Les calculatrices n'ont pas toujours raison

Un exemple : le calcul de $A = 9x^4 - y^4 + 2\,y^2$ pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$

Jacques Verdier(*)

Résumé : Quoi qu'en pensent les élèves, les calculatrices n'ont pas toujours raison ! L'objet de cet article est d'analyser les réactions des élèves mis en face de résultats contradictoires, dus à l'incapacité des machines d'effectuer correctement certains calculs.

Le problème que je vais étudier ici (voir encadré ci-dessous) est inspiré d'un énoncé paru dans un manuel de Première S-E de l'IREM de Strasbourg[1]. Je remercie tout particulièrement ses auteurs pour la richesse des activités qu'il m'a permis de construire, tant avec mes élèves de lycée qu'avec des professeurs stagiaires d'IUFM, et ce depuis 1990. Vous trouverez à la fin de cet article quelques indications sur l'origine de ces deux nombres $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$.

La version que je propose ici est la dernière d'une longue série d'avatars : j'ai utilisé ce problème depuis 1990 dans diverses classes (en Première S, en Première STL Biologie, et en Première SMS, ces deux dernières classes ayant un programme de mathématique relativement « léger », proche de celui des Première STT).
Je l'ai proposé tantôt en devoir à la maison (comme la version étudiée ici), tantôt au cours de séquences de travaux dirigés. Pour ce qui est des D.M., j'ai relevé dans les copies des élèves, depuis 1991, un certain nombre de passages que je jugeais « intéressants », et qui vont me permettre d'alimenter cet article. Quand j'utilisais cet énoncé en T.D., les consignes étaient formulées autrement, et les élèves travaillaient par petits groupes hétérogènes quant au modèle de calculatrice utilisée ; tout occupé à gérer les débats entre les divers groupes, je n'ai jamais eu l'occasion de retranscrire sur-le-champ les arguments échangés ; mais on y retrouvait ceux que j'avais extraits des devoirs écrits.

(*) Lycée Arthur Varoquaux, 54-TOMBLAINE.

(1) IREM de Strasbourg (E. Busser, M. de Cointet, C. Kahn, J. Martinet, J. Samson et O. Schladenhaufen), Collection ISTRA, Éditions CASTELLA (Paris) : Mathématiques, classe de première S et E. Il correspond aux programmes de 1985 et a été publié en 1988. Il n'y a qu'un seul tome, qui regroupe analyse et géométrie.
On trouvera également, dans le bulletin A.P.M.E.P. n° 434 de mai-juin 2001, dans le dossier ARITHMÉTIQUE (3ème partie), un article de Jean-Pierre Friedelmeyer « Petits problèmes d'arithmétique posés par des exercices d'origine géométrique ou algébrique », §1 : Comment piéger la calculatrice. Je n'avais pas eu connaissance de cet article au moment où j'ai écrit celui-ci.

ÉNONCÉ DU DEVOIR

Le but de ce problème est de déterminer la valeur exacte de $A = 9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2$ pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$.

Première partie :

Effectuez le calcul de $A = 9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2$ pour $x = 10\,864$ et $y = 18\,817$ à l'aide de votre calculatrice (en précisant clairement comment vous procédez), et donnez alors la valeur exacte de A.
Essayez ensuite en empruntant d'autres modèles de calculatrices dans votre entourage. Donnez la liste des résultats trouvés.

Seconde partie :

Voici trois solutions proposées par deux élèves de seconde et un élève de « Math. Sup ».
Donnez votre avis (argumenté) sur ces trois solutions, en précisant si elles vous paraissent correctes ou non au point de vue mathématique, et en expliquant pourquoi elles aboutissent à des résultats différents (et peut-être différents de ceux que vous avez trouvés dans la première partie).

Solution 1 (élève de seconde) :
Sur ma calculatrice, je mets 10 864 dans la mémoire X, et 18 817 dans la mémoire Y (grâce à la touche $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ sur Texas ou $\boxed{\rightarrow}$ sur Casio).

Puis je tape $\boxed{9}\ \boxed{\text{X}}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{4}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{Y}}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{Y}}\ \boxed{x^2}\ \boxed{\text{ENTER}}$.
Je trouve **A = 22**.

Solution 2 (élève de seconde) :
Je factorise : $A = 9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2 = (3\,x^2 - y^2)(3\,x^2 + y^2) + 2\,y^2$.
Je calcule $(3\,x^2 - y^2) = 3 \times 10\,864^2 - 18\,817^2$ et je trouve (-1).
Je remplace dans A : $A = 9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2 = (-1)\,(3\,x^2 + y^2) + 2\,y^2 = y^2 - 3\,x^2$.
Je calcule alors $A = y^2 - 3\,x^2 = 18\,817^2 - 3 \times 10\,864^2$ et je trouve 1.
Donc **A = 1**.

Solution 3 (élève de Math. Sup.) :

À la calculatrice, $\dfrac{18\,817}{10\,864} = 1.732\,050\,81$ et $\sqrt{3} = 1.732\,050\,808$.

J'en conclus que $\dfrac{18\,817}{10\,864} \approx \sqrt{3}$ (à 10^{-8} près au pire).

Donc $18\,817 \approx 10\,864\,\sqrt{3}$,
donc $18\,817^2 \approx 10\,864^2 \times 3$,
donc $18\,817^4 \approx 10\,864^4 \times 9$,
donc $9 \times 10\,864^4 - 18\,817^4 \approx 0$.
Par conséquent, pour X = 10 864 et Y = 18 817, on a
$A = 9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2 \approx 0 + 2 \times 18\,817^2 \approx 708\,158\,978$.
(c'est une valeur approchée, car le calcul initial était à 10^{-8} près ; mais comme on sait que A ne peut être qu'entier … c'est la bonne valeur).

Certaines années, et notamment avec les stagiaires IUFM, l'énoncé était précédé d'une question préliminaire : calculer mentalement une valeur approchée de A en prenant $x = 10\,000$ et $y = 20\,000$ (la réponse est alors $A \approx -7 \times 10^{16}$).

La valeur proposée dans la solution du premier « élève de seconde » a évolué au cours des versions : je proposais une réponse qu'une calculatrice pourrait donner (voir plus loin les explications « techniques » sur la façon dont les calculatrices « gèrent » les grands nombres), mais qu'aucune calculatrice du marché ne fournissait. Initialement je proposais les valeurs $A = -1\,022$ ou $A = 978$, jusqu'à ce qu'une calculatrice affiche ce résultat (ce que je constatais *a posteriori* dans une copie d'élève…).
Le « niveau » d'étude des trois « élèves » (fictifs !) n'est pas anodin non plus : mes élèves de première se sentent d'emblée « supérieurs » à ceux de seconde, mais la « math sup » exerce sur certains (en Première S surtout) une fascination parfois peu fondée : « *Ce résultat est exact car cet élève est en Math-Sup* » (Marion, Première STL, 2001)

Quelques extraits de copies

Commençons par les élèves qui évoquent le « contrat didactique » implicite entre le professeur et le rédacteur du devoir. La question 2 étant relativement ouverte (au début, je m'étais contenté d'écrire « *Que pensez-vous de ces trois solutions ?* », la version donnée ici étant un peu plus contraignante).

« *Je pense qu'il y a une réponse à trouver, mais je ne vois pas laquelle* » (Véronique, Première S, 1991 : ça a été le devoir le plus court que je n'aie jamais eu à lire !).
À propos de la solution 1 : « *À mon avis, c'est trop simple pour que ce soit la bonne solution* » (Céline, Première S, 1991).
« *Je ne peux rien dire sur le résultat de l'élève car il n'a pas rédigé son raisonnement* » (Anne-Claire, Première S, 1993)
« *La meilleure solution me paraît être la plus simple, c'est à dire la Première. En effet, en remplaçant dans ma calculatrice les valeurs données dans l'exercice, je remarque que mon résultat est exact* » (Sandrine, Première SMS, 1990, qui avait une calculatrice toute neuve qui donnait la même réponse que celle de l'énoncé d'alors).
» *La solution 1 est simple et rapide, mais pose un problème si le correcteur n'a pas la même calculatrice que vous*(2) » (Vanina, Première S, 1991).
À propos de la solution 3 : « *Je me demande comment il a eu l'idée de diviser y par x mais, excepté que le résultat est une valeur approchée, il est juste* » (Alexandre, Première S, 1992, qui trouve d'ailleurs que les trois résultats proposés sont justes)

On peut même lire l'opinion que se font les élèves du degré de sophistication des méthodes proposées :
« *La solution 1 est la même méthode que j'ai exécutée : elle est courte, simple, rapide (…). La solution 2 est plus réfléchie, détaillée, un peu longue, mais le raisonnement est correct (…). La solution 3 est juste mais compliquée (…) le raisonnement est plus*

(2) Comme quoi les maths, c'est comme le français ou la philo : les élèves sont intimement persuadés que l'opinion personnelle du correcteur sur la question joue un rôle fondamental dans l'évaluation de la copie.

poussé, plus recherché » (Hélène, Première S, 1992).
« *Dans la solution 3, l'élève de Math-Sup a usé d'une très grande logique pour effectuer son calcul à la main. Cela se comprend car l'élève est en Math-Sup, quant aux deux autres en seconde. Cette idée de comparer une division de x et y et le résultat de la racine de* 3 *est à développer* » (Jennifer, Première STL, 2001).

Pour la solution 1, nombre d'élèves évoquent la faute de frappe (c'est encore plus fréquent lors des débats en T.D.), ou la nécessité de mettre des parenthèses pour que la calculatrice respecte les priorités de calcul :
« *L'élève a fait une erreur de frappe sur sa calculette (…) ou bien il s'est trompé en lisant son résultat sur l'écran* » (Alexandre, Première S, 1994).
« *Cette élève a dû se tromper en mettant les valeurs de x et y en mémoire* » (Sébastien, Première S, 1993).
« *Son raisonnement est correct, mais il a oublié les parenthèses, ce qui fausse les résultats puisque les règles de priorité ne sont pas prises en compte* » (Émilie, Première STL, 2001).
» *Je procède de cette manière sur ma calculatrice :* A = (9*x^4) − (y^4) + 2y^2. *Les parenthèses sont très importantes, car si elles n'existaient pas le résultat changerait et deviendrait faux* » (Aline, Première S, 1994). Le résultat qu'elle proposait m'a étonné ; aussi, après une étude minutieuse des ses brouillons, où elle avait noté ses résultats intermédiaires, j'en ai conclu qu'elle avait dû taper 11 817 au lieu de 18 817 dans un des cas.

La factorisation proposée par le second élève en aura surpris plus d'un. La démarche est en effet assez inhabituelle : on factorise, on remplace x et y par leur valeur dans un seul des deux facteurs, on continue le calcul littéral, et on remplace de nouveau x et y par leur valeur dans l'expression simplifiée. Jamais, dans leur « carrière », les élèves n'ont dû procéder de cette façon…
« *La factorisation est juste, mais son développement n'est pas logique, car il calcule un membre de la factorisation mais pas l'autre, ce qui fausse le résultat final* » (Yazid, Première STL, 2001).
« *L'élève n'a pas le droit de calculer à l'intérieur des parenthèses comme il l'a fait*(3)*, car c'est un produit de facteurs. Donc son résultat est faux* » (Stéphane, Première S, 1992).
Il y a aussi ceux qui « craignent » les factorisations, car ils n'ont peut-être jamais été à l'aise sur ce chapitre :
« *Il a choisi la factorisation. C'est une bonne idée du point de vue mathématique, mais cette factorisation va certainement fausser tous les résultats* » (Jennifer, Première STL, 2001).
« *Cette solution n'est pas bonne, car lorsqu'on transforme l'équation de départ, on n'est jamais sûr de retrouver le même résultat que celui qui a été donné par l'équation de départ* » (Anne-Françoise, Première S, 1994). Voilà qui en dit long sur les relations qu'a dû avoir cette élève avec le calcul algébrique…

Un autre point de discorde concerne les calculs avec les valeurs approchées :

(3) C'est après discussion avec lui que j'ai compris ce qu'il avait voulu dire. « *Comme il l'a fait* » signifiait d'abord dans la première parenthèse, puis enfin dans la dernière ligne.

« *Tout d'abord, je trouve que conclure que* 18 817/10 864 ≈ $\sqrt{3}$ *n'est pas " mathématique ", ça ne va pas. (…) enfin c'est une valeur approchée. Et on ne fait pas des mathématiques avec des valeurs approchées* » (Sophie, Première S, 1991).
« *L'élève commence par travailler avec des valeurs approchées, donc le résultat sera faux* » (Anne-Claire, Première S, 1993).
« *Le résultat est correct, mais la méthode est déconseillée (…)* » (Virginie, Première S, 1993).
« *(…) de plus il dit, à la fin de son raisonnement, que son résultat est approché mais que c'est la bonne puisque le résultat doit être entier : c'est donc un raisonnement approximatif, non mathématique* » (Elodie, Première STL, 2001).

Sur plusieurs copies, j'ai relevé que plusieurs réponses différentes pouvaient être simultanément exactes :
« *La solution 1 est la plus directe et elle est juste. La solution 2 est juste pour le raisonnement. La solution 3 (…) est juste* » (Alexandre, Première S, 1992).
« *Les trois solutions sont justes, mais il n'y a pas que ces trois solutions : on calcule* $9x^4$, *puis* $2y^2 - y^4$, *et on les ajoute : on trouve* A = 0 » (Glwadys, Première S, 1991).

Certains sont un peu plus « logiques », mais se posent des questions cruciales. Un exemple :
« *1°) Sur sa calculatrice, je tape sa façon de faire qui ressemble à la mienne, et je ne retrouve pas le même résultat que le sien. J'en déduis que soit il a faux et moi j'ai juste, soit l'inverse, ou encore nous avons tous les deux faux.*
2°) (après avoir vérifié pas à pas la factorisation et le développement) *Je pense que soit l'un et l'autre a juste, ou nous avons tous les deux faux et fait des erreurs dans nos calculs alors que le résultat est le bon. En suivant son raisonnement à la calculatrice, j'obtiens son résultat.*
3°) Son raisonnement est juste donc son résultat est juste. Mais nous n'avons pas le même résultat pour la même expression. Alors où est la faute ?
Je pense que quel que soit le raisonnement, quelle que soit la calculatrice, nous n'aurons jamais le même résultat. Nous ne pouvons nous fier ni à nos calculatrices, ni à nous-mêmes. Alors à qui se fier ? » (Gaëlle, Première S, 1994).

La majorité des élèves a cependant bien perçu que le calcul de ces grands nombres n'était pas faisable exactement sur une calculatrice : elle « perd » des chiffres en cours de route. Ils l'expriment plus ou moins bien…
« *La calculatrice ne peut pas donner un résultat exact, les nombres* X *et* Y *élevés à la puissance 4 étant trop grands pour entrer entièrement dans la calculatrice* » (Sébastien, Première STL, 2001).
« *Les résultats avec la calculatrice sont sûrement faux, car elle donne pour valeur pour* $9x^4$: $9 \times 10\,864^4 = 1.253\,722\,838.10^{17}$ *et pour* y^4 : $18\,817^4 = 1.253\,722\,845.10^{17}$. *Ces deux résultats sont élevés à* 10^{17}, *mais je ne pense pas que ces résultats sont constitués de zéros durant* 10^{17} » (Johann, Première S, 1993)
« *La calculatrice ne permet que 9 chiffres après la virgule, elle élimine tous les chiffres se trouvant après le neuvième* » (Thierry, Première S, 1993).
« *La calculatrice nous indique* A = 58 978. *Mais c'est faux car elle ne peut prendre en compte plus de 13 chiffres, et* $9x^4$ *est à la puissance* 10^{17} » (Saint-Paul, Première

S, 1993).
« *Je commence par calculer* x^4 *à la calculatrice, et je me rends compte que le résultat scientifique est à l'exposant 16, donc le résultat a 17 chiffres ; en supposant que la calculatrice a 13 chiffres en mémoire, bien qu'elle n'en montre que 10, il y a donc une perte de 4 chiffres* » (Karima, Première S, 1994).
« *L'incapacité de la machine est la cause du résultat faux, car les puissances pour le nombre sont beaucoup trop grandes pour elle. Elles ne donnent qu'une valeur approchée du résultat souvent très loin de la réalité. Seule une calculatrice vraiment perfectionnée pourrait se rapprocher plus du résultat, mais n'atteindra pas la valeur exacte*(4) » (Séverine, Première S, 1993).

Ils précisent même que c'est pour cela que le second résultat proposé est correct :
« *Le raisonnement de ce second élève est bien, puisqu'il aboutit au bon résultat de cette opération, résultat trouvé à la main. L'élève, astucieux, a utilisé sa calculatrice dans les limites de sa capacité, ce qui lui a permis de trouver un résultat exact* » (Thierry, Première S, 1993).
« *Nous savons que la calculatrice ne peut calculer toutes les opérations en même temps, donc nous allons calculer séparément les deux facteurs. Cette fois la calculatrice peut afficher tous les chiffres de chaque nombre* » (Karima, Première S, 1994).
« *À mon avis l'élève nº 2 a trouvé le bon résultat car la factorisation me paraît être la meilleure solution. Parce qu'au lieu d'avoir les exposants 4 on met tout à l'exposant 2 et on finit par trouver un nombre entier* » (Cécile, Première STL, 2001).

Quoique…
« *Au point de vue mathématique, je pense que ce serait plutôt juste, mais après factorisation il y a des carrés, et comme les calculettes ne gardent qu'un certain nombre de chiffres après la virgule, la calculette, à chaque étape des calculs, arrondit. Donc le résultat est arrondi, donc la valeur de* A *n'est pas exacte* » (Kelly, Première STL, 2001).

En ce qui concerne le calcul approché proposé par le troisième élève, certains se sont bien rendu compte que l'approximation était de plus en plus « mauvaise » :
« *Cette méthode est mauvaise, car au fur et à mesure qu'il calcule avec des valeurs approchées, l'erreur s'amplifie* » (Alexander, Première S, 1991).
« *(…) le problème se manifeste au niveau de l'arrondi* 10^{-8} *qui est beaucoup trop élevé, ce qui fausse le résultat parce que cet écart évolue avec une puissance : il passe de* 10^{-8} *à* 10^8 » (Tania, Première STL, 2001).

« *L'approximation à* 10^{-8} *sur le nombre* $\sqrt{3}$ *n'est pas importante, mais elle est ensuite multipliée par* $10\,864^4$ *: on obtient alors une erreur de plus d'une centaine de milliards* » (Anne-Claire, Première S, 1994).

Cependant, certains ont calculé $9\,x^4 - y^4$ à la calculatrice, « prouvant » que le résultat était faux grâce à un calcul faux :

(4) C'était en 1993… Maintenant, nombre d'élèves de Première S possédant une TI89 (ou un modèle du même type) obtiennent directement le résultat exact, A = 1. On ne peut plus proposer cet énoncé sous cette forme dans cette classe.

« *Il n'y a un écart que de* 10^{-8} *mais cet écart grandit lorsqu'on passe le résultat à la puissance* 4. *À la fin,* $9 \times 10\,864^4 - 18\,817^4 \approx 0$ *c'est faux, le vrai résultat est* $-708\,160\,000$ » (Nadège, Première STL, 2001).

Quelques élèves (rares, mais courageux !) ont calculé entièrement « à la main » le résultat, les opérations intermédiaires figurant intégralement sur leur copie. Cela nécessite beaucoup de soin et d'application.
« *Alors il y a un moyen long mais sûr si on ne veut pas faire d'erreur* (il " pose " alors les opérations, et conclut). *Oui, je sais, j'avais du temps à perdre, alors…* » (Vincent, Première S, 1991)

Les raisonnements qu'aucun élève n'a faits :
Aucun de mes élèves n'a eu l'idée de calculer dans un ordre différent (par exemple $9\,x^4 + 2\,y^2 - y^4$), ce qui aurait eu pour effet de donner un résultat différent (le plus souvent 0).
Aucun, non plus, n'a essayé de faire un raisonnement portant sur les chiffres des unités. Par contre cette idée est spontanément apparue à l'I.U.F.M., avec les professeurs stagiaires en formation : x se termine par 4, donc x^2 par 6, x^4 par 6 et $9\,x^4$ par 4 ; y se termine par 7 donc y^2 par 9, $2\,y^2$ par 8 et y^4 par 1 ; par conséquent $9\,x^4 + 2\,y^2$ se termine par 2 ; et A se termine donc par 1 ou par 9 (cela dépend de celui des deux nombres $9\,x^4 + 2\,y^2 - y^4$ qui a la plus grande valeur absolue). Tout résultat ne se terminant pas par 1 ou par 9 est donc à éliminer (ce qui ne prouve nullement que la réponse A = 1 est la bonne !).

Les explications « techniques »

Voici tout d'abord les résultats affichés par un certain nombre de calculatrices (en gras figure la valeur donnée pour A, et entre parenthèses la valeur donnée pour $(9\,x^4 - y^4)$).

Résultats	Machine	Résultats	Machine
–22 (–708 159 000)	Aucune machine[(5)] !	**+978** (–708 158 000)	Casio Graph 20, 25, 30, 35, 60, 65, Sharp 9900
–1 022 (–708 160 000)	TI 82, TI 83, TI 83+, TI 85, Casio 9900	**+8 978** (–708 150 000)	Aucune machine !
–41 022 (–708 200 000)	Casio 7800, 7900	**+58 978** (–708 100 000)	TI 80, TI 81 Casio 7000G
–141 022 (–708 300 000)	TI 30X-IIB	**+158 978** (–708 000 000)	HP 48SX
–841 022 (–709 000 000)	TI 30, TI 40 HP 22S, HP 38G	**+1 158 978** (–707 000 000)	TI 30X, Galaxy 40 Casio 790P, 850P, 6800
–1 841 022 (–710 000 000)	Casio fx92 Coll New+	**+8 158 978** (–700 000 000)	Casio fx92 (ancienne)
1 (–708 158 977, valeur exacte)		TI 89, TI 92	

(5) Dans l'état actuel du marché, et sauf erreur de ma part.

Pour 9 x^4, la valeur exacte est **125 372 283 822 342 144**.
Pour y^4, la valeur exacte est **125 372 284 530 501 121**.
Suivant la capacité de la calculatrice, elle ne peut conserver que de 10 à 15 chiffres significatifs. Et encore le dernier n'est-il pas toujours correctement arrondi : une TI80 conservera 1,253 722 838 22**4** × 10^{17} pour 9 x^4, alors qu'une Casio 7800, de même capacité, conservera 1,253 722 838 22**3** × 10^{17} pour 9 x^4.
Attention à ne pas confondre ce qui est conservé par la machine et ce qui est affiché par l'écran (généralement trois ou quatre chiffres de moins).

Explication pour une machine répondant A = 1 158 978 :
Ce type de machine ne peut mémoriser que 12 chiffres.
Voici ce qu'elle « fait » (les nombres ont été écrits en format non scientifique pour pouvoir être facilement comparés ; les petits zéros de droite sont donc fictifs) :

$$\begin{array}{rr}
9\,x^4 = & \mathbf{125\,372\,283\,823}\ {\scriptstyle 000\,000} \\
-\,y^4 = & -\ \mathbf{125\,372\,284\,530}\ {\scriptstyle 000\,000} \\ \hline
9\,x^4 - y^4 = & -\ \mathbf{707\,000\,000} \\
y^2 = & \mathbf{708\,158\,978} \\ \hline
\mathrm{A} = & \mathbf{1\,158\,978}
\end{array}$$

Explication pour une machine répondant A = − 41 022 :
Ce type de machine mémorise 13 chiffres.

$$\begin{array}{rr}
9\,x^4 = & \mathbf{125\,372\,283\,822\,3}{\scriptstyle 00\,000} \\
-\,y^4 = & -\ \mathbf{125\,372\,284\,530\,5}{\scriptstyle 00\,000} \\ \hline
9\,x^4 - y^4 = & -\ \mathbf{708\,200\,000} \\
y^2 = & \mathbf{708\,158\,978} \\ \hline
\mathrm{A} = & -\ \mathbf{41\,022}
\end{array}$$

Explication pour une machine répondant A = 978 :
Ce type de machine mémorise 15 chiffres.

$$\begin{array}{rr}
9\,x^4 = & \mathbf{125\,372\,283\,822\,342}\ {\scriptstyle 000} \\
-\,y^4 = & -\ \mathbf{125\,372\,284\,530\,500}\ {\scriptstyle 000} \\ \hline
9\,x^4 - y^4 = & -\ \mathbf{708\,158\,000} \\
y^2 = & \mathbf{708\,158\,978} \\ \hline
\mathrm{A} = & \mathbf{978}
\end{array}$$

On peut procéder de même pour chacune des machines citées. On comprendra aussi pourquoi une machine aurait très bien pu répondre A = − 22 ou A = + 8 978…

La correction en classe

Pour corriger ce devoir, j'ai commencé par faire travailler les élèves sur la fiche ci-après, en utilisant une calculatrice reliée à un écran projetable, manipulée par une des élèves. Au fur et à mesure des questionnements des autres élèves, le débat était lancé, avec au besoin expérimentation sur machine (sur celle « de la classe » ou sur leur calculatrice personnelle) pour confirmer ou infirmer les diverses hypothèses. Je n'ai évidemment pas donné toutes les « explications techniques » qui figurent ci-dessus, ni celles que je donne ci-après (relativement à la provenance de x et y) : elles ne sont destinées qu'aux lecteurs de cet article !

D'où proviennent ces deux valeurs de *x* et *y*[6] ?

Le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$ est défini par $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$, avec $u_0 = 1$.

On obtient ainsi la suite de fractions $u_1 = \dfrac{2}{1}$, $u_2 = \dfrac{5}{3}$, $u_3 = \dfrac{7}{4}$, $u_4 = \dfrac{19}{11}$ … avec $u_{15} = \dfrac{18\,817}{10\,864}$.

Il est facile de démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3}$, et que si l'on note respectivement x_n et y_n le dénominateur et le numérateur de u_n, on a alternativement $\left(y_n^2 - 3x_n^2\right) = -2$ et $\left(y_n^2 - 3x_n^2\right) = 1$; ce qui confirme le calcul du second élève.

Quelques résultats concernant les limites de capacité des moyens actuels de calcul :

Avec $u_{19} = \dfrac{262\,087}{151\,316}$, certaines calculatrices ne donnent plus $\left(y_n^2 - 3x_n^2\right) = 1$ mais $\left(y_n^2 - 3x_n^2\right) = 0$.

Sur une TI82 ou une TI83, il n'y a aucune différence entre $u_{23} = \dfrac{3\,650\,401}{2\,107\,560}$ et $\sqrt{3}$ (les quatorze chiffres significatifs « emmagasinés » par la calculatrice sont identiques).

Si l'on effectue les calculs avec Excel, on obtient x_{26} = 21 489 003 et y_{26} = 37 220 045, et l'ordinateur n'est plus capable de faire la différence entre $\dfrac{y_{26}}{x_{26}}$ et $\sqrt{3}$.

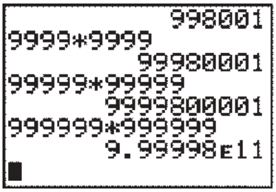
Bien sûr, le calcul de A avec d'aussi grandes valeurs de *x* et *y* est toujours exact sur une machine comme la TI89 ou la TI92, car elle peut calculer sur **N** avec près de 600 chiffres exacts.

(6) L'énoncé proposé par le manuel de l'I.R.E.M. de Strasbourg proposait une troisième partie : « Comment cet énoncé a-t-il été fabriqué ? » comportant les questions suivantes :
a) Trouver deux entiers naturels x et y vérifiant la relation (R) $y^2 - 3\,x^2 = 1$.
b) Monter que si x et y vérifient (R) il en est de même pour $x' = 2\,xy$ et $y' = 3\,x^2 + y^2$.
c) Montrer que pour tout couple d'entiers vérifiant (R) on a $9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2 = 1$.
d) Soient x et y deux entiers vérifiant (R) ; montrer que l'on a alors $0 < \dfrac{y}{x} \quad \sqrt{3} < \dfrac{1}{3x^2}$.

Note : À propos de cette activité, on pourra lire dans le numéro 11 (avril 1993) de la revue REPÈRES-IREM un article d'Aline ROBERT, « Eléments de réflexion sur l'utilisation des calculatrices programmables en Première S et en terminales C et E », où elle montre comment l'utilisation des calculatrices peut être intégrée à l'apprentissage de certaines notions d'analyse, grâce en particulier à un « changement de cadre » analyse théorique ↔ calculatrice.

Correction du DM $9\ x^4 - y^4 + 2\ y^2$

Multiplications d'entiers à la calculatrice

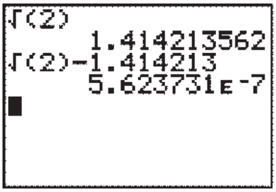


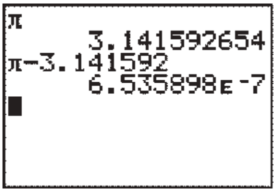
Il est bon de connaître le nombre de chiffres maximum des nombres que la calculatrice peut multiplier exactement.
Ici (TI83), la multiplication 99 999 × 99 999 = 9 999 800 001 est exacte, alors que la multiplication 999 9999 × 999 999 n'est qu'approchée (la valeur exacte étant 999 999 800 001).

La calculatrice peut donc multiplier exactement des nombres entiers de 5 chiffres (ou moins !)

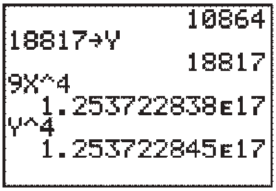
Nombre de chiffres affichés et de chiffres en mémoire

On sait que $\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels, et que leur écriture décimale comporte une infinité de chiffres. La calculatrice ne peut en donner qu'une valeur approchée (ci dessous sur TI83 : 9 chiffres après la virgule). En réalité, la machine travaille avec plus de chiffres, mais elle les « cache ».
Observer sur ces deux exemples la méthode pour les « récupérer » :

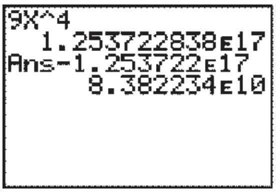




Calculs avec de très grands nombres



On a mis 10 864 et 18 817 en mémoires X et Y respectivement.
Pour 9 X^4, la machine affiche 1.253 722 838 × 10^{17}, ce qui signifie 125 372 283 800 000 000.
De même pour Y^4, elle affiche 1.253 722 845 × 10^{17}, ce qui signifie 125 372 284 500 000 000.
Ces résultats sont faux : pourquoi ?



Si on retranche 1.253 722 × 10^{17} du résulat affiché pour 9 X^4, on lit 8.382 234 × 10^{10}, ce qui montre qu'il y avait encore 4 chiffres « cachés » dans l'écran précédent.
Finalement, le résultat calculé par la machine pour 9 X^4 est 125 372 283 822 340 000.
Ce dernier résultat n'est pas encore le bon. Pourquoi ?