Dans quel chapitre ? À quel niveau ?

Henri Bareil

En sa page 51, la toute récente brochure APMEP nº 140 « Évaluation Terminales. Fascicule 1 – Présentation des résultats » propose la situation ci-dessous, décrite par une figure codée.

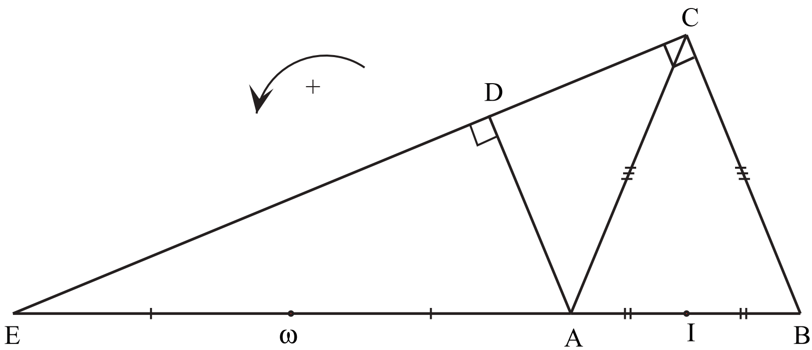

Figure 1

Le but de l'exercice étant de « ***montrer que* (ID) *est tangente au cercle de diamètre* [AE]** », l'énoncé suggère une méthode utilisant le symétrique F de C par rapport à I et la *similitude directe* de centre D transformant le point C en A. 10 % des élèves ont « maîtrisé l'ensemble de l'exercice » par cette méthode au demeurant excellente et détaillée en trois questions « aidantes ».

Mon propos est de proposer d'autres méthodes – pas « meilleures ! » –, plus élémentaires, souvent possibles dès la quatrième.

Idées-clés : utiliser davantage les angles, les configurations élémentaires, dégager ou créer des symétries ou des rotations.

INVESTIGATIONS PRÉLIMINAIRES

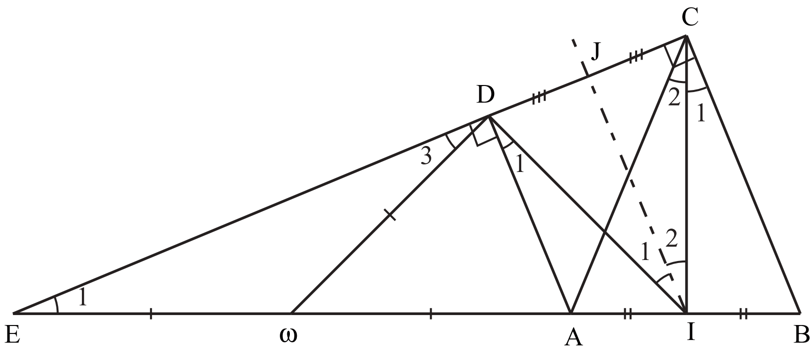

Figure 2

(L'égal codage des angles n'implique pas connue, d'emblée, leur égalité. Celle-ci sera établie peu à peu… Mais des codages différents au départ m'ont paru trop lourds.)

Recherchons, sans essayer d'abord de les organiser quant au problème :

• **DES PROPRIÉTÉS DE LA FIGURE**

1) Le triangle DEA est rectangle en D. Donc $\omega D = \omega E = \omega A$, et $\widehat{E_1} = \widehat{D_3} = \ldots$
2) Par exploitation de la « projection du milieu » (cette projection n'étant plus au programme des Collèges, elle peut y être remplacée, par exemple, par l'intervention du milieu K de [AC] et la considération de (JK) et (IK)… Cette introduction d'élément « transitif » – qui ici alourdit – est d'excellente méthode.), J étant le milieu de (DC), (IJ) ⊥ (DC) et (IJ) médiatrice de [DC].

   D'où ID = IC et, par symétrie par rapport à (IJ), $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ (mais, sans symétrie, cela vient après le 4) ci-dessous, en utilisant le triangle IDC).
3) $\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ (même complément $\widehat{B}$), et $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (triangle CAB isocèle et (CI) médiane donc aussi…).
4) Le parallélisme de (DA), (IJ), (CB) entraîne $\widehat{I_1} = \widehat{D_1}$.
5) D'où la kyrielle $\widehat{E_1} = \widehat{D_3} = \widehat{D_1} = \widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{C_2} \quad \widehat{C_1}$.
6) $D\omega A$ est isocèle avec $\widehat{D\omega A} = 2\widehat{D_3} = \widehat{DIC} = \widehat{ACB}$.
   Les triangles isocèles ωDA, IDC et CAB sont donc semblables (de là l'égalité $\widehat{\omega DA} = \widehat{\omega AD} = \widehat{IDC} = \ldots$).

Remarque. L'égalité $\widehat{C_2} = \widehat{D_1}$ peut se démontrer directement :
   DCA et ICA sont deux triangles rectangles de même hypoténuse. D'où le cercle DAIC. Or $\widehat{D_1}$ et $\widehat{C_2}$, inscrits dans le même cercle, y interceptent le même arc.

(….) Liste non exhaustive ! De même l'ordre des enchaînements est modifiable…

• **DES ÉQUIVALENCES DE LA PROPRIÉTÉ À DEMONTRER**

D est sur le cercle de diamètre [AE].
Pour affirmer que (ID) est tangente, en D donc, il faut et il suffit que l'on sache démontrer l'une des propriétés fondamentales suivantes :

a) (ID) est perpendiculaire à $(D\omega)$.

b) $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (configuration d'angles inscrits … ou transition par $\widehat{D_3} = \widehat{D_1}$ et $\widehat{EDA}$ droit).

c) $ID^2 = \overline{IA} \times \overline{IE}$ (propriété de la galaxie « Puissance d'un point par rapport à un cercle », où l'on peut éviter les mesures algébriques par des considérations de disposition de points).

Revenons maintenant sur la méthode EVAPM (Cf. figure 3).

Pourquoi l'intervention de F ?
Probablement pour donner à I le statut de ω (milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle…).
Ce qui permet d'associer les triangles rectangles semblables DAE et DCF dans des similitudes où ω et I se correspondent…

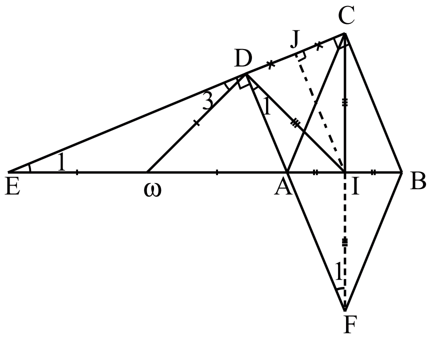

Figure3

CELA DIT, VOICI D'AUTRES MÉTHODES :

Méthode 1

Les égalités angulaires décelées donnent rapidement $\widehat{D_1} = \widehat{D_3}$. D'où la conclusion $\widehat{EDA} = 90°$, d'où $\widehat{\omega DI} = 90°$.
Niveau : Collège.

Méthode 2

Soit la rotation de centre D, d'angle 90° (–90° si l'on oriente), qui envoie [DC) sur [DA).

Comme $\widehat{IDC} = \widehat{\omega DA}$ (cf. propriété 6), [DI) vient sur [Dω).
Donc (DI) $\perp$ (Dω).
Niveau : Collège.
Remarque : La rotation de la méthode 2 est liée à une configuration : celle de deux triangles isocèles semblables ICD et ωAD tels que deux côtés de l'un soient respectivement perpendiculaires à leurs homologues de l'autre : il en va de même des troisièmes côtés.
Un tel théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème général relatif à la similitude.

Méthode 3

Comme $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID}\right) = \left(\overrightarrow{\omega A},\overrightarrow{\omega D}\right)$, il existe une rotation portant sur les directions de droites qui, envoyant la direction (IC) sur la direction (ID), envoie la direction (ωA) sur la direction (ωD).
Cela peut se traduire en rotation « ordinaire » simple, par exemple par l'intermédiaire du translaté de IDC, I venant en ω.
Cela ne serait plus au programme des lycées. Mais cette méthode me semble ne relever que d'une géométrie « sensible » qui n'exige pas de relever d'un programme…

Méthode 4 (si l'on connaît les relations métriques correspondantes…)

CEB est rectangle en C, de hauteur [CI] relative à l'hypoténuse.

Donc $CI^2 = -\overline{IB} \times \overline{IE}$.

Mais IC = ID (2) et $\overline{IA} = -\overline{IB}$.

Donc $ID^2 = \overline{IA} \times \overline{IE}$ et, avec d), …

Méthode 5

Symétrisons I par rapport à J : cf. figure 4. ICLD est un losange. Donc (DL) // (IC), d'où (DL) $\perp$ (EB). Ainsi D est l'orthocentre du triangle LEI (deux hauteurs : (EJ) et (DL)). Donc (ID) est la troisième hauteur : (ID) $\perp$ (EL)

Or $\widehat{D_3} = \widehat{E_1} = \widehat{E_2}$. De là (D$\omega$) // (EL), et (ID) $\perp$ (Dω).
Niveau : Collège.

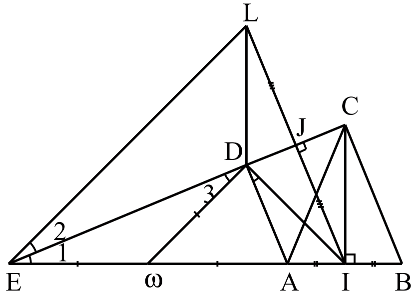

Figure 4

Méthode 6 (toujours avec la figure 4)

Utilisons encore le fait que ICLD est un losange, mais, cette fois, en envisageant la rotation $\mathcal{R}$(D, I $\to$ L). Que devient (Dω) ?

Utilisons la kyrielle d'angles égaux $\widehat{I_1}$ = … esquissée en (5), au départ : (Dω) va tourner d'un angle égal à $\widehat{E\omega D}$, en position d'alterne-interne, donc va devenir parallèle à (EB), donc orthogonale à (DL)…
Niveau : Collège.
Remarque : Les triangles isocèles DLI et ωED présentent la disposition remarquable déjà notée en « Remarque » de la méthode 2.

Méthode 7

Symétrisons « davantage » par rapport à (EC) : B $\to$ B′, A $\to$ A′.
D'après le « théorème des milieux » :
C et I milieux respectifs de [BB′] et [BA] d'où (B′A) // (CI). Donc (B′A) $\perp$ (EB).
Par symétrie, (BA′) $\perp$ (EB′).
Or, toujours avec le même théorème des milieux : (DI) // (BA′) et (Dω) // (EA′).
D'où…
Niveau : Collège.

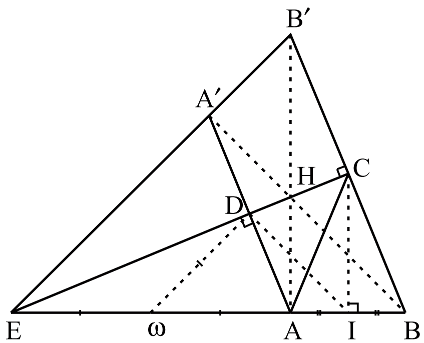

Figure 5

Méthode 8 (à partir des figures conjuguées 4 et 5)

$\widehat{CEB'}$ et $\widehat{CEL}$ sont confondus (même symétrique $\widehat{CEB}$, …). Donc L est sur (EB′).
Et, comme (CI) ⊥ (EB), il en va de même pour leurs symétriques par rapport à (EC) : (LC) ⊥ (EB′).
IDLC étant un losange, (ID) // (LC) donc (ID) ⊥ (EB′).
Reprenons (ωD) // (EA’). Il s’en déduit (ID) ⊥ (ωD).
Niveau : Collège.

Méthode 9 : et la relation de Pythagore ?

Peut-on démontrer que $\omega I^2 = \omega D^2 + DI^2$?
c.a.d. $(\omega A + AI)^2 = \omega\, D^2 + DI^2$?
soit, en développant et compte tenu de $\omega A = \omega D$,
$AI^2 + 2\ \omega A \times AI = DI^2$?
$AI\,(AI + AE) = DI^2$?
$AI \times EI = DI^2$?
Cela renvoie à $IB \times IE = IC^2$, c’est-à-dire à une relation métrique, dérivée de la relation de Pythagore, utilisée dans la méthode 4. Aussi bien ces méthodes 4 et 9 relèvent-elles du même socle « métrique ».

Méthode 10 : et l’analytique?

- **Les Olympiades académiques de Première 2001, en leur exercice national nº 2** (cf. brochure APMEP nº 142) **ont montré que les élèves « séchant » en géométrie n’avaient généralement pas l’idée d’un recours à l’analytique. N’oublions pas de les y accoutumer !**
- Ici, cette voie est très acceptable, par exemple avec un repère orthonormé (I, B, K), K étant sur [IC]. Les propriétés en jeu pour trouver les coordonnées de D et de ω ne dépassent pas le niveau de la troisième et l’on établit ainsi que le produit des coefficients directeurs de (DI) et (Dω) est –1. D’où…
  Niveau : Troisième, Seconde.
- De même pourrait-on envisager une utilisation de complexes en terminale.
- Ici on pourrait aussi songer au produit scalaire, avec un repère orthonormal. Mais cette méthode ne semble pas des plus immédiates.

COMMENTAIRES

- **La plupart des méthodes proposées ici sont accessibles dès la Quatrième, (dès la Troisième**, pour la dernière) dès lors qu’elles ne mettent en jeu que des propriétés angulaires simples, des triangles isocèles ou des losanges, des symétries ou des rotations (celles-ci accessibles et fécondes sans théorie, uniquement par la perception expérimentale coutumière).
  Seules la 4 et la 9 mobilisent des relations métriques « hors-cours » (mais simples et, en tous cas, du bagage minimum d’un enseignant).

- Il existe certainement d'autres méthodes encore !
  Mais la pluralité soulignée ici montre déjà à quel point la géométrie la plus élémentaire peut offrir d'espaces de liberté et de recherche, d'imagination et de créativité … méthodiques ! (à cultiver !).
  Trouve-t-on cela, qui est indispensable pour toute formation scientifique, dans d'autres domaines des mathématiques ? **L'y trouve-t-on autant ?**
  En cela la géométrie est un outil précieux, alors même que, ici par exemple, le résultat lui-même est dénué d'intérêt…
- Hors EVAPM (qui, visant à évaluer l'impact des programmes, a ses propres contraintes), **le problème gagnerait, d'ailleurs, à être présenté de façon plus ouverte, en faisant d'abord rechercher l'orthogonalité comme conjecture**, ce qui fait un problème plus « défi », plus motivant…
  De toutes façons, il peut être accommodé à diverses sauces selon les classes, les élèves, le mode d'intervention, en cours, club, travail personnel…