut donc développer de nouvelles méthodes de validation de la modélisation. En effet, nous insistons sur ce point, la seule méthode envisageable pour espérer arriver à des scenarii plausibles de simulation est d'utiliser une modélisation mathématique.

10. On est ainsi conduit à s'interroger : pourra-t-on « tout » modéliser, puis analyser, puis simuler ? La réponse est, pour le moment, négative, mais si l'on regarde le chemin parcouru chaque année, la question n'est pas « folle »… Les résultats obtenus par exemple dans les Sciences de la Vie sont déjà très impressionnants : modélisation des os, du système sanguin (au moins localement), simulation d'interventions chirurgicales...

Il parait clair que, face à toute situation de la Science et de la Technologie, une *méthode qu'il faut absolument tester* est celle de la modélisation mathématique et de la simulation. John von Neumann a été un pionnier dans cette voie. « Pour commencer, on doit souligner une affirmation qui n'est pas nouvelle, mais qui doit être répétée sans cesse : les sciences ne cherchent pas à expliquer, seulement rarement elles cherchent à interpréter, essentiellement elles construisent des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide d'interprétations verbales convenables, décrit les phénomènes observés. L'unique et véritable justification de cette construction mathématique est qu'elle fonctionne – c'est-à-dire qu'elle décrit correctement les phénomènes d'un champ raisonnablement grand. De plus, le modèle doit satisfaire certains critères esthétiques – c'est-à-dire qu'il doit être relativement simple en fonction de sa capacité de description »(7).

Après la modélisation et la simulation vient l'action. Poleni et la Coupole de Saint-Pierre en fournissent un exemple. Mais il s'agit là d'une action, en quelque sorte, *statique*. On veut concevoir le système (ou les modifications à lui apporter) pour qu'il soit stable.

Plus difficiles sont les actions *dynamiques*, ce que l'on appelle le contrôle actif. C'est l'une des grandes directions de recherches pour encore des décennies…

(7) *Method in the Physical Sciences*, dans Collected Work, vol. VI, p. 491-498, Pergamon Press, 1963, publié en 1955 dans The Unity of Knowledge, ed. by L. Leary, Doubleday, N.Y. p. 157-164.