Un sujet du baccalauréat néerlandais

Le VWO, examen qui couronne aux Pays-Bas l'enseignement général, est très différent du baccalauréat français : le candidat choisit librement sept disciplines, avec la seule obligation que parmi elles figurent le néerlandais et au moins une langue vivante. Il existe deux programmes de mathématiques. Le programme B est un programme scientifique pas très éloigné de celui de notre S. Le programme A part de contenus plus modestes et se propose d'entraîner les élèves à la résolution de problèmes concrets, ce qui conduit à des énoncés très différents de ceux auxquels nous sommes habitués.

Nous donnons ci-après un texte de ce genre. Il est ancien, mais on ne trouve pas tous les jours une bonne âme qui accepte de vous procurer et de vous traduire une épreuve d'examen. D'ailleurs, si les programmes changent très vite dans certains pays, dont le nôtre, le style des épreuves est assez constant. Qu'on relise pour s'en convaincre quelques textes de baccalauréat de 1990 !

WWO Examen 1991, mathématiques A (durée : 3 heures)

PROBLÈME 1 : Le vent et le froid

Si par temps de grand froid on expose à un fort vent le visage d'une personne, des gelures peuvent survenir très rapidement. Les Américains Siple et Passel furent vers 1940 parmi les premiers à effectuer dans l'Antarctique une recherche sur la relation entre la perte de chaleur de la peau H, la vitesse du vent w et la température T. À partir de leurs premières mesures, par vent assez faible, ils ont établi un modèle dans lequel la relation entre H, w et T était décrite par la formule :

$$\mathrm{H} = (4{,}2 + 4\sqrt{w} - 0{,}4w)(33 - \mathrm{T})$$

où w est exprimé en mètres par seconde, T en degrés Celsius, H en joules par cm^2 de peau non protégée et par heure.

La figure 1 illustre ce modèle ; y sont dessinées, pour des vitesses de vent allant de 0 à 40 m/s et des températures allant de −50°C à 0°C, les courbes de niveau de la fonction H.

Dans un centre de recherches de l'Antarctique, on arrête de travailler en plein air quand la valeur de H dépasse 800. La figure 1 montre par exemple que c'est le cas lorsque, par −30°C, la vitesse du vent atteint 10 m/s.

1° Calculer la température exprimée par un nombre entier de degrés qui soit la plus basse à laquelle on peut encore travailler en plein air quand la vitesse du vent est de 15 m/s.

2° La figure 1 indique que, pour T = − 20°C, la valeur maximale de H est comprise entre 700 et 800. Calculer cette valeur maximale en se servant des variations de H en fonction de w.

Ce premier modèle de Siple et Passel ne s'appliquait pas à toutes les conditions météorologiques de l'Antarctique. Leurs expériences leur ont permis de découvrir qu'il n'était valable que tant que la vitesse du vent ne dépassait pas 20 m/s. Au-delà, H, à température constante, ne changeait plus ; ils ont donc adapté le modèle en conséquence.

3° À l'aide d'une figure, expliquer ce que devient la forme des courbes de niveau de H dans le second modèle. On choisira pour cela les mêmes axes que sur la figure 1 ; on se contentera de dessiner deux de ces courbes.

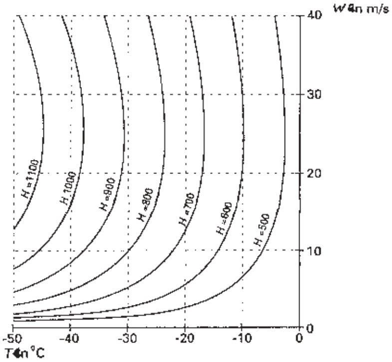


Figure1

4° Élaborer une formule permettant de calculer H pour des vitesses du vent de 20m/s et plus.

La recherche de Siple et Passel a eu pour conséquence qu'aux États-Unis on mentionne aux nouvelles météo, outre la température, le facteur dit « windchill(1) ». Pour $T = -5$ et $w = 10$, le facteur « windchill » vaut $F = -22$, ce qui veut dire que la combinaison d'une température de –5°C et d'un vent de 10 m/s provoque une sensation de froid équivalente à une température de –22°C sans vent. Pour un temps sans vent, on retient $w = 1{,}8$ m/s, qui correspond à la sensation éprouvée par un promeneur en l'absence de vent. Pour calculer F, on procède comme suit :
• pour une température et une vitesse de vent données, on calcule d'après le second modèle de Siple et Passel la valeur correspondante de H ;
• on calcule ensuite la température fictive qui, combinée à $w = 1{,}8$ m/s, donnerait la même valeur de H ;
• on arrondit cette température au degré le plus proche ; la valeur obtenue est F.

5° Calculer le facteur « windchill » pour une température de –10°C et une vitesse du vent de 16 m/s.

PROBLÈME 2 : Bibliothèque

Une bibliothèque municipale achète chaque année de nouveaux livres. Pour 1992, elle dispose à cet effet de 105 000 fl (florins). Une réunion entre les chefs des trois départements (livres pour jeunes, romans, documentaires) est consacrée à la répartition de cette somme ; Madame De Rooy, chef du département *Romans*, propose de répartir la somme proportionnellement au nombre de prêts effectués en 1990 (voir figure 2).

Département	Livres pour jeunes	Romans	Documentaires
Prêts en 1990	106 436	115 915	48 479

Figure 2

(1) *Wind* : le vent ; *chill* ; le froid.

6° Calculer les sommes que recevront les trois départements si la proposition de Madame De Rooy est acceptée.

Madame Jansen, chef du département *Livres pour jeunes*, propose d'acheter au total le plus grand nombre de livres possible, tout en respectant certains impératifs :
• les départements *Jeunes* et *Romans* doivent pouvoir acheter chacun au moins 1 200 livres ;
• le département *Documentaires* doit pouvoir acheter au moins 400 livres ;
• le département *Jeunes* ne doit pas recevoir plus d'argent que le département *Romans* ;
• le département *Jeunes* ne doit pas recevoir plus de trois fois la somme attribuée au département Documentaires.

Pour étudier cette proposition, on partira des prix moyens suivants : 15 fl par livre pour jeunes, 24 fl par roman, 30 fl par documentaire. On désignera par j, r et $105\,000 - j - r$ les sommes destinées respectivement aux départements *Jeunes*, *Romans* et *Documentaires*. Des conditions exprimées plus haut découlent cinq conditions limitatives portant sur j et r.

7° Trouver ces cinq conditions et représenter dans un repère orthonormal Ojr le domaine dans lequel elles sont toutes cinq satisfaites.

8° Calculer combien de livres chaque département pourra acheter si la proposition de Madame Jansen est acceptée.

Le chef du département Études, Madame Smit, trouve que dans ces deux propositions la somme affectée au département *Jeunes* est trop élevée. Elle rappelle que l'abonnement est gratuit pour les jeunes alors que la cotisation des adultes augmente chaque année. Elle entend souvent les gens se plaindre de cotiser toujours plus alors que le nombre de livres n'augmente guère. Elle pense que beaucoup d'adultes envisagent pour cette raison d'arrêter leur abonnement.

Les autres estiment que cette opinion est exagérée et pensent qu'au plus 5% des adultes envisagent de renoncer. Madame Smit estime que le pourcentage est plus élevé. Il est décidé de faire, avant d'affecter les crédits, un sondage auprès des abonnés adultes pour savoir si Madame Smit a raison. On interroge pour cela 100 personnes choisies au hasard dans le fichier.

9° Calculer combien il devra se trouver parmi elles de personnes envisageant de mettre fin à leur abonnement pour la raison indiquée, pour que l'on puisse estimer que Madame Smit a raison au seuil de signification de 2,5%.

PROBLÈME 3 : Ensoleillement

Dans la conception de bâtiments, on accorde une certaine importance au degré d'ensoleillement. On adopte toujours le point de vue d'un ciel sans nuages. Dans ce problème, on se limite à des bâtiments aux façades verticales, non situées à l'ombre d'autres bâtiments. En outre, on considère que l'année a 365 jours. Le tableau 1 indique le nombre de jours par mois

mois	jan	fév	mar	avr	mai	jun	jul	aou	sep	oct	nov	déc
nombre de jours	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Tableau 1

Le graphique ci-après en annexe donne le nombre B d'heures de soleil au jour n ; les jours sont numérotés de 1 (1er janvier) à 365. On y a indiqué également le nombre d'heures d'ensoleillement pour la façade sud-ouest (B_{SW}) et pour la façade nord (B_N). On notera que la façade nord ne reçoit le soleil qu'une partie de l'année.

Au jour n (où $n = 1, 2, 3, \ldots, 365$), on a : $B = 12{,}3 + 4{,}6 \sin \dfrac{2\pi}{365}(n - 80)$.

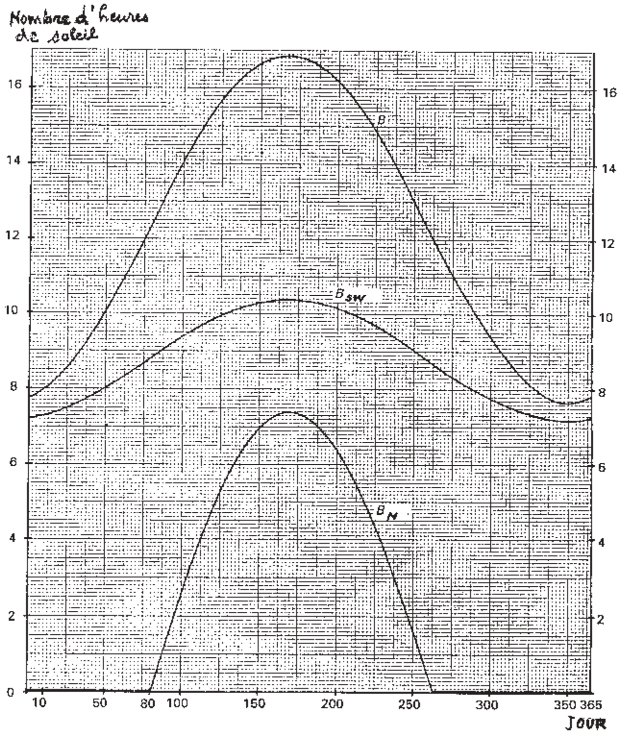
Le 30 janvier, le soleil se lève à 8 h 27.

10° Calculer à l'aide de la formule ci-dessus à quel instant le soleil se couche le 30 janvier (on l'indiquera avec précision, en heures et minutes).

11° Montrer par un calcul que le 12 avril est le premier jour de l'année où le soleil brille plus de 14 heures.

On admet que les points de la représentation graphique de B_{SW} sont sur une sinusoïde.

12° Donner une équation de cette sinusoïde en utilisant la courbe tracée sur le graphique donné ci-dessous.



Les façades opposées d'un bâtiment rectangulaire ne peuvent être éclairées simultanément par le soleil.

13° Figurer sur le graphique donné en annexe la courbe représentant le nombre d'heures d'ensoleillement d'une façade sud.

PROBLÈME 4 : Perturbations

Elsa est laborantine dans un laboratoire de bactériologie. Elle doit souvent effectuer des comptages avec un microscope dans une culture de fibres. Ce comptage doit être fait très précisément. Si le téléphone ou un collègue tire Elsa de sa concentration, elle doit tout reprendre à zéro.

Pour étudier cette situation et d'autres comparables, on établit dans ce problème un modèle partant de deux hypothèses. On suppose d'abord que :

a) toute perturbation se termine à la fin de la minute où elle a commencé.

Dans la figure 3, on a représenté schématiquement une situation pour laquelle Elsa a eu besoin de 13 minutes pour un comptage qui aurait duré 5 minutes sans perturbations. Aux 3e, 4e et 8e minutes, sont survenues des perturbations. Au début des 4e, 5e et 9e minutes, Elsa a donc recommencé son comptage à zéro ; elle n'a pu aller jusqu'au bout du comptage que la dernière fois. Le temps total écoulé jusqu'à l'achèvement de l'opération sera nommé *temps total de comptage* T.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		p	p				p					

Figure 3

Il est arrivé que le temps de comptage d'Elsa dure 25 minutes pour un comptage qui, sans perturbation, aurait duré 8 minutes.

14° Combien de perturbations au moins Elsa a-t-elle subi ? Justifiez votre réponse.

On ajoute maintenant pour établir le modèle une seconde hypothèse :

b) Pour chaque minute, la probabilité qu'il n'y ait aucune perturbation est 0,9.

Soit W la valeur attendue du nombre total de minutes de comptage pour un comptage qui sans perturbations durerait n minutes. Dans le modèle, la formule donnant W est : $W = 10\,(1{,}111^n - 1)$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$

15° Calculer à l'aide de cette formule la plus grande valeur de n pour laquelle la valeur attendue est inférieure à 20.

Dans ce qui suit, nous ne prendrons en compte que les comptages qui sans interruption dureraient 8 minutes (donc $n = 8$). Pour avoir une idée sur la probabilité d'obtenir dans la pratique telle ou telle valeur du temps total de comptage, on a effectué une simulation sur ordinateur. Étant donné que dans un cas le temps total de comptage dépassait 50 minutes, les résultats ont été regroupés en classes. Le tableau 2 donne les classes (temps de comptage en minutes) et les effectifs correspondants (nombre de cas).

classe	8min	9-12min	13-16min	17-20min	21-28min	29-36min	39-52min	53-68min	Total
effectif	842	351	346	182	192	57	27	3	2 000

Tableau 2

À l'aide des données du tableau 2, on peut estimer quel serait le temps total de comptage moyen de ces 2 000 cas.

16° Calculer cette estimation en attribuant à chaque classe le temps total moyen qui lui correspond. On donnera la réponse arrondie au dixième de minute le plus proche.

La probabilité d'un temps total de comptage k, dans les conditions énoncées, est notée $P(T = k)$, avec $k = 8, 9, 10, \dots$ Dans le tableau 2, on voit que, dans 842 cas sur 2 000, T = 8. La fréquence $\frac{842}{2\,000} = 0{,}421$ donne une indication sur la valeur de $P(T = 8)$.

17° Montrer que la véritable valeur de $P(T = 8)$ est 0,430 avec une précision de 3 décimales.

18° Calculer avec la même précision $P(T = 10)$.

Les effectifs relatifs aux classes « 9 à 12 » et « 13 à 16 » sont peu différentes dans la simulation sur ordinateur.

19° Examiner si les probabilités $P(T = 9)$, $P(T = 10)$, $P(T = 11)$, …, $P(T = 16)$ sont égales.

Remarque. *Sauf en probabilités et statistiques, les connaissances nécessaires sont relativement modestes, ce qui s'explique par le fait que l'épreuve n'est pas destinée en priorité aux futurs scientifiques.*

Le texte est très long ; le candidat doit donc consacrer pas mal de temps au « débroussaillage » des données. Il est peu guidé : sur les 19 questions, deux seulement sont du type « montrez que ».

Si les exigences formelles en matière de rédaction sont moindres que les nôtres (ce que confirment le barème et les instructions données pour la correction), l'effort de réflexion personnelle demandé est supérieur à ce que nous attendons de nos bacheliers.