Mathématiques et tableur au lycée : Le problème du duc de Toscane(*)

Virginie Maitrot(**)

L'activité qui suit a été utilisée avec des classes de Première L en 2001 car la simulation était au programme de math-info cette année-là. La simulation étant maintenant traitée en classe de Seconde, elle a disparu du programme de Première (à partir de septembre 2001). Cette activité peut intéresser les professeurs de seconde (dans ce cas la troisième partie pourra être réalisée devant la classe entière, sur grand écran).

Objectifs :

- Réaliser des traitements de données statistiques.
- Exploiter des statistiques issues d'expériences aléatoires.
- Construire et exploiter une représentation en arbre.

Objectifs « tableur » :

- Interpréter la nature du contenu d'une cellule déjà saisie (ligne d'édition).
- Expliciter les relations entre diverses cellules d'une feuille automatisée de calcul.
- Exploiter un programme de simulation d'une expérience aléatoire en utilisant la fonction qui permet le recalcul des nombres aléatoires.

Pré-requis :

- Utilisation d'un tableur (Troisième partie) : écrire une formule simple en exploitant l'assistant-formule, et compléter un tableau par recopiage d'une plage de cellules (sans références absolues).
- Représentation en arbres (Quatrième partie).

Première partie.

Introduction du sujet : travail à faire à la maison.

1. Lancer simultanément trois dés à six faces et compter le nombre total de points ainsi obtenus. Indiquer ce résultat dans le tableau ci-dessous. Renouveler l'opération 20 fois de façon à remplir le tableau.

Nº du lancer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Total des points																				

(*) Cet article a déjà été publié en décembre 2001, dans le nº 68 du PETIT VERT, bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P.
On pourra consulter le site de cette régionale sur http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep, et en particulier « Le coin des activités statistiques ».
(**) Lycée R. Poincaré, Bar-le-Duc (55).

2. Combien de fois obtenez-vous un total de 9 points, de 10 points ? Avez-vous obtenu plus souvent 9 points, 10 points ou bien avez-vous obtenu autant de fois 9 que 10 ?

3. Les résultats précédents permettent-ils de savoir si on a plus de chances d'obtenir 9, plus de chances d'obtenir 10 ou autant de chances d'obtenir 9 que 10 ?

Deuxième partie :

Pour tirer un résultat d'une expérimentation, il faut effectuer un très grand nombre d'expériences. D'où l'intérêt de la simulation.

En classe entière.

On réalise la synthèse des résultats obtenus :

- Recenser le nombre d'élèves ayant obtenu chacun des résultats possibles à la question 2. *On remarque que certains élèves obtiennent plus de 9 que de 10, que d'autres obtiennent plus de 10 que de 9, et que quelques-uns uns obtiennent autant de 10 que de 9.*
- Réponse à la question 3. *Elle découle de ce qui précède : en faisant 20 fois l'expérience, on n'obtient pas toujours le même résultat. On ne peut donc pas répondre.*

On peut alors raconter la légende suivante :

> *« Le Grand Duc de Toscane était un grand amateur de jeux de dés. À force de jouer, il lui semblait avoir remarqué qu'en lançant trois dés, il obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Ce résultat ne lui semblait pas normal, car on peut obtenir un total de 9 de six façons différentes :*
> $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3.$
> *On peut obtenir un total de 10 également de six façons différentes :*
> $10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$
> *Le Grand Duc de Toscane (un Médicis, pourtant…) n'arrivait pas à comprendre pourquoi, en jouant, il obtenait plus souvent un total de 10 qu'un total de 9. Ce problème fut à l'époque (XVII^e^ siècle) source de nombreuses discussions. »*

Demander alors aux élèves comment on pourrait tester la véracité de ce résultat. Deux idées peuvent surgir : lancer trois dés un très grand nombre de fois ou faire une étude théorique (cette seconde idée a peu de chances d'apparaître spontanément). Admettons qu'il suffise de lancer 10 000 fois trois dés pour avoir un résultat fiable (voir commentaire encadré en fin d'article). À raison de 10 secondes par lancer de trois dés, 24 heures n'auraient pas suffi au Duc de Toscane pour venir à bout de l'expérience ! Aujourd'hui on dispose d'un outil qui permet de réduire considérablement le temps d'expérimentation : l'ordinateur. Celui-ci permet en effet de simuler le lancer de trois dés.

Troisième partie :

Principe de simulation du lancer d'un dé. Observation des résultats de cette simulation. Utilisation du tableur.

Cette partie devrait normalement être réalisée en classe entière, avec projection de l'écran de l'ordinateur sur grand écran (grâce à un vidéo-projecteur, par exemple). Le professeur mènerait l'activité, en posant les questions oralement ; un élève manipulerait l'ordinateur, un autre écrirait au tableau la statistique des résultats trouvés pour pouvoir l'explorer ensuite.

Pour des raisons propres à l'établissement où cette activité a été mise en œuvre, ce scénario n'a pas été réalisable. Aussi, chaque élève a travaillé sur son ordinateur, à l'aide d'une fiche individuelle. Les instructions données aux élèves dans cette troisième partie étaient très détaillées : ceci risque, cependant, de les amener à répondre successivement à chaque question sans vraiment percevoir les liens qui les unissent et surtout sans saisir le sens global de la démarche.
Voici la fiche telle qu'elle avait été proposée, en demi-classe sur tableur (prévoir deux heures) :

Commentaire :
Cette séquence devra être précédée d'un court travail en classe entière sur la génération automatisée de nombres au hasard, par exemple sur la fonction RANDOM ou RAND ou RAN# de la calculatrice. Il sera admis que cette fonction donne un nombre « au hasard » de l'intervalle [0 ; 1[.
L'explication doit porter sur le fait que cet intervalle contient une infinité de nombres réels (en théorie), mais seulement quelques milliards pour la calculatrice ou l'ordinateur. L'expression « au hasard » doit alors être comprise comme suit : parmi ces milliards de nombres, le « constructeur » garantit qu'il n'y en a pas un qui ait plus (ou moins) de chance de sortir que les autres ; d'autre part, il est impossible de prévoir le nombre qui va sortir (il n'est pas « influencé » par ceux qui viennent de sortir).
Ceci est évidemment faux, car le calcul est algorithmique, donc entièrement déterminé ; il ne paraît pas utile d'entrer dans ces considérations de nombres pseudo-aléatoires : il vaut mieux, sur ce point, « faire entière confiance à la machine ».

Grâce à l'ordinateur, on va simuler 10 000 lancers de trois dés. C'est un peu comme si on demandait à l'ordinateur de lancers 10 000 fois trois dés et d'afficher ensuite les résultats obtenus.

Pour l'instant, l'ordinateur ne sait pas lancer de dé. En revanche, il sait fournir un nombre choisi au hasard entre 0 et 1. C'est cette faculté que l'on va exploiter. Excel dispose d'une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1, c'est-à-dire une fonction qui fournit un nombre choisi au hasard entre 0 et 1. Cette fonction est appelée « ALEA ». On va simuler le lancer d'un dé à l'aide de cette fonction.

1) Ouvrir le fichier Excel TOSCANE et l'enregistrer (ce fichier aura été préparé au préalable par le professeur, qui donnera toute indications sur le répertoire où le chercher). Voici l'écran tel qu'il est :

A1 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1								Nombre total de 9:		
2								Nombre total de 10:		
3										
4	N° du lancer.		1er dé.		2ème dé.		3ème dé.	Somme.		
5	1		1							
6	2									
7	3									
8										
9										
10										

Et voici ce qu'on voudrait obtenir au cours de ce T.P. :

C5 = =SI(B5<0,5;SI(B5<1/6;1;SI(B5<1/3;2;3));SI(B5<2/3;4;SI(B5<5/6;5;6)))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1								Nombre total de 9:		1134
2								Nombre total de 10:		1204
3										
4	N° du lancer.		1er dé.		2ème dé.		3ème dé.	Somme.		
5	1	0,52371425	4	0,60896943	4	0,90007794	6	14		
6	2	0,87677867	6	0,05465512	1	0,97923073	6	13		
7	3	0,23635094	2	0,41388329	3	0,95907624	6	11		
8	4	0,2990335	2	0,01933076	1	0,05868397	1	4		
9	5	0,5466337	4	0,70094131	5	0,15594497	1	10		
10	6	0,74689247	5	0,44230719	3	0,11020712	1	9		
11	7	0,55541179	4	0,91047849	6	0,02053005	1	11		
12	8	0,83698652	6	0,25595171	2	0,91306217	6	14		
13	9	0,39494376	3	0,95398585	6	0,30638167	2	11		
14	10	0,18565928	2	0,57114772	4	0,4531155	3	9		
15	11	0,25866945	2	0,60402236	4	0,31497221	2	8		
16	12	0,55340754	4	0,22677268	2	0,34583293	3	9		
17	13	0,63650008	4	0,27861004	2	0,44051784	3	9		
18	14	0,53699678	4	0,05673208	1	0,37708615	3	8		
19	15	0,57438532	4	0,24955156	2	0,05715073	1	7		
20	16	0,4886027	3	0,77845727	5	0,44018653	3	11		
21	17	0,28325981	2	0,10591692	1	0,42135431	3	6		
22	18	0,33199293	2	0,7139395	5	0,81116845	5	12		
23	19	0,69669987	5	0,50079854	4	0,55383686	4	13		
24	20	0,44310636	3	0,95885206	6	0,09739685	1	10		
25	21	0,74582684	5	0,97667478	6	0,13438453	1	12		
26	22	0,0018446	1	0,32713361	2	0,99050556	6	9		

2) En utilisant la fonction « ALEA », de syntaxe **=ALEA()** demander à l'ordinateur de mettre dans la cellule B5 un nombre choisi au hasard entre 0 et 1.

3) On sait qu'en lançant un dé à six faces, on obtient aussi un nombre choisi au hasard parmi : 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; et on a autant de chances d'obtenir chacun des ces six nombres (si du moins le dé est bien équilibré, c'est à dire s'il n'est pas truqué).
Par ailleurs, en utilisant la fonction ALEA, tous les nombres compris entre 0 et 1 ont autant de chances d'apparaître.
Dans la cellule C5 se trouve une formule qui traduit l'instruction suivante :
« Si B5 < 1/6 alors C5 = 1, si 1/6 ≤ B5 < 2/6 alors C5 = 2, si 2/6 ≤ B5 < 3/6 alors C5 = 3, si 3/6 ≤ B5 < 4/6 alors C5 = 4, si 4/6 ≤ B5 < 5/6 alors C5 = 5, si 5/6 ≤ B5 < 6/6 alors C5 = 6. »
Analyser cette formule et interpréter le résultat ainsi obtenu en C5. Indication : placer

les valeurs 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 6/6 et la valeur obtenue en B5 sur le segment ci-dessous :

4) Recopier les formules de B5 et C5 pour obtenir un second et un troisième dé (de D5 à G5).

Revenons au problème du Duc de Toscane : il voulait savoir si la somme des points obtenus en lançant trois dés avait plus de chances d'être égale à 10 que d'être égale à 9. Il s'agit donc à présent de calculer la somme obtenue à la suite du lancer de trois dés.

5) Inscrire en H5 une formule donnant la somme des points obtenus au premier lancer (simulé) de trois dés (ligne 5).

> La formule écrite dans la cellule C5 peut paraître *a priori* compliquée. En fait elle est du type : si le nombre aléatoire est inférieur à 1/6, alors écrire 1 sinon, si il est inférieur à 2/6 alors écrire 2 sinon …
> Elle est beaucoup plus naturelle qu'une formule du type Ent(6*Alea()+1) qui donnerait le même résultat, mais dont l'explication et l'interprétation seraient beaucoup plus complexes. Rappelons qu'ici le formule a été fournie par l'enseignant, **avec sa syntaxe exacte**.

6) En recopiant la ligne 5 vers le bas, obtenir 10 000 simulations d'un lancer de trois dés.

7) En utilisant la fonction **NB.SI** écrire en J1 une formule qui compte le nombre de « 9 » parmi les sommes obtenues lors des 10 000 lancers simulés. Faire de même pour le nombre de « 10 » en J2.

8) Comparer le nombre de « 9 » et le nombre de « 10 » obtenus.
Retour en classe entière, pour faire une synthèse des résultats obtenus.

9) Recommencer plusieurs fois l'expérience de 10 000 lancers de trois dés (pour que l'ordinateur simule 10 000 nouveaux lancers de trois dés, il suffit d'appuyer sur la touche **F9**) ; noter à chaque fois le nombre de 9 obtenus et le nombre de 10 obtenus, sur une feuille. L'observation du Duc de Toscane semble-t-elle se confirmer ?

> **Note technique** : la simulation de 10 000 lancers risque d'être extrêmement longue si le micro-processeur n'est pas assez puissant. On aura tout intérêt à préférer le « calcul sur ordre » (grâce à la touche F9) au « recalcul automatique » : sur Excel, menu Outils, Options, ongle Calcul, Mode de calcul … cocher la case 'sur ordre'.

Quatrième partie :

Utilisation de la représentation en arbres.

Au cours de la simulation, on n'a probablement pas obtenu à chaque fois plus de 10 que de 9. Cela peut être l'occasion de proposer aux élèves de vérifier de façon *théorique le résultat fortement suggéré par l'expérience. On peut aussi se rappeler que le Duc de Toscane ne disposait pas d'un ordinateur et qu'il a donc dû trouver une autre méthode !*

En lançant trois dés, on peut par exemple obtenir : 1, 5, 3 ; 2, 4, 1 etc.
1) En utilisant une représentation en arbres, recenser toutes les possibilités que l'on peut obtenir en lançant trois dés. À côté de chacune d'elles, indiquer le nombre total de points obtenus.
2) En déduire la réponse au problème du Duc de Toscane.

N.D.L.R. Au point de vue probabiliste, il y aurait un travail plus important à faire sur cette question. Mais les probabilités ne sont au programme ni de la seconde, ni de la première L. On se contentera donc de s'appuyer sur les représentations spontanées des élèves (dont on sait bien qu'elles peuvent être erronées). Ici, on met en œuvre implicitement l'équiprobabilité (toutes les branches de l'arbre sont « équivalentes »), et le fait que la probabilité d'un événement est le nombre autour duquel s'accumulent les fréquences observées. Cela correspond tout à fait à l'esprit du programme de seconde actuel.
Au sujet des représentations que les élèves se font de l'aléatoire, on peut se reporter à la brochure ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES AU COLLÈGE ET AU LYCÉE : EXEMPLES EUROPÉENS ET PROPOSITIONS, de l'IREM de Lorraine (parue en octobre 2001, coût 3 € ; cf. Bulletin APMEP nº 439, pages 262-263).

Courrier des lecteurs

À propos de l'article de Robert Vincent (bulletin 437) : « Géométrie du nombre d'or ».

Tout d'abord une petite remarque : pourquoi les intervalles de la corde à nœuds devraient-ils être d'une coudée – et quelle coudée ? Sumérienne, égyptienne, punique, etc. ?

Le triangle d'Euclide, où l'on a tracé une des bissectrices des angles à la base fait apparaître des segments tels que, rangés dans l'ordre décroissant, le rapport des segments de rang n et $n+1$ soit $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dit « nombre d'or ». Sa valeur approchée 1, 61803… est grossièrement proche de 5/3. Mais si l'on trouve effectivement le rapport 3/5 – à côté de 2/3 – entre pied et coudée antique associée, on ne trouve jamais la valeur approchée 0,612. Le rapport empan/pied est toujours 3/4.
L'usage d'une canne des bâtisseurs telle que la décrit R. Vincent est des p1us douteux. Mes dictionnaires (Enc. Quillet ; Hachette) - consultés aux entrées canne, bâtisseur – l'ignorent. Peut-on demander amicalement à R. V. de la chercher dans nos musées ? S'il la trouve, il obtiendra certainement l'autorisation de l'examiner pour nous en faire une description précise.

Magdeleine MOTTE