Des carrés dans des triangles

Daniel Reisz(*)

I – Deux carrés dans un triangle rectangle

Un des exercices du rallye mathématique d'Alsace (L'Ouvert Nº 103, 2001) mettait en cause les deux carrés qu'on inscrit classiquement dans un triangle rectangle.

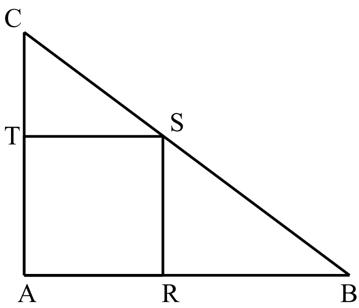

Figure 1

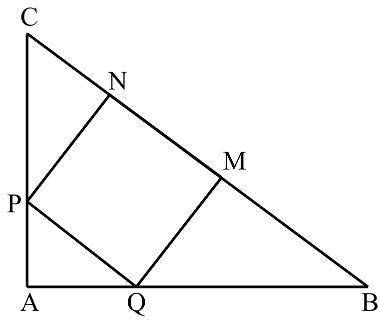

Figure 2

Il s'agissait, connaissant les aires des deux carrés de calculer la somme des côtés de l'angle droit. Il est intuitivement assez facile de deviner qu'on ne peut pas donner à ces deux carrés n'importe quelle valeur. On se propose donc ici d'aller un peu plus loin et de comparer les côtés et donc les aires de ces deux carrés en fonction de la *forme* (on précisera dans la suite ce qu'il faut entendre par là) du triangle rectangle.

1. Étude de la disposition correspondant à la figure 1

Lorsque ARST est un carré on a :

$$\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{AC}},$$

soit, en posant AR $= x$, AB $= c$, AC $= b$,

$$\frac{c-x}{c} = \frac{x}{b},$$

d'où

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

L'aire est donc égale à

(*) reiszd@aol.com

$$\Sigma(1) = \frac{b^2c^2}{(b+c)^2}.$$

2. Étude de la disposition correspondant à la figure 2

Une des plus jolies méthodes, très classique, est d'utiliser l'homothétie de centre A qui transforme le carré BM′N′C, construit sur l'hypoténuse BC, en le carré QMNP (figure 3) qui répond au problème. Cette méthode fournit une construction très simple du carré cherché : M et N sont les intersections des segments AM′ et AN′ avec l'hypoténuse BC. Elle peut paraître parachutée, mais en réalité elle relève d'une idée souvent efficace dans les questions de constructions : on se libère d'abord de telle ou telle contrainte et on « ajuste » ensuite grâce à une transformation judicieusement choisie.

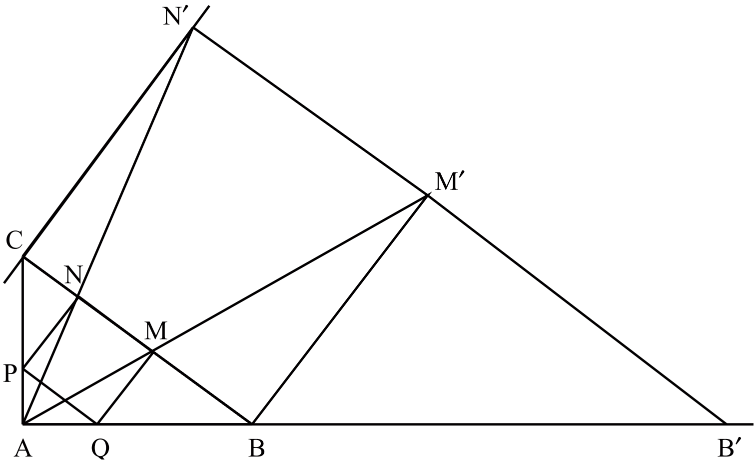

Figure 3

La détermination du rapport de cette homothétie est un peu plus laborieuse. Si on pose AB = c, AC = b, BC = a, MN = y, on déduit de la similitude des triangles ABC et M′B′B

$$\frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BM}'}{\mathrm{AC}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{BB}'}{a} = \frac{a}{b},$$

soit

$$\mathrm{BB}' = \frac{a^2}{b},$$

et donc

$$\mathrm{AB}' = c + \frac{a^2}{b} = \frac{bc + a^2}{b}.$$

Le rapport de l'homothétie évoquée est alors :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}'} = \frac{c}{\dfrac{bc + a^2}{b}} = \frac{bc}{bc + a^2} = \frac{bc}{b^2 + c^2 + bc}$$

et

$$y = \mathrm{MN} = \frac{abc}{b^2 + c^2 + bc}.$$

L'aire du carré est donc égale à

$$\Sigma(2) = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 + bc + c^2)^2} = \frac{(b^2 + c^2) b^2 c^2}{(b^2 + bc + c^2)^2}.$$

3. Comparaison des deux aires

Soit donc à comparer les deux quantités

$$\Sigma(1) = \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2}, \quad \Sigma(2) = \frac{(b^2 + c^2) b^2 c^2}{(b^2 + bc + c^2)^2}.$$

Une première idée et un premier résultat consiste à regarder la différence

$$\Delta = \Sigma(1) - \Sigma(2) = \frac{b^2 c^2}{(b + c)^2} - \frac{(b^2 + c^2) b^2 c^2}{(b^2 + bc + c^2)^2} = \frac{b^4 c^4}{(b + c)^2 (b^2 + bc + c^2)^2}.$$

C'est une quantité strictement positive et on peut donc déjà conclure que la disposition de la figure 1 fournit toujours un carré plus grand que celui fourni par la disposition de la figure 2. Mais si on veut comparer les aires des deux carrés de manière plus fine en fonction de la *forme* du triangle rectangle, la différence ne fournit pas le moyen le plus pertinent à cause précisément de ce que l'on fait *bouger* et de ce que l'on garde *invariant* lorsque la forme change (aire, périmètre, hypoténuse, …).

Le quotient des deux aires, indépendant de la « taille » du triangle est alors un indicateur plus pertinent.

$$\Theta = \frac{\Sigma(1)}{\Sigma(2)} = \frac{(b^2 + bc + c^2)^2}{(b + c)^2 (b^2 + c^2)}.$$

L'homogénéité algébrique de l'expression et le fait géométriquement évident que la forme du triangle rectangle est gouvernée par l'un ou l'autre des angles aigus amènent assez naturellement à introduire le paramètre

$$t = \frac{c}{b} = \tan \hat{C}.$$

On a alors

$$\Theta = \Theta(t) = \frac{(1+t+t^2)^2}{(1+t)^2(1+t^2)}, \qquad t > 0.$$

On peut déjà remarquer que les deux limites extrêmes (triangles aplatis) correspondant à $t = 0$ et $t = +\infty$ ont pour valeur commune

$$\Theta(0) = \Theta(+\infty) = 1.$$

Sans même pousser plus loin l'observation de Θ, on sait d'avance que $\Theta(t) > 1$ pour tout $t > 0$ (car Δ est strictement positif).
On peut aussi affirmer qu'il y aura une symétrie de situations géométriques de part et d'autre du triangle rectangle isocèle, correspondant à $t = 1$. Donc on peut avoir un extremum en $t = 1$ et s'il y a d'autres extrema, à tout extremum correspondant à une valeur t de $]0\,;\,1[$ correspondra symétriquement un extremum $\dfrac{1}{t}$ d'abscisse de $]1\,;\,+\infty[$.

Regardons de plus près $\Theta(t)$ et en particulier sa dérivée

$$\Theta'(t) = \frac{-2t(t-1)(t^2+t+1)}{(t+1)^3(t^2+1)^2}.$$

L'affaire est entendue ! Le seul extremum (un maximum) est obtenu pour $t = 1$. Il a pour ordonnée

$$\Theta(1) = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

et donc, pour tout $t > 0$,

$$1 < \Theta(t) \leq 1{,}125.$$

Les deux carrés ont donc toujours des aires assez proches, la plus grande « différence » correspondant au triangle rectangle isocèle.

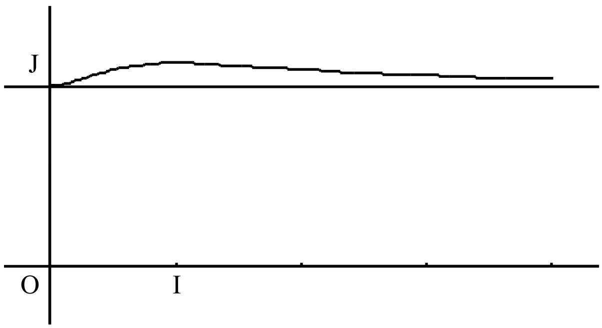

Figure 4

Remarquons que l'énoncé de l'exercice du Rallye Mathématique d'Alsace donnait pour valeurs respectives des deux aires 441 et 440, dont le rapport se situe bien entre 1 et 1,125. Je n'en attendais pas moins de mes amis alsaciens.

II – Et dans un triangle quelconque ?

Envisageons maintenant de regarder les mêmes configurations dans des triangles quelconques, c'est à dire des carrés dont un des côtés est porté par un côté du triangle et dont les deux autres sommets sont chacun sur un des deux autres côtés du triangle.

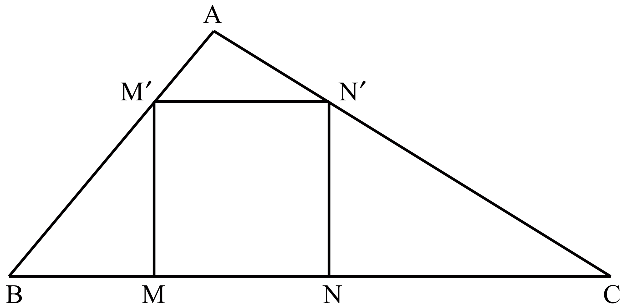

Figure 5

Restreignons-nous à ce qu'annonce le titre : Carré *dans* triangle, c'est à dire que nous supposerons pour le cas décrit par la figure que les deux angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus (et plus généralement lorsque nous envisagerons les trois carrés posés chacun sur l'un des trois côtés, nous supposerons que le triangle est acutangle).

1. Que peut-on dire de ce carré MNN′M′ ?

On pourrait pour le construire élégamment et en déterminer son aire, utiliser la méthode de l'homothétie appliquée plus haut au triangle rectangle. Géométriquement c'est joli, les calculs ne sont pas des plus aisés. Voici une autre méthode plus calculatoire qui repose sur l'idée d'étudier à quelle condition le rectangle inscrit (figure 6) est un carré.

Posons BC = a, BA′ = k, AA′ = h, BM = x et considérons le rectangle MNN′M′.

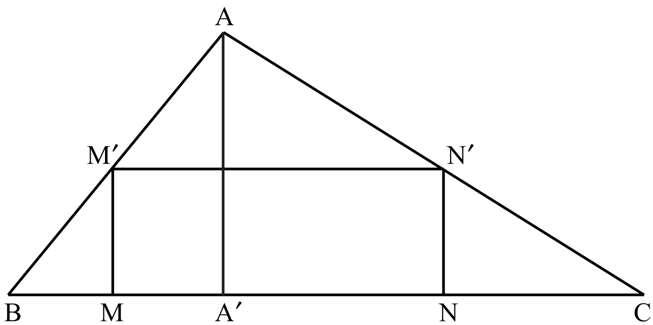

Figure 6

Par la propriété de Thalès on a immédiatement

$$\frac{\mathrm{MM}'}{\mathrm{AA}'} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BA}'}$$

soit

$$\frac{\mathrm{MM}'}{h} = \frac{x}{k}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{MM}' = \frac{h}{k}x.}$$

De la même façon

$$\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{CA}'} = \frac{\mathrm{NN}'}{\mathrm{AA}'}$$

fournit

$$\boxed{\mathrm{CN} = \frac{a-k}{k}x.}$$

Par ailleurs

$$\mathrm{MN} = \mathrm{BC} - (\mathrm{BM} + \mathrm{CN}) = a - \left(x + \frac{a-k}{k}x\right) = a\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{MN} = a\left(1 - \frac{x}{k}\right).}$$

Ce rectangle sera un carré si et seulement si

$$\mathrm{MM}' = \mathrm{MN}$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{k}x = a\left(1 - \frac{x}{k}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{ak}{a+h}.}$$

Et l'aire A de ce carré sera égale à

$$A = (\mathrm{MM}')^2 = \frac{h^2}{k^2}\frac{a^2k^2}{(a+h)^2} = \frac{a^2h^2}{(a+h)^2}.$$

Si on observe que ah est le double de l'aire S du triangle ABC, l'aire A du carré peut s'écrire

$$\boxed{A = \frac{4S^2}{(a+h)^2}.}$$

2. Comparons les trois carrés inscrits dans un triangle acutangle

Si le triangle ABC est acutangle, on peut « poser » un carré inscrit sur chacun des trois côtés.

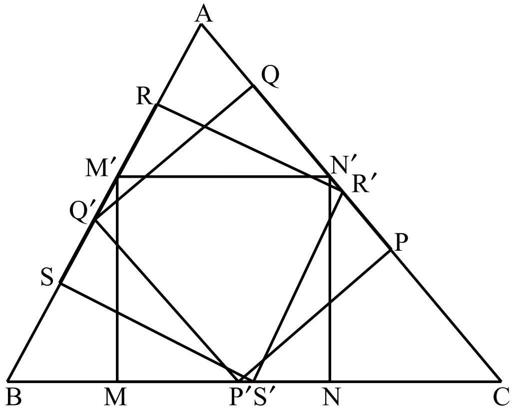

Figure 7

Essayons de comparer leurs tailles et en l'occurrence, au vu de l'expression trouvée plus haut, leurs aires. Pour cela précisons nos notations :
– soit h_a, h_b, h_c les hauteurs respectivement issues des sommets A, B, C.
– soit A, B, C les aires des carrés respectivement « posés » sur les côtés BC, CA, AB.

Avec ces notations et en remarquant que

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S,$$

l'étude faite plus haut nous permet d'écrire

$$A = \frac{4S^2}{(a+h_a)^2} = \frac{4a^2S^2}{(a^2+2S)^2},$$

$$B = \frac{4S^2}{(b+h_b)^2} = \frac{4b^2S^2}{(b^2+2S)^2},$$

$$C = \frac{4S^2}{(c+h_c)^2} = \frac{4c^2S^2}{(c^2+2S)^2}.$$

Étudions le rapport de ces aires. Par exemple

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2(b^2+2S)^2}{b^2(a^2+2S)^2} = \left[\frac{a(b^2+2S)}{b(a^2+2S)}\right]^2.$$

Sachant que

$$2S = ab\sin\hat{\mathrm{C}},$$

$$\frac{A}{B}=\left[\frac{a(b^2+2S)}{b(a^2+2S)}\right]^2=\left[\frac{b+a\sin\hat{C}}{a+b\sin\hat{C}}\right]^2.$$

On peut alors étudier le rapport

$$r=\frac{b+a\sin\hat{C}}{a+b\sin\hat{C}};$$

en posant $t=\frac{b}{a}$,

$$r(t)=\frac{t+\sin\hat{C}}{t\sin\hat{C}+1}$$

sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Cette fonction est strictement croissante de $\sin\hat{C}$ pour $t=0$ à $\frac{1}{\sin\hat{C}}$ pour $t=+\infty$, en passant par la valeur 1 pour $t=1$.
La courbe représentative est une branche d'hyperbole

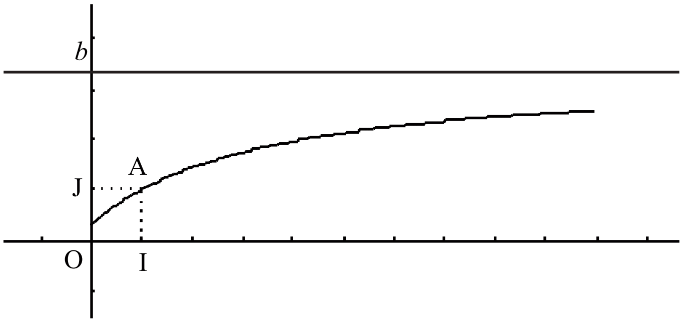

Figure 8

On en déduit que

$$a\geq b\Rightarrow t\leq 1\Rightarrow \frac{A}{B}\leq 1\Rightarrow A\leq B$$

et plus généralement

$$\boxed{a\geq b\geq c\Rightarrow A\leq B\leq C}$$

résultat peu visible sur une figure et qui généralise ce que nous avions déjà remarqué pour le triangle rectangle : le carré posé sur l'hypoténuse (le plus grand des côtés) est plus petit que celui « posé » sur les côtés de l'angle droit.