Comment inscrire une ellipse dans un parallélogramme avec Cabri II ?

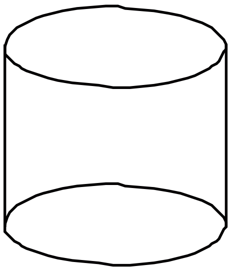
Michel Rousselet

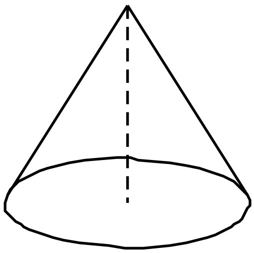
Résumé *: Cabri II permet le tracé d’une conique à condition de connaître cinq de ses points. Comment peut-on utiliser cette commande pour inscrire une ellipse dans un rectangle ou dans un parallélogramme ? Peut-on fabriquer une macrocommande ?*

Pourquoi vouloir inscrire une ellipse dans un rectangle ou dans un parallélogramme ?

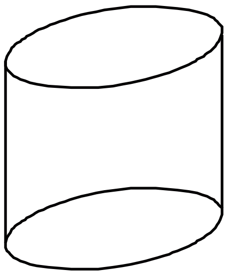
Au Collège, on étudie les **cylindres droits** en cinquième et les **cônes de révolution** en quatrième. Comme les bases de ces solides sont des disques, leurs contours sont représentés en perspective cavalière par des **cercles** ou des **ellipses**. On trouve essentiellement deux types de vues perspectives.

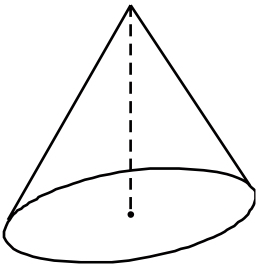
– Les unes utilisent un angle de fuite de 90° : si R désigne le rayon du cercle de base, celui-ci est représenté par une **ellipse** inscrite dans un **rectangle** de dimensions R et $\frac{R}{2}$. L’ellipse est tangente aux côtés du rectangle en leurs milieux.





– Les autres, moins fréquentes, utilisent un angle de fuite différent de 90°. On prend souvent 45°.

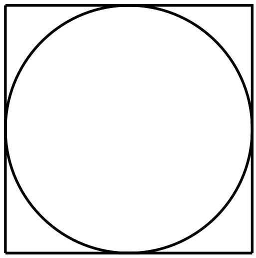




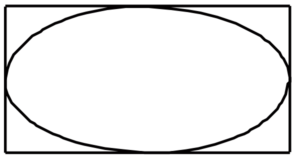
La base de chaque solide est alors limitée par une **ellipse** inscrite dans un **parallélogramme** et tangente à ses côtés en leurs milieux.

Un problème de construction

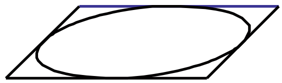
Soit R le rayon de la base du solide à représenter. Désignons par α l'angle de fuite de la perspective cavalière et par k son coefficient de réduction. En perspective cavalière, le carré qui contient la base est représenté, selon le cas, par un rectangle ou par un parallélogramme qu'il est facile de construire.



Vraie grandeur :
carré de côté R.



$\alpha = 90°,\ k = \dfrac{1}{2}$.



$\alpha = 45°,\ k = \dfrac{1}{2}$.

Utilisation de la commande* Conique *de Cabri II

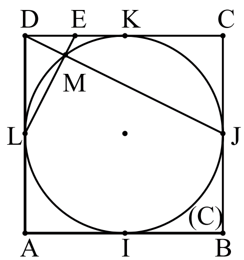
Pour tracer une ellipse avec Cabri II, il faut utiliser la commande *Conique* qui figure dans la boîte des courbes. Mais cette commande suppose qu'on connaisse cinq points de la conique. Or, nous ne connaissons que quatre points : ce sont les milieux des côtés du quadrilatère (parallélogramme ou rectangle) dans lequel on veut inscrire cette ellipse. Comment trouver le cinquième point ?

À la recherche du cinquième point de contact

Rappelons-nous qu'une ellipse inscrite dans un parallélogramme ou dans un rectangle peut toujours être considérée comme l'image, par une transformation affine, d'un cercle inscrit dans un carré. Comme les transformations affines conservent les alignements et les milieux, il nous suffit de résoudre le problème dans le cas d'un cercle (C) inscrit dans un carré ABCD et tangent en I, J, K et L, milieux respectifs des côtés de ce carré.

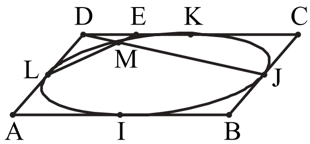
Soit E le milieu de [DK] et soit M l'intersection de [LE] et de [JD].

Il est facile de démontrer que M est un point du cercle (C). Le problème est donc résolu : M sera notre cinquième point de contact.



Une macrocommande

Soit I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] d'un parallélogramme ABCD. Soit E le milieu de [DK] et soit M le point commun aux segments [LE] et [DJ]. Utilisons la commande *Conique* pour construire l'ellipse qui passe par I, J, K, L et M. Cette ellipse est inscrite dans le parallélogramme ABCD et tangente à ses côtés.



Pour réaliser la macrocommande, il faut désigner dans cet ordre les sommets A, B, C et D du parallélogramme comme *objets initiaux* et désigner l'ellipse comme *objet final*. On pourra nommer cette macrocommande *Inscrire une ellipse* et l'enregistrer sous le même nom. La macrocommande ainsi construite servira également pour les rectangles et les carrés.

Bibliographie

– Gérard Audibert. La perspective cavalière. Publication nº 75 de l'APMEP.
– Bernard Destainville. Enseigner la géométrie dans l'espace au Collège et au lycée. Publication nº 99 de l'APMEP.
– Henri Lebesgue. Les coniques. Réédition Jacques Gabay. 1988
– Lespinard et Pernet. Géométrie. Classe de mathématiques élémentaires. Librairie André Desvignes. Lyon 1951.