Sur le rôle des mathématiques dans la société d'aujourd'hui (*)

Nicolas Bouleau

Durant ces dernières décennies, la tertiarisation des activités, les préoccupations environnementales et le développement de l'informatique ont modifié les modalités d'intervention des connaissances dans l'activité économique. Les décisions publiques et privées se prennent dans des situations complexes où non seulement les points de vue, intérêts, systèmes de valeurs, divergent et s'affrontent, mais où leur expression fait intervenir des savoirs techniques. La *modélisation* comme outil de représentation, d'analyse et de prospective devient une langue interdisciplinaire de plus en plus importante. Elle utilise bien sûr la physique, les autres sciences de la nature, l'économie et des connaissances spécifiques au problème posé, mais sa nature et ses difficultés sont essentiellement mathématiques. Le principal enjeu de la formation des ingénieurs (au sens large) est de savoir s'exprimer dans cette langue et aussi d'être à même de *critiquer* grâce à elle d'autres discours techniques.

La question « à quoi servent les mathématiques ? » a reçu de nombreuses réponses des philosophes, mais il en est une dont il faut parler en premier lieu parce qu'elle domine les autres par le prestige qu'elle confère à cette discipline. Elle s'exprime par l'apophtegme de Galilée : *le livre de la nature est écrit en caractères mathématiques*. Belle idée. Il s'agit d'une émotion, d'une mystique quasi-religieuse. Sans doute doit-on s'émerveiller que les planètes tournent, en première approximation, sur des ellipses en suivant la loi des aires, que les raies d'absorption des atomes soient proportionnelles à des inverses de carrés de nombres entiers et constituent les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint, etc. C'est une grande motivation que les mathématiques pures fournissent des idées qui perfectionnent notre compte rendu du monde naturel. Mais ce n'est là qu'un versant très partiel des enjeux des mathématiques.

En restant dans l'abstrait, on échappe difficilement aux ornières de pensée initiées par Galilée et dans lesquelles on est passé et repassé ensuite. Aussi prendrai-je immédiatement des exemples qui mèneront le débat vers des registres moins convenus.

D'abord une comparaison. Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, les ingénieurs disposent de mathématiques conceptuellement très avancées pour calculer les pièces des machines, les effets thermiques et électriques, mais ils ne savent résoudre les problèmes numériquement que dans des configurations géométriques particulières avec des fonctions spéciales et des changements de variables astucieux. Au XX^e siècle, grâce à la notion d'espace de Hilbert et plus généralement d'espace fonctionnel, les fonctions sont traitées comme des points avec des coordonnées et l'ingénieur sait construire pour tous les problèmes de la physique des algorithmes de

(*) Conférence faite à la journée régionale de l'APMEP, le 28 mars 2001, à l'IUFM de Grenoble.

résolution qui seront popularisés par l'informatique, notamment sous la forme des programmes aux éléments finis. On ne cherche plus tant une formule explicite qui a le droit de figurer dans le Livre de la Nature, qu'un procédé effectif et approché pour une situation quelconque. D'un point de vue philosophique, la beauté s'est déplacée. Elle réside maintenant dans la généralité et la puissance du *langage* (ici de l'analyse fonctionnelle) pour aborder les situations les plus variées.

Ceci n'est pas propre au cas des problèmes aux limites. Dans les années 1930, la théorie de l'information de Claude Shannon et la théorie des processus stationnaires de Norbert Wiener élaborent un langage plus riche qui débouche sur de nouvelles procédures opérationnelles en traitement du signal. Les techniques se modifient pour la fabrication de dispositifs de filtrage des bruits, d'automatismes de régulation et donc des compétences et des métiers apparaissent, fondés sur ces nouvelles sciences de l'ingénieur. On pourrait citer de même le calcul stochastique dans la seconde moitié du XX^e^ siècle. Avec le développement prodigieux de l'informatique, ces dernières décennies, les nouvelles possibilités d'expression se traduisent, et c'est. à mes yeux un phénomène historique majeur, par de nouvelles capacités à agir. On entre dans l'ère de la modélisation. Celle-ci ne se limite pas à la mise en œuvre de représentations ou d'algorithmes puisés dans le corpus mathématique, elle modifie profondément la nature même des pratiques sociales dans les champs les plus divers.

Regardons de plus près *l'exemple du génie des matériaux* qui illustre bien l'importance et la difficulté du dialogue entre les acteurs.

D'un côté les laboratoires proposent de nouveaux matériaux. Ils sont proches des établissements d'enseignement supérieur et disposent de savoirs théoriques. Par application de certains effets physiques, de nouvelles synthèses chimiques ou encore par la mise en œuvre de certains appareillages, ils fournissent des corps aux caractéristiques innovantes.

D'un autre côté, l'industrie s'appuyant sur le marché, attend la solution de problèmes mal résolus. Les Américains disent « sciences push and markets pull », les sciences poussent et les marchés tirent. Plus précisément la science fournit des solutions en attente de problèmes alors que la technique et le marché posent des problèmes en attente de solutions.

Il est incontestable que *l'apparition d'un matériau* aux propriétés nouvelles, tel que la recherche est capable d'en produire, un gel de silice par exemple, viendra modifier le jeu des questions-réponses dans l'évolution technique. Ainsi ce double mouvement est une dialectique nécessaire de l'innovation, il prend du temps. Des matériaux peuvent dormir plus de dix ans sur les étagères des laboratoires avant de participer à un processus de développement industriel. Les cristaux liquides sont restés longtemps des curiosités avant qu'on en fasse des thermomètres chromatiques et des affichages de montre puis d'ordinateur.

La modélisation se révèle un outil de dialogue et un langage prospectif. Les laboratoires, en plus d'expériences matérielles qui restent, par nature, coûteuses et limitées à un choix de températures, de concentrations et autres caractéristiques des dispositifs, élaborent des modèles des matériaux étudiés. Ces modèles sont simplement des écritures informatiques de représentations mathématiques des propriétés des corps conformes aux lois physiques, simplifiant éventuellement certains aspects considérés comme secondaires, afin que les résolutions d'équations et l'algorithmique se déroulent assez rapidement pour qu'on puisse observer les réponses du « matériau » aux actions qu'on lui fait subir. L'avantage d'avoir un tel modèle est qu'on peut maintenant faire varier les paramètres constitutifs du corps étudié, les proportions des mélanges, les températures de changement de phase, les constantes diélectriques, les lois rhéologiques, voire même, pourquoi pas, les constantes physiques telles que la constante électrostatique ε_0 ou la constante de Planck h afin de rendre plus apparent tel effet électrique ou quantique. On est alors presque dans la fiction. Mais le dialogue peut s'engager. Parmi ces corps virtuels, dont certaines propriétés sont hypertrophiées, l'industriel peut déceler des idées pour aller au-devant de la demande. On a une piste, vers un objet caricatural certes mais susceptible d'amélioration et de modifications. Les chercheurs et les entreprises peuvent envisager des étapes dans l'investigation, solliciter des aides publiques pour les atteindre, une compréhension mutuelle s'élabore qui permet à chacun de percevoir mieux les obstacles qui s'imposent à l'autre.

Les laboratoires de recherche universitaires sont dotés maintenant de puissants moyens informatiques et l'activité de modélisation y est devenue prépondérante, surtout parmi les jeunes durant la thèse et le post-doctorat. Elle est essentiellement mathématique : résolution des problèmes physiques faisant souvent intervenir des équations aux dérivés partielles, linéaires ou non linéaires, par des méthodes numériques d'analyse fonctionnelle, de simulation probabiliste (méthode de Monte-Carlo) ou de représentation par des familles de fonctions simples (fonctions splines, ondelettes, etc.). Évidemment cette mathématique est le plus souvent mise en œuvre par des physiciens, des chimistes, des ingénieurs et autres praticiens.

On pourrait prendre aussi bien l'exemple de l'effet de serre et du changement global et plus généralement la question des outils de la décision collective en matière d'environnement, d'études d'impact, etc. Ce qui apparaît partout, c'est que les mathématiques n'interviennent plus ni comme le pensait Galilée ni comme l'imaginaient les penseurs issus des Lumières tels que Auguste Comte, Mill, Renan, Claude Bernard que l'on a coutume d'appeler les modernes. Les savoirs ne descendent plus de la théorie vers l'action ainsi rationalisée. La situation est presque retournée : les hommes, les entreprises, les lobbies agissent en se servant au mieux de leurs intérêts de langages hybrides partiellement formalisés qui s'enracinent plus ou moins dans les connaissances objectives pour élaborer des dossiers les plus convaincants possibles auprès des clients, des actionnaires ou des autorités.

Ceci nous laisse entrevoir une autre façon de concevoir les mathématiques aujourd'hui.

J'aborderai cette question en partageant mon propos en deux parties. La première consiste à tirer les enseignements de la modélisation pour comprendre le rôle des mathématiques comme *discipline d'expression*. Ce sera la partie la plus importante. Dans la seconde, j'aborderai la place de *la pensée critique* vis-à-vis de la modélisation, ce qui est un enjeu de société qui dépasse les mathématiques mais où elles subissent particulièrement l'effet de certaines ambiguïtés.

1. La modélisation et le rôle des mathématiques comme moyen d'expression

Il convient d'abord de revenir sur la forme que prend le modernisme en mathématiques afin de donner plus de clarté et de contraste à notre discussion.

Le terme « moderne » n'a pas le même sens en histoire des idées et en mathématiques, mais les deux acceptions sont liées. La seconde est la forme particulière prise par la première dans une discipline ayant son développement historique spécifique. On situe généralement la période moderne en mathématique du début du XIX^{e} siècle à la fin de Bourbaki, cette fin étant en soi une question à débattre. Mais l'œuvre monumentale de Bourbaki marque le paysage mathématique d'un point de vue si net et si tranché qu'il devient une référence pour toute réflexion ultérieure. Pour aller vite à l'essentiel, on peut voir Bourbaki comme un contre-projet vis-à-vis du logicisme désincarné des *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell, où il n'y a quasiment pas de mathématiques. Dans la lignée des critiques de Poincaré, de Cavaillès et de Lautman, il s'agit d'embrasser vraiment les mathématiques pour ce qu'elles sont : faites d'idées. Au slogan de Russell « Toute mathématique est logique, une des plus grandes découvertes de notre âge », ils opposent la remarque d'André Weil que la logique est l'hygiène du mathématicien, mais qu'elle ne lui donne pas sa nourriture. D'où le travail sur les structures pour donner aux arguments le plus large champ, d'où le traité qui aborde tous les grands domaines de la pratique mathématique, d'où aussi le rêve unitaire, personnalisé surtout par Jean Dieudonné, de proposer *la* bonne façon de penser toute *la* mathématique.

Avec ce regard, la pédagogie des *maths modernes* dans les lycées et collèges apparaît comme une imitation de Bourbaki, ratée pour maintes raisons, qui fait retomber chez Russell.

Le trait le plus marquant du modernisme tel que Bourbaki le révèle est cette *approche unitaire* : que le sens de chaque notion soit le même pour tous (et, dans le secondaire, que chaque élève n'utilise pour raisonner que ce qui a trait à l'appartenance d'un élément à un ensemble, à l'exclusion de toute autre intuition).

Or ce n'est pas ainsi que les mathématiques se sont reliées historiquement aux autres sciences et que les notions se sont chargées de sens.

Que peuvent être au contraire des mathématiques sujettes à une pluralité d'interprétations ? Abandonner l'unité n'est certainement pas détériorer les mathématiques mais plutôt les enrichir, non pas revenir à des particularités qui limitent la portée des raisonnements mais ouvrir à des méthodes et des fils conducteurs non classiques. Par rapport au platonisme, tel que René Thom le présente très clairement, où l'intuition accède à des objets idéaux qui sont imparfaitement décrits par des formalismes comme des cartes locales décrivent une variété, la philosophie pluraliste considère au contraire que toute *situation* mathématique peut être lue ou comprise, de diverses façons, selon de multiples intuitions qui sont autant de lampes pour éclairer la complexité.

Si l'on y prête concrètement attention, l'intuition est locale. Il ne faut pas s'illusionner par idéalisme : une bonne intuition, comme une lanterne, n'éclaire bien qu'une partie de la forêt. Lorsque Lagrange interprète la tangente à une courbe comme une droite la coupant en deux points confondus, il ouvre des voies nouvelles vers la géométrie algébrique, mais cette définition de la tangente ne s'étend pas aux courbes qui ne sont pas analytiques. Lorsque l'on interprète les probabilités par des masses positives, cette analogie mécanique permet de penser l'espérance comme un centre de gravité, ramène la méthode statistique de l'analyse en composantes principales à la recherche d'axes d'inertie, et permet d'établir facilement certaines inégalités, mais on n'arrivera pas à interpréter ainsi l'indépendance.

La théorie du potentiel est un exemple historique typique où la polysémie apportée par les interprétations successivement découvertes a été source de résultats mathématiques nouveaux importants. Les questions relatives aux fonctions harmoniques, aux potentiels en $1/r$, qui s'interprétaient classiquement par la théorie de la gravitation de Newton ont été grandement renouvelées lorsqu'on a disposé de l'interprétation électrostatique. Le problème de l'équilibre, les potentiels en double couche, les dipôles sont devenus des notions naturelles, l'idée de conducteur donnant place à la notion de *capacité* fut le germe d'un outil récent d'une puissance remarquable, difficilement imaginable en théorie newtonienne. L'interprétation en termes de théorie de la chaleur donna quant à elle un sens direct au problème dit de Dirichlet et fit apparaître le lien avec les semi-groupes d'opérateurs. Et puis on découvrit au vingtième siècle une quatrième interprétation, probabiliste, fondée sur le mouvement brownien grâce à laquelle Doob établit une propriété du rapport de deux fonctions harmoniques positives lorsqu'on s'approche de la frontière qu'il ne parvint à démontrer sans l'outil probabiliste qu'un an plus tard.

D'une façon générale, les travaux du passé ne sont pas dépassés par l'interprétation ensembliste, ils rivalisent avec elle avec succès dans bien des questions et on peut dire aujourd'hui que les interprétations issues de la physique, de la mécanique et des jeux de hasard dominent de plus en plus les recherches récentes.

Une image philosophique différente à la fois du platonisme et du structuralisme mérite d'être ici mentionnée. Elle est née chez les logiciens qui savent, depuis Lowenheim et Skolem (1915-1920), que les systèmes formels utilisés en mathématiques ont plusieurs interprétations non équivalentes. À la suite de travaux de théorie de la démonstration, a été dégagée une correspondance, sorte de dictionnaire, entre des notions de programmation informatique et des notions de déduction mathématique, la correspondance de Curry-Howard, tout à fait fascinante en elle-même, véritable provocation philosophique. Tirant les enseignements de ces idées, Jean-Louis Krivine propose une interprétation du rôle du mathématicien. Alors qu'en informatique, les programmes écrits en langages de haut niveau (tels que Pascal, C, etc.) qui sont proches des termes mathématiques eux-mêmes sont traités par un compilateur qui en donne un code binaire exécutable par la machine mais incompréhensible facilement, le cœur du travail du mathématicien consisterait à faire l'inverse : à partir d'un code et de son action sur la machine, trouver un langage qui reste en relation de rigueur avec la situation et qui soit compréhensible. C'est l'image du *mathématicien décompilateur*.

Elle est intéressante à plus d'un titre, d'abord parce qu'elle clarifie le problème philosophique fameux du rapport de l'homme et de la machine, mais aussi parce qu'elle met au centre de l'élaboration mathématique la découverte d'interprétation.

Mais venons-en à la modélisation qui est l'objet principal de notre propos.

Distinguons en premier lieu modèle et modélisation. Le terme de modèle est arrivé en français de l'italien à la Renaissance. Il désignait originellement celui ou celle qui pose dans l'atelier du peintre ou du sculpteur ainsi que les maquettes de bois accompagnant les plans pour faciliter la conduite des chantiers des édifices délicats tels que ceux conservés pour le dôme de Florence de Brunelleschi. Puis le mot s'est vu associer l'idée d'exemplarité, petites filles modèles, ouvriers modèles, etc. Dans la science cependant, il prit le sens particulier de schéma simple qui fait comprendre, proche du paradigme de Kuhn, modèles de l'atome, modèle d'Ehrenfest, puis, la simplicité étant finalement affaire relative, modèle standard en physique quantique, etc.

Par modélisation nous entendrons quelque chose d'assez différent : la construction d'une représentation pour l'action et la décision qui n'utilise pas uniquement le langage ordinaire. C'est donc très général, et ce n'est pas lié à une démarche scientifique nécessairement. Nous avons à l'esprit typiquement les dossiers que réalisent les ingénieurs qui, le plus souvent, ne disposent pas d'une théorie générale comme cadre de leur action.

La modélisation, en ce sens, présente trois caractéristiques qui font mieux apparaître ce dont il s'agit.

D'abord une modélisation est inscrite dans un *site social*. Elle est faite par quelqu'un (un bureau d'étude, un laboratoire de recherche, une entreprise, un groupe de pression, une association, etc.) pour quelqu'un (le commanditaire, un comité de décision, une entreprise, une collectivité locale, un État, etc.) et concerne un lieu géographique, économique précis. Bien sûr on peut aussi faire des modélisations comme ça, en blanc, comme on peut s'entraîner à rédiger des textes pour l'exercice de la langue, nous y reviendrons, de la même façon qu'on peut faire des projets d'architecture sur le papier pour apprendre ou pour les revues d'art, mais il n'en reste pas moins que les projets intéressants sont ceux qu'on discute préalablement à leur réalisation.

Que la modélisation soit à penser *en situation* modifie complètement les critères par rapport à une démarche qui serait de connaissance scientifique. Le cas des modèles de trafic est révélateur à cet égard : pour rendre compte du déplacement des véhicules dans une agglomération, l'ingénieur dispose d'une hiérarchie de modèles des plus grossiers aux plus fins : modèles dits « origine-destination » qui ne retiennent que le nombre de déplacements d'une zone à une autre de la ville, modèles hydrologiques qui voient le trafic comme un liquide qui ne peut s'écouler que si les voies sont de capacité suffisante, modèles particulaires où les véhicules sont individualisés et les calculs menés en réseaux de files d'attente avec des lois de comportements pour les déplacements. Entre les modèles grossiers qui sont faciles à calibrer avec les mesures disponibles et les modèles fins qui ont tellement de fonctions inconnues qu'ils nécessiteraient des mesures très coûteuses, l'ingénieur ne peut choisir que s'il sait à qui va servir le modèle. S'il s'agit d'aider un organisme de planification, les modèles origine-destination suffiront ; s'il s'agit de gérer les feux rouges d'un quartier, des modèles spécifiquement travaillés seront nécessaires. Atteindre dans un modèle la réalité ultime du trafic est illusoire : une proportion significative et inconnue d'automobilistes a des informations sur le trafic dans lequel ils se trouvent.

Seconde caractéristique, la modélisation utilise un *langage hybride*. Cette langue semi-artificielle des dossiers techniques qui est constituée de langage ordinaire, de langage des sciences et de ces corpus qui ont une grande valeur pragmatique, les sciences de l'ingénieur, acoustique, géotechnique, hydraulique, etc., où l'on rencontre des termes spécifiques mi-intuitifs mi-scientifiques qui, malgré leur imprécision, rendent un immense service concret, tel que « crue décennale » par exemple. On doit mentionner ainsi l'usage des *sciencettes*, constructions théoriques simplifiées (ou asymptotiques) qui, quoique fausses et reconnues telles, sont universellement utiles : la R.d.M. (résistance des matériaux), l'optique de Gauss, la houle linéaire d'Airy, le monde probabiliste gaussien (où tout est linéaire), etc.

Par le simple fait que la modélisation utilise en plus du langage ordinaire des symboles issus directement ou indirectement des sciences, les mathématiques y jouent un rôle fondamental : elles sont le lieu de pensée où l'on peut évaluer que deux modélisations reviennent au même, ou sont un cas particulier l'une de l'autre, etc. L'analyse sémantique de la modélisation relève des mathématiques pour une part importante, souvent cruciale.

Enfin la modélisation présente une troisième caractéristique, qui la distingue encore plus nettement des théories scientifiques idéales : la *sous-détermination*. Évidemment, il y a plusieurs façons de modéliser, on peut prendre la situation sous divers angles de vue, nous l'avons dit pour le trafic, mais il est une indétermination beaucoup plus profonde qu'il est bon d'avoir présente à l'esprit pour ne jamais prendre une modélisation pour argent comptant. On peut aborder ce phénomène philosophiquement et par des exemples concrets.

Philosophiquement, cela prolonge l'œuvre de Willard Van Orinan Quine (1908-2000), logicien-mathématicien, ayant participé aux heures glorieuses de la logique, auteur de traités de référence (*Mathematical Logic*) et de travaux de recherche originaux (*New Foundations*). Quine s'est tourné ensuite vers la philosophie et a tenté de tirer la leçon des découvertes de la logique mathématique sur les systèmes formels pour l'étude des langues ordinaires. Il argumente que la situation ne saurait être meilleure dans les langues naturelles qu'en mathématique par trois thèses principales : la relativité de l'ontologie, l'indétermination de la traduction, la sous-détermination des théories par l'expérience.

Au demeurant, de nombreux modélisateurs se sont rendus compte du phénomène de sous-détermination indépendamment de Quine, Henri Atlan notamment. Souvent on dispose de plusieurs familles de modèles, chaque famille se présentant comme une théorie en accord avec les faits d'observation et ayant pourtant des implications différentes. Par exemple pour modéliser les crues d'un fleuve il y a des familles (séries temporelles), indéfiniment perfectibles si des mesures nouvelles sont obtenues, et incompatibles si on considère pour l'une les hauteurs d'eau et pour l'autre les débits. Le phénomène est général. Comme on ne dispose que d'un nombre fini de mesures, les théories qui prétendent que telle grandeur est un polynôme, ou une somme d'ondelettes, etc., sont irréfutables. La situation poppérienne où une expérience permettrait de rejeter une théorie est l'exception. Les situations quiniennes sont les plus fréquentes en modélisation : plusieurs modélisations concurrentes peuvent rester en lice malgré les tests expérimentaux les plus sévères qu'on fera.

En résumé, une modélisation est inscrite dans un site socio-économique, elle utilise une langue mélangée de symboles, elle est sous-déterminée par les faits. Les procédures de validation ne font que rejeter les invraisemblances les plus nettes, une modélisation est fondamentalement une interprétation d'une situation, une tentative de rationalisation, une parmi d'autres possibles et imaginables.

Dès lors, vient sur le devant de la scène une conception langagière des mathématiques par la modélisation. Mais non en tant que langage entre l'homme de science et le monde, en tant que langage entre les acteurs sociaux, entre les entreprises, entre les ONG et le modélisateur du climat, entre les experts de Bruxelles et les producteurs de déchets, etc.

À cet égard, il est très significatif que le texte officiel du ministère de l'Éducation nationale sur les mathématiques au collège distingue trois finalités :

A. Les mathématiques comme discipline de formation générale.

B. L'outil mathématique.

C. Les mathématiques comme discipline d'expression.

Les deux premières sont classiques mais restent très importantes. Tout le secondaire est l'acquisition d'un langage mathématique central, indispensable pour la plupart des orientations professionnelles et pour la liberté de l'individu dans le monde actuel où la technique a si grande part. Le vocabulaire que fournissent les notions enseignées constitue un outil de grande nécessité qu'il faut savoir manier.

La troisième finalité est beaucoup plus originale et même surprenante *a priori* : « Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Ainsi que d'autres disciplines, les mathématiques ont en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, figures, graphiques, formules, tableaux, schémas) ». Il s'agit là de la plus grande nouveauté par rapport à l'esprit unitaire des maths modernes. Elle laisse entrevoir une vision des mathématiques fort intéressante où celles-ci fournissent des « mots » nouveaux au langage ordinaire pour s'exprimer. Entamer une telle pratique est possible au collège, cela devient essentiel au lycée et ensuite. Il ne faut pas toutefois sous-estimer la difficulté. L'expression dans le langage hybride, semi-artificiel de la modélisation qui mélange des propos dans la langue de Balzac, des symboles, des chiffres et des déductions, reste un exercice délicat et insuffisamment pratiqué même dans les écoles d'ingénieurs.

Je voudrais citer quelques activités dans l'esprit de cette troisième finalité des mathématiques comme moyen d'expression, en m'excusant auprès des enseignants qui, bien sûr, ont déjà fait, ici ou là, ce genre d'expériences et qui pour certains, je le sais, sont allés bien au-delà.

La résolution par traduction permet de relativiser la puissance des formalismes. Elle est illustrée en premier lieu par la *géométrie analytique* qui permet d'aborder graphiquement des problèmes numériques ou de résoudre par le calcul algébrique des questions géométriques. Les thèmes se prêtant à l'exercice de traduction sont nombreux. Le *calcul propositionnel* maintenant abordé pour introduire à l'informatique s'y prête grâce à l'interprétation ensembliste (intersections et réunions) et à celle des circuits électriques en série ou en parallèle. Le *calcul des probabilités* peut être abordé très tôt dans le cas d'un nombre fini d'événements. Il se prête à des traductions avec le calcul barycentrique. Dès qu'on peut les aborder, les transformations géométriques (homothétie, inversion, etc.) sont par nature des traductions grâce auxquelles on peut tenter de simplifier des problèmes(1).

L'initiation à l'interprétation peut contribuer à restituer une juste place aux mathématiques dans l'opinion. Par exemple une transformation ponctuelle du plan étant donnée par la forme analytique de son résultat sur le point (x, y), on demande de décrire la transformation et ce qu'elle donne d'objets géométriques connus. Vers la fin des études secondaires, les élèves ont aujourd'hui des notions de programmation sur ordinateur. Un exercice extrêmement instructif est *de décrire en français ce que fait un programme non commenté*, qu'on peut expérimenter sur machine et dont on a le texte. Suivant les procédures choisies, qui peuvent être simples et se relier à divers thèmes mathématiques, ce type d'activité peut prendre des formes variées et à divers niveaux. Il a l'immense vertu d'astreindre les élèves à s'exprimer en français pour dire des choses rigoureuses, ce qui est bien sûr excellent.

Est-il possible dès le secondaire d'aborder ne serait-ce que comme sensibilisation le domaine de *la modélisation* ? Même si son niveau naturel est celui des filières scientifiques du supérieur, elle est un tel enjeu de société qu'il est important de familiariser les élèves à l'idée de représenter grâce à des outils mathématiques et à communiquer avec ces représentations. Une voie possible est d'utiliser les fonctions de variables réelles qui sont le principal langage connu des élèves au lycée et de les exercer à l'approximation : une fonction f_0 étant donnée par sa valeur en chaque point d'un intervalle (elle a été par exemple programmée sur ordinateur) dont l'expression analytique (éventuellement compliquée) est inconnue des élèves, il leur est demandé de fournir une bonne approximation f_1 de cette fonction, la définition de la fonction f_1 devant être correcte et utiliser un vocabulaire imposé. La fonction f_1 est le modèle réalisé par chaque élève. On peut corriger l'exercice en estimant l'aire de $|f_0 - f_1|$ sur l'intervalle, ce qui fournit une évaluation de la qualité du modèle, mais il est aussi intéressant d'appréhender la valeur communicante de chaque modèle : on ramasse les formulaires remplis et on les redistribue dans un autre ordre. Chaque élève procède alors à la comparaison de f_0 avec la fonction f_1 décrite par un autre qu'il doit

(1) Intéressante également dans cet ordre d'idée est la « bataille navale géométrique » : chaque élève d'un binôme définit une figure géométrique (par exemple constituée d'un cercle et de deux droites) dans un système de coordonnées. Pour deviner la figure de son adversaire, il tire des droites et non des points. Si à son tour de jouer, il propose ainsi la droite $y = 2x + 1$, son adversaire lui indique tous les points d'intersection de sa figure avec $y = 2x + 1$, etc. Il y a de multiples variantes suivant les figures cachées et les objets qu'on tire, la déduction et la combinatoire ne sont pas absentes de ce jeu qui peut s'organiser en tournoi comme les échecs.

comprendre. Ce type de travaux pratiques peut faire l'objet de spécifications variées, il faut évidemment l'adapter au niveau des élèves. On peut éventuellement itérer le processus en faisant approcher la fonction f_1 dans un autre vocabulaire de fonctions, ce qui donne la fonction f_2, etc. Il est important de faire rédiger des conclusions. L'enseignement de la physique, et aussi de la chimie et de l'économie, fournit évidemment d'excellentes ressources mises en situation, largement exploitées par les enseignants de ces disciplines avec lesquels des rapprochements sont utiles. L'exercice de modélisation est l'équivalent pour les mathématiques de la rédaction pour les lettres : savoir utiliser un langage pour décrire une situation. La difficulté dans le secondaire vient du fait que le vocabulaire disponible est assez restreint ; on ne peut donc y envisager qu'une ouverture en activité d'accompagnement. Mais tel n'est plus le cas dès les premières années de l'enseignement supérieur où la maîtrise de la programmation d'une part, l'introduction de notions de probabilité et de statistiques d'autre part ouvrent un champ immense à la modélisation, largement exploité d'ailleurs dans la pédagogie des formations d'ingénieur.

Il est encore un autre entraînement très formateur s'il est soigneusement mis en œuvre : *l'analyse mathématique de textes scientifiques*. Il consiste à partir de textes de physiciens, de chimistes ou d'économistes du passé, choisis en fonction des connaissances des élèves, de leur faire expliquer en langage moderne ce que font ces auteurs, quel problème ils se proposent de résoudre et comment. C'est l'analogue de l'explication de textes littéraires, mais sur des écrits de savants ou d'ingénieurs. Évidemment une telle analyse peut vite devenir très difficile si les questions sont scientifiquement délicates et la symbolique par trop désuète. Les historiens néanmoins, ont fait une bonne part du travail de tri(2). Ce genre d'anthologie peut accueillir des auteurs célèbres comme Pascal, Condorcet et même Archimède dont certains passages sont exemplaires, mais on a trop tendance à se focaliser sur l'excellence mathématique. Je considère plus pertinent, plus instructif du fonctionnement social véritable, d'étudier des écrits plus ordinaires pris dans les calculs économiques du XIXe siècle (je pense à Jules Dupuit et à Cournot), dans les règlements techniques (par exemple la circulaire Caquot sur la pente des égouts) ou de santé publique, etc.

La modélisation est un si vaste champ qu'aucune pédagogie ne peut prétendre l'embrasser complètement. Déjà le langage ordinaire nécessite un apprentissage patient qui va de pair avec le développement d'une pensée plus fine et plus exigeante. Disposer en plus des moyens d'expression de la chimie, de la physique et des mathématiques, etc., ne simplifie pas la tâche, bien au contraire. Même pour un adulte, l'usage de plusieurs registres de connaissance, de plusieurs disciplines au sein d'une même argumentation, revient à assumer plus de risques d'imprécision, d'erreur ou de fautes par ignorance. Aussi les modélisations, le plus souvent, sont des élaborations collectives (par un bureau de conseil, un laboratoire ou un service d'une entreprise) et prennent la forme de constructions énormes, voire démesurément gigantesques, soit qu'elles résultent de perfectionnements, de corrections par

(2) À titre d'exemple de pédagogie de « l'explication de texte » sur des sources historiques, voir *Aux origines du calcul infinitésimal*, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, 1999.

adjonctions de branchements, au fil du temps, soit que le but inavoué soit d'échapper à la critique devant l'énormité de la tâche de déconstruction à envisager.

Il est impossible de discuter de modélisation et de son enseignement sans aborder le grave problème de la pensée critique, qui prend aujourd'hui une importance philosophique décisive. Je crois que notre époque a besoin que la critique ne reste plus l'apanage des littéraires.

II. Pensée critique et modélisation

Il convient d'abord de bien distinguer deux sortes de critiques : la critique purifiante et la critique engagée.

Évidemment la science ne cesse de se critiquer elle-même. Il s'agit du processus hypothético-déductif confronté à l'expérience qui élabore les savoirs scientifiques et les perfectionne. Les scientifiques, disons pour être concret les équipes universitaires, critiquent également les modélisations. Mais il s'agit le plus souvent d'une critique purifiante qui vise à constituer des connaissances plus objectives, des représentations plus universelles pour les incorporer à des corpus enseignables. C'est ce dont s'occupent les épistémologues : aussi bien Ernst Mach, Duhem, Bachelard, Popper, Kuhn, que Feyerabend. Ils étudient la question : comment constituer des savoirs desquels on soit fondé à dire qu'ils appartiennent à la science.

Au demeurant l'autre processus, celui des retombées de la science vers le social, est plus préoccupant et certainement plus difficile à comprendre. Du point de vue de la connaissance scientifique, il s'agit d'un processus implicite qui a fait dire à Heidegger, et à d'autres sous des formes voisines, « la science ne pense pas ». Il est vrai que pour le directeur d'un laboratoire de recherche, toute trouvaille, tout produit nouveau, tout procédé ou logiciel est précieux. Il considère que tôt ou tard cela rendra service à l'humanité et qu'il s'agit là d'un problème second. Il n'est pas maître des mésusages qui seraient faits ensuite de l'innovation.

Plusieurs auteurs ont abordé récemment ce problème. J'en citerai trois très brièvement.

Dans son ouvrage, *Le Principe Responsabilité*, Hans Jonas se place du point de vue de l'avenir de l'humanité. Il analyse le retournement qui s'est produit du précepte de Kant « tu dois, donc tu peux » en une sorte d'advienne que pourra quant aux conséquences de la technique qu'on peut formuler ainsi « Tu peux, donc tu fais, donc tu dois ». Jonas considère que le laxisme actuel met l'humanité à la merci de fous et de joueurs qui préféreraient le geste à panache (comme Néron faisant brûler Rome) à la routine. Au demeurant cette grande métaphysique un peu dramatisée ne débouche pas sur des propositions concrètes.

Ulrich Beck – dont le livre *Risiko Gesellschaft*, très cité et disponible dans de nombreuses langues, vient seulement d'être traduit en français – adopte quant à lui une démarche plus sociologique et analyse l'innovation industrielle et la recherche scientifique dans leurs rapports avec la production de risques et la répartition de ceux-ci parmi les usagers. La primauté étant un avantage dans l'institution scientifique et dans la compétition économique, il se produit une évolution sociale implicite qui pallie les risques par d'autres faits accomplis, ce qu'il exprime, en rejoignant l'école londonienne d'Antony Giddens, par le concept de « reflexive modernization ».

Il débouche sur des esquisses d'organisation institutionnelles en matière de gestion de l'innovation et de progrès technique qui sont évidemment l'aboutissement le plus difficile de ce type de réflexion. C'est ce point sur lequel Bruno Latour tente de poser des principes nouveaux (*Politiques de la nature, comment faire entrer la science en démocratie*) quant à l'accueil d'entités (produits, méthodes, procédés) nouvelles, et les procédures du vivre ensemble où liberté se conjugue davantage avec responsabilité et décision collective.

Ces auteurs, entre autres, montrent qu'il faut en finir avec la confusion entre la science purifiante et les passages à l'acte techniques sous leurs diverses formes. La modélisation joue un rôle clé dans cette ambiguïté parce qu'elle se présente trop volontiers sous les habits de la science. Il n'y a en général pas d'autre moyen pour développer une critique engagée de la modélisation que d'utiliser la modélisation elle-même.

Pour ce faire, on se heurte d'emblée à une difficulté qu'il serait funeste de sous-estimer : le phénomène des *ornières de pensée*.

Revenons un instant sur les procédures de validation qui sont destinées à « caler » le modèle sur la réalité qu'on appréhende par des mesures. Aussi sévères soient-elles, ces opérations font rester dans le même type d'approche du problème. Qu'il s'agisse d'identification, de simulations partielles, sur machine ou par maquettes, ou de méthodes plus savantes dites d'assimilation, etc., une validation bien menée rapproche au mieux les idées et ces données en restant *dans la même famille d'interprétation*.

Notons en passant un constat sociologique, une loi qui ne tolère pas de dérogation : dès qu'il y a des mathématiques dans un dossier, cette partie de l'argument est prise pour de la science objective, universelle, irrécusable. Personne n'y touche, c'est trop de travail.

Les ornières de pensée d'une modélisation sont analogues à l'effet « belle maquette » bien connu des architectes. Voici un maire qui organise une réunion publique pour présenter un projet de centre culturel. On évoque les enjeux glorieux pour la ville, on regarde les perspectives au niveau du piéton, on discute le nombre de places de la salle de spectacle, l'accessibilité du club du troisième âge, etc. De petites critiques se font jour, le hall d'exposition est trop petit, etc. Mais le parti, il est impossible de réellement le contester. Personne n'est en mesure d'exprimer clairement de meilleures organisations spatiales qui respectent le programme et les contraintes.

De plus, dernier aspect de ce phénomène, les acteurs ont souvent intérêt à faire passer leur modélisation, quoique partisane, pour de la science, c'est une stratégie de base pour constituer un dossier convaincant.

La contre-modélisation et la construction de covérités

Pour sortir des ornières et s'échapper des interprétations dominantes, le seul moyen est de faire appel à la *logique externe*. Cette expression désigne une ouverture à une concurrence sociale au niveau des idées. Philosophiquement son principe remonte à John Stuart Mill (*On Liberty*, 1859) : les jugements les plus dignes d'être acceptés sont ceux qui ont résisté à la critique libre des esprits les plus exigeants, et non ceux qui respectent la syntaxe interne de tel ou tel langage. Il s'agit donc d'organiser une critique active et imaginative. On voit que nous débouchons sur une philosophie des sciences qui va au-delà du laxisme libertaire d'un Feyerabend. Seule la mise en œuvre de critique constructive grâce à la *sociodiversité des interprétations* peut nous garantir contre les théories scientifiques optimistes, farfelues ou alléchantes dont les risques sont inconnus.

Il s'agit donc de développer la modélisation concurrente. Compte tenu de ce qui précède, nous voyons que le seul moyen de critiquer sérieusement une modélisation est d'en construire une autre suivant des principes différents.

Prendre les choses autrement, appréhender le problème sous un angle nouveau. Le modèle était candidat à la vérité absolue, il se trouve replacé parmi des représentations construites avec des matériaux différents que nous appelons *covérités*. Celles-ci ne révèlent pas seulement des parties cachées du réel, elles modifient les enjeux, les validations à entreprendre et l'établissement des légitimités. Prenons un exemple : les modèles de pollution de rivière, selon une approche classique en France, tentent d'établir l'inventaire des produits chimiques et leurs concentrations, depuis les ions métalliques jusqu'aux matières organiques en suspension, dont la présence est considérée comme un facteur de dégradation de la qualité de l'eau. La méthode a l'avantage d'une grande objectivité. Les instruments de mesure sont de plus en plus précis et sont capables par analyse de prélèvements de déceler des traces d'éléments polluants. *Construire une covérité peut venir ici d'une réflexion plus approfondie sur le concept de propreté*. Les eaux minérales et les sources ne sont pas chimiquement pures. On peut aussi qualifier la qualité de l'eau par les espèces qui y vivent, plantes, poissons, crustacés, mollusques, et procéder à un suivi de cette flore et de cette faune spécifiques. C'est ce qui se fait dans certains pays étrangers et aussi maintenant en France, Les deux approches ne sont pas comparables. La première peut ne pas identifier des germes pathogènes qui contaminent la chaîne animale. La seconde peut difficilement faire la part des fluctuations aléatoires « normales » dans les populations et celle des causes indésirables (rejets polluants).

Une covérité est toujours enrichissante. Elle ouvre à une autre dimension, elle invente un déploiement qui donne une profondeur nouvelle *évidente et nécessaire a posteriori*.

Pour construire une contre-modélisation, les changements de registres peuvent être utiles. En nous inspirant des oppositions sémantiques dont Saussure a montré l'importance pour le langage ordinaire, on peut dégager pour la modélisation les dualités suivantes :

– particules, modèles discrets / milieux continus.
– modèles descriptifs / modèles explicatifs.
– modèles quantitatifs / modèles qualitatifs.
– représentations déterministes / représentations probabilistes.
– images, imagé / symbolique, symbolisé.
– modèles simples / modèles complexes.

Développer ici ces catégories nous entraînerait trop loin. Je renvoie au livre de Jean-Marc Lévy-Leblond, *Aux contraires* (Gallimard 1996) dont l'approche est plus culturelle mais qui fournit de nombreux matériaux pour la critique et à la seconde partie de mon livre *Philosophies des mathématiques et de la modélisation* (L'Harmattan, 1999).

Disons juste un mot pour finir sur la cinquième dualité mentionnée : l'image et le symbolique, car elle a une grande importance pédagogique, les élèves étant submergés d'images dont ils ont peine à se libérer. Les photos des magazines, l'écran et le son de la télévision, les enregistrements sur magnétophone, sont des *images*. Le texte des journaux, les partitions de musique, les mathématiques sont des *symbolismes*. Les images semblent mieux décrire la réalité. À quoi bon lire un article sur la catastrophe de l'Erika, une image ne parle-t-elle pas davantage ? À quoi bon apprendre le solfège quand les musiciens les plus doués sont enregistrés ? La différence qui est décisive tient au fait qu'avec les symbolismes on peut représenter des scènes inventées, on peut en créer de nouvelles, on peut s'exprimer, sans les notes de musique, pas de musique vraiment neuve, sans les écritures de la danse, pas de chorégraphie innovante, sans lecture du texte d'un article, pas de matériaux pour exprimer un point de vue personnel, choisi.

Les mathématiques sont le principal apprentissage de la puissance des symbolismes. Grâce à la modélisation, elles permettent aujourd'hui de composer des récits aussi captivants que les meilleurs recueils de nouvelles.