Activité : Un vélo pour deux

Pierre Desjonquères(*)

Je propose cette activité aux élèves de quatrième sur deux heures. J'ai toujours observé une motivation forte des élèves et une démarche constructive pour comprendre et résoudre ce problème. Dans cet article, je m'attarde plus sur le processus de la séance que sur les enjeux didactiques que le lecteur pourra retrouver.

Je leur explique le principe de cette course :
Règle de la course :
– *équipes de deux ;*
– *un vélo pour deux (un seul sur le vélo, échanges illimités) ;*
– *départ et arrivée en même temps des deux partenaires.*

Cela fait écho à certaines courses qu'ils connaissent. Je leur propose une stratégie autorisée par les règles :
Stratégie d'une équipe :
L'un part à vélo et l'autre à pied. Le cycliste dépose à un endroit convenu le vélo et continue à pied. Le piéton marche jusqu'au vélo et le prend pour rattraper son partenaire. Une fois rattrapé, il lui laisse le vélo et ils recommencent le même procédé.

Je leur propose de se mettre par « équipes » de deux (par table) pour un travail de groupe et une meilleure appropriation.
Le choix des données numériques évite des calculs compliqués et permet de focaliser l'attention des élèves sur le procédé en tant que tel. Ce choix permet aussi des tentatives empiriques.
Données :
distance du parcours : 120 km ; vitesse à pied : 10 km/h ; vitesse à vélo : 30 km/h.
Questions :
Proposer un procédé pour qu'ils arrivent en même temps.
Quel est le temps mis ? Peut-on mettre moins de temps ?

Une discussion est nécessaire pour que l'énoncé soit bien clair pour chacun. Le passage de la course « sportive » (et s'ils sont fatigués…) à la course « mathématique » (le défi de proposer la stratégie la plus rapide en fonction des règles et données) se fait de manière intéressante et sans difficulté.

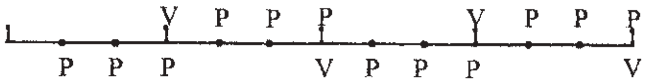
Après un temps de réflexion, les élèves expliquent aux autres l'état de leurs avancées. Un avantage de ce problème est qu'il oblige à une résolution d'une grande clarté d'exposé. Les élèves refusent les explications confuses.

En général, l'essentiel des groupes a une démarche empirique.

(*) Collège Ferdinand Buisson (Grandvilliers - 60)

La proposition la plus fréquente est un découpage par tranches de 30 km (une heure à vélo et 3 heures à pied). Un segment horizontal représente les 120 km. Des codages variés montrent l'évolution simultanée des deux coureurs. Les groupes convaincants sont ceux qui insistent sur l'évolution de leur schéma plus que sur l'état final (souvent embrouillé).

Exemple :



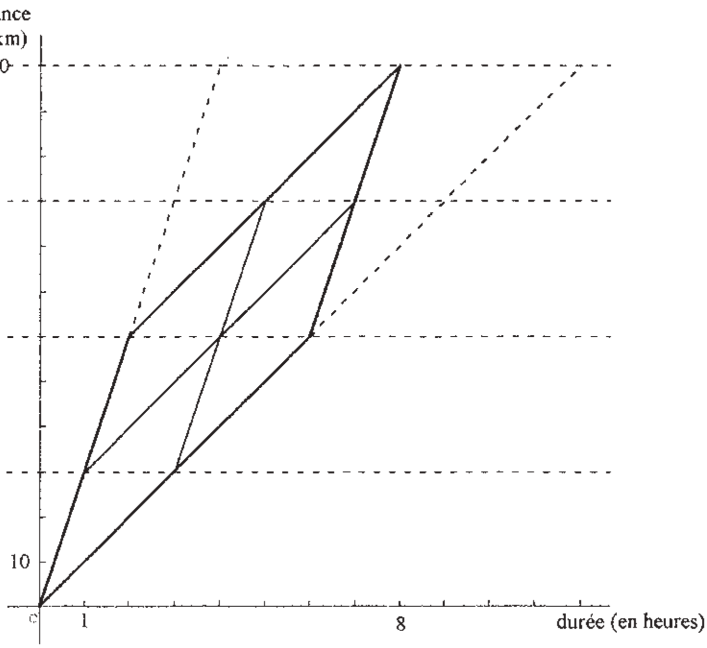
Une explication est validée quand l'ensemble des élèves est convaincu. Ce type de stratégie respecte les règles. Il faut 8 heures. Mon rôle est de demander si cela répond à l'ensemble de nos questionnements.
Les élèves ne se satisfont pas de ce stade de compréhension et gardent un regard critique sur ce qu'ils ont compris.
Deux réflexions viennent souvent des élèves :
Il y en a toujours un qui marche : il faut donc « logiquement » 12 heures.
En faisant la moyenne arithmétique des vitesses (ce qu'ils appellent vitesse moyenne), on trouve 20 km/h et donc 6 heures.
Si ces questionnements n'apparaissent pas naturellement et si un consensus mou s'installe, je les provoque.
Des fois apparaît un « 15 » dans des groupes réfléchissant sur les moyennes des durées. Le statut de ce « 15 » (en fait la vitesse moyenne) n'est pas clair.

A-t-on été dupé par le schéma ? Existe-t-il d'autres stratégies plus efficaces ? Il y a un besoin de mieux exposer la démarche et de trouver des critères sûrs pour connaître le temps minimum.

Souvent ne sont proposés que des exemples de tranches de 30 ou 15 km. Un travail sur ces exemples fait apparaître la possibilité de diviser autant que l'on veut ces tranches. Plus tard vient la possibilité de faire un unique échange au kilomètre 60. Pour toutes ces stratégies il faut 8 heures.

À ce stade : tous valident ces stratégies. Mais des points sombres subsistent.
Durant cette heure, je n'affirme rien et n'impose rien : j'organise le débat. Les élèves ne me demandent d'ailleurs pas mon avis sur le problème.

La deuxième heure, je reviens sur la difficulté de leurs représentations : sur le même axe sont représentées distances et durées. Je leur propose de construire un repère avec la durée en abscisse et la distance en ordonnée (je n'ai jamais eu d'élève le proposant spontanément).
La construction est guidée. Certains sont perplexes sur l'intérêt de cette représentation. On commence par l'échange au kilomètre 60. Un parallélogramme apparaît. À partir de cela, les échanges plus fréquents sont faciles à représenter. L'état final du graphique est explicite et convaincant pour la plupart des élèves.
Il apparaît sur ce graphique que dans toutes les stratégies chaque coureur totalise 60 km à vélo et 60 km à pied. Apparaît aussi la moyenne des durées à pied (12 h) et à vélo (4 h).



Je propose de mettre au clair l'histoire de la vitesse moyenne qui est malheureusement différente de la moyenne arithmétique des vitesses (15 km/h au lieu de 20 km/h).

Peut-on améliorer cette vitesse ? Je leur propose de réfléchir de manière plus globale. Pour être le plus performant : il faut éviter les pauses (ce qui est le cas) et faire la plus grande distance possible à vélo (pour chaque coureur) ce qui revient à 60 km. Si l'un fait plus de 60 km, l'autre en fera moins.
Nos stratégies sont optimales, on ne peut pas faire moins que 8 heures.

Ce problème intrigue, passionne. Il est pour moi un exemple d'enseignement de mathématiques vivantes. Les élèves s'investissent complètement dans ce problème, il me semble qu'ils ont une démarche scientifique authentique. Et en prime, je prends un grand plaisir à organiser ces séances pleines de piquant.

Remarque. Les deux partenaires vont à la même vitesse p à pied et à la même vitesse b à bicyclette. Il est donc « normal » qu'ils accomplissent le même trajet à pied et à vélo ; sinon, partis en même temps, ils n'arriveront pas en même temps. Mais cela peut ne pas apparaître d'emblée. Il est intéressant de constater alors que « l'évidence » ne surgit qu'après maturation et résolution sans elle !
En dégageant finalement cette « évidence », on se libère aussi du choix des valeurs numériques…

Source : « Sur le sentier des mathématiques », Kordiemsky, Éditions Dunod.