Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions

Jean Dhombres

Résumé. Le présent article se veut un exercice critique du commentaire historique, et ce commentaire est orienté car destiné à des enseignants de mathématiques. Il est devenu déplaisant en effet d'entendre vanter une présentation systématique d'histoire dans l'éducation mathématique ; aussi bien les grandes bourgeoises glorifiaient les richesses d'antan en distribuant aux pauvres les habits passés de mode. Le rôle de l'historien des mathématiques ne se résume pas à collectionner des textes anéantis dans leur ancienneté par le refus du commentaire, la peur de l'interprétation et leur difficulté. Ces textes dépassent presque toujours le niveau attendu pour une classe, et l'histoire n'a pas à masquer ce dépassement. L'histoire est rarement simplificatrice. Ainsi, l'exemple ici développé des fonctions de fonction contraint de parler de leur genèse comme composition des fonctions, et donc de servir le calcul différentiel de Gottfried Leibniz, Isaac Newton, Jean Bernoulli et Guillaume de L'Hôpital dans la décennie 1690. Alors que l'on évoque les fonctions de fonction dans l'enseignement secondaire bien avant de parler de dérivée. Il faut toujours discuter l'avantage prévisible du biais historique dans l'enseignement ; à l'enseignant, compte tenu de son expérience, de mesurer l'avantage réel pour les élèves. L'histoire ne saurait lui imposer ses méthodes.

Ma première rencontre avec une certaine conception de l'histoire des mathématiques fut heureusement malheureuse. En ce qu'elle me prévint contre la tentation de nouer un enseignement par l'histoire. Le contexte était, il y a un quart de siècle déjà, une rencontre télévisée de type culturel, mais sans autres mathématiciens présents ; à brûle-pourpoint, et alors que la discussion roulait sur la connaissance en général, il m'était demandé de faire comprendre ce que représente un déterminant, ce mot étant apparu comme philosophiquement inquiétant. Je ne plaisante pas ! Alors qu'en un terrain aussi peu sûr j'hésitais à formater ma réponse, commençant par des généralités, outil de calcul plus théorique que pratique, ancienneté de l'idée chez Leibniz pourtant non diffusée, indépendance de vecteurs, puis allais sans doute passer à une explication du rang, je fus brutalement coupé. Voyez, triomphait mon interrogateur, le formalisme rend le mathématicien ignorant de son passé, et il ne peut plus simplement dire que le déterminant détermine le volume d'un parallélépipède, que c'est ainsi que fut inventé l'objet et *ipso facto* que doit être enseignée la notion correspondante.

J'eus beaucoup de mal à reprendre la parole, ne parvenant pas à interrompre le flot d'invectives sur l'abstraction, la perte du sens et celle de la géométrie, et pus à peine glisser la demande d'une référence aux déterminants chez Euclide ou même

(*) EHESS, Paris.

dans la géométrie élémentaire (alors que chacun reconnaît qu'elle apprend à calculer des volumes comme ceux des parallélépipèdes). Qu'apprend en effet du déterminant la notion de volume, à quelqu'un qui n'a pas fait de mathématiques depuis des années et ne voit pas du tout les propriétés d'addition des volumes ? Tel se présentait pour moi le spectateur moyen de cette rencontre culturelle. Bien sûr, devant un public d'élèves mathématiciens, c'est de l'idée de volume que j'aurais pu partir, pour immédiatement faire valoir les propriétés de linéarité, d'indépendance, etc. Mon interrogateur n'en démordait pas, enchaînant les arguments de rhéteur. Ne venant pas du ciel, les mathématiques ont une histoire qui part du simple ; cette histoire est la seule façon de les enseigner poursuivait-il, car la mathématique fut construite avec économie et sens du naturel jusqu'au drame du formalisme du XX^e^ siècle ; pour autant, il n'est pas nécessaire de connaître précisément cette histoire des mathématiques, et le naturel des idées mathématiques est tel qu'il suffit de penser ce qu'une telle histoire aurait dû être, délivrée des contingences malheureuses que sont quelques génies trop portés à l'abstraction. J'avouais simplement goûter ces contingences !

J'étais aussi frappé de l'ancienneté de tels arguments, et la *Langue des calculs* de Condillac me revint en mémoire, cet ouvrage de la fin du XVIII^e^ siècle, alors jugé des plus pertinents par la nouvelle éducation issue de la Révolution, et enseignant comment reconstruire toute la notion de nombre par sa « généalogie ». L'auteur s'essoufflait avant d'atteindre les nombres imaginaires[1], mais qu'importait l'histoire puisque Etienne Bonnot de Condillac pouvait l'inventer :

> Cela me suffit, et je suis en droit de le supposer : car il m'importe bien moins de connaître le plus long chemin qu'ont pris les inventeurs, que le plus court chemin qu'ils auraient pu prendre[2].

M'exaspère dans cette déclaration le mépris affiché pour l'invention à ses débuts et plus encore qu'il soit fondé sur une assurance. Celle de disposer du plus court chemin, et avec comme conséquence de vouloir imposer ce seul chemin pour l'enseignement. Je ne m'insurge pas contre une faute historique, mais contre un dogmatisme. Je sais par expérience que l'enseignant choisit sa présentation, et dès lors doit se persuader que ses choix sont les meilleurs. Mais cette reconnaissance est relative à une classe précise, à un niveau, et à un cheminement[3]. L'histoire des sciences, selon ma conception, l'aide moins à faire des choix qu'à se les justifier, en se débarrassant notamment du dogmatisme de ce qui est déclaré le meilleur parce qu'il est la dernière mode du programme, ou de la simple habitude d'une formation mathématique particulière. L'histoire n'apprend pas pour autant le relativisme, et favorise bien les explications, plus modestes, sur un bon chemin, explications sans lesquelles il n'y a aucun enseignement utile sur le long terme.

(1) Jean Dhombres, « La Langue des calculs de Condillac, ou comment propager les Lumières », *Sciences et Techniques en Perspective*, 2, 1983, p. 193-230.
(2) *La Langue des calculs, ouvrage posthume et élémentaire*, Paris, Imp. de C. Houel, an VI, p. 222.
(3) Raymond Boudon, *L'art de se persuader des idées douteuses, fragiles ou fausses*, Paris, Fayard, 1990.

Ai-je pour autant trouvé une utilité pour l'histoire ? L'histoire des sciences cherche à rendre compte du cheminement depuis l'invention (ou les inventions) et leur mise en science ; elle peut expliquer dans quel sens et dans quel cadre on peut parler de meilleur chemin. La mise en science se comprend comme l'insertion dans une théorie, dans un manuel, dans un discours organisé, et dégagé de toutes les subjectivités. L'objectivation de l'invention est l'objet même de l'historien des mathématiques, qui ne peut manquer de dire aussi les défauts dans cette objectivation. Le récit d'objectivation – et j'ai mis un singulier pour faire court et éviter la mention des possibles différents que permet une invention lorsqu'elle est lue par des successeurs – n'a pourtant pas à devenir la norme de l'enseignement. Le récit peut servir à l'enseignant, mais à la façon dont il peut lui être utile de connaître plus de mathématiques que celles du programme qu'il enseigne. Il y a là un paradoxe fondamental de l'enseignement, et il tient à ce que la mathématique n'est pas une pure logique. Je ne suis pas sûr que tout le monde m'accorde ce point.

Il me semble qu'à Condillac, et ses émules, et donc à ceux qui veulent normer l'histoire parce qu'ils considèrent qu'il y a une simple logique de la connaissance et de son acquisition, il faille seulement opposer le rire. Leur démarche est une imposture. L'historien peut retourner aux textes, et à nouveau raconter, analyser, discuter, objectiver. Il ne convaincra pas ceux qui inventent l'histoire quand elle ne leur convient pas. Ne suis-je donc pas à prouver que l'histoire est une voie sans issue ?

À quoi peut servir l'historien des mathématiques pour l'enseignement ?

C'est parce que j'exclus d'emblée un rôle normatif pour l'historien, et que par ailleurs toute activité intellectuelle doit aujourd'hui se justifier par ses effets, qu'il me faut donner une réponse responsable à la question posée comme titre de ce nouveau chapitre. Mais ma réponse ne saurait avoir de sens pérenne, et je la fais volontiers dépendre du contexte culturel de l'enseignement des mathématiques. Pour moi, aujourd'hui et en France, l'historien des mathématiques participe de la vie intellectuelle dans l'exacte mesure où il aide, grâce à un regard sur le passé orienté par le présent, à mieux situer la mathématique dans la connaissance et dans la pratique culturelle qui en est arrivée à exclure la mathématique de son champ. Et cette inscription est devenue une urgence pour aujourd'hui. Je ne crois pas nécessaire d'insister.

L'historien participe en plus au façonnement de l'image des mathématiques, à sa représentation parmi les autres activités et intérêts, à la publicité en quelque sorte, et jusqu'à la publicité dans des situations culturelles anciennes. Parce que les disciplines intellectuelles sont rivales. On le constate mieux aujourd'hui, puisque la plupart des revues de vulgarisation envisagent toute question mathématique d'actualité par son histoire. À la façon *mutatis mutandis* des articles professionnels mathématiques, qui commencent le plus souvent par des références – terme d'histoire – à des articles antérieurs en faisant un bilan, en situant dans le temps récent un problème ou une méthode. Bien sûr, le faisant au niveau supposé de connaissances des lecteurs spécialisés de ces articles de science, ce qui rend difficile la lecture par d'autres lecteurs.

L'histoire des mathématiques peut servir en outre aujourd'hui de passerelle. Elle doit dire les circonstances culturelles de tel ou tel déploiement. Dans une culture comme la culture française contemporaine, qui a du mal à juger sereinement le rôle des sciences parce qu'elle craint un anéantissement de l'humanisme, l'historien fournit le rappel qu'avec Charles V on peut citer Oresme, qu'avec Sade on peut encore parler du déterminisme de Laplace, que Michel Chasles a joué pour la géométrie du passé le rôle de réanimation de Victor Hugo pour le monde du Moyen Age avec Notre Dame de Paris, etc. Il me paraît inutile de rajouter trop d'exemples, et je laisse le lecteur trouver ses propres marques.

Qu'on n'aille point me rétorquer qu'ainsi rien n'aurait changé ces dernières décennies. Car l'apparition de l'histoire des mathématiques dans les médias est, enfin, l'entrée d'une certaine technicité mathématique dans la vulgarisation, et ainsi l'acculturation des mathématiques dans l'opinion générale. Je sais que ce point fait difficulté.

La mathématique ne vit plus dans un monde clos, auquel n'auraient accès que quelques privilégiés ou quelques fous. Et c'est bien ce qui doit toucher l'enseignant de mathématiques. Même s'il ne s'agit pas d'un savoir, le professeur ne peut plus tenir pour négligeable le fait que ses élèves aient déjà entendu parler de « nombres aléatoires », d'espace à quatre dimensions, de vecteurs, et de fractales, de « catastrophes géométriques », ou de « codes » fondés sur les nombres premiers.

Il y a quelques années encore, dans les revues de vulgarisation, on préférait le discours épistémologique général, et les journalistes refusaient les points précis, au nom d'une incompétence mathématique supposée des lecteurs : bref on colportait quelques légendes sur les mathématiciens hors du monde, ou tellement géniaux qu'ils n'appartenaient pas à ce monde. La laïcisation, ou la socialisation des mathématiques, est passée par la prise en compte des idées mathématiques jusque dans leur technicité. Aucun mathématicien ne reconnaît de pouvoir à une idée si elle ne s'appuie sur une méthode, une technique, ou une performance Si, en dehors de l'école et de milieux spécialisés, les mathématiques touchent culturellement plus de contemporains, c'est aujourd'hui par le biais de l'histoire.

Mais les enseignants de mathématiques n'ont pas tous transposé pour leur propre gouverne ce phénomène assez caractéristique de notre temps, et qui les concerne en tant que praticiens des mathématiques. En ce sens qu'ils n'acceptent pas de reconnaître que, par le biais de l'histoire, ils peuvent maintenir le contact avec les mathématiques qui ne sont pas au programme de leurs cours. Il y a bien sûr d'autres moyens, mais certains prennent l'histoire comme un refuge, et c'est alors une histoire convenue qui permet d'éviter de penser en particulier aux raisons des changements dans les mathématiques du programme. Je dois aussitôt ajouter une critique, cette fois à l'égard des historiens ; ceux-ci, étant devenus de plus en plus professionnels et tant mieux, en oublient de faire leur métier. Véritablement celui d'éclairer les mathématiques d'aujourd'hui par les mathématiques d'hier et d'avant-hier. C'est leur devoir actuel, et leur devoir culturel[(4)]. Ce devoir peut peut-être changer demain !

(4) Au début du XX^e siècle, Sir Thomas Heath était selon moi justifié d'évoquer, de façon certes anachronique, les récentes coupures de Dedekind, afin de faire comprendre le livre V des *Éléments* d'Euclide. Car ce livre faisait encore à cette époque l'objet d'un enseignement

J'ai été trop brutal à propos de l'enclavement dans les mathématiques du programme, et je voudrais alors préciser comment a fonctionné la vision épistémologique positiviste que je ne dénigre pas *a priori*. Elle fut pour beaucoup dans l'établissement de la tradition d'enseignement mathématique en France, et contrairement à ce que beaucoup croient, elle fut maintenue jusque dans les « mathématiques modernes ». Conçue comme un développement, l'étape positive d'une théorie mathématique, celle où son enseignement est enfin reconnu possible, doit se débarrasser de l'étape métaphysique, et des restes éventuels de l'étape théologique. Il n'y a alors qu'un seul bon programme dans une telle vision, et c'est celui qui a la cohérence d'un élémentaire. En ce qu'il donne les moyens de savoir ce que l'on peut sûrement faire avec les méthodes enseignées, mais fait aussi pressentir le positif, bref ce que l'on pourra en faire dans les classes supérieures.

Cette tentation par le haut empêche malheureusement l'activité de critique du programme par ceux qui tentent de le maîtriser, et ferait oublier un des buts de l'enseignement des mathématiques. Ainsi, l'algèbre des structures et la topologie générale façonnaient l'étape finale des mathématiques modernes qui ne parvenaient pas à établir des niveaux élémentaires stratifiés et auto-gérables. Dans les années 1980, l'histoire des mathématiques est donc intervenue doublement, à titre de correction et à titre de subversion. Je dois m'arrêter sur ces deux objectifs, bien différents l'un de l'autre.

À titre de correction, une forme positiviste de l'histoire des mathématiques, ou plutôt sa forme comtienne, a consisté à faire percevoir ce que les méthodes anciennes ne permettaient pas, et même ce qu'elles compliquaient. Le recours à l'histoire devenait une critique en vue d'une meilleure appréhension des mérites d'un programme nouveau. L'ennui fut que tout examen historique d'une notion, d'un théorème, d'une méthode, même dans un passé récent (et en l'occurrence le passé pouvait être Cantor, Hilbert, Lebesgue, etc.) conduit le plus souvent à dépasser, et quelquefois de loin, le programme, et ne permet, ni de simplifier ni d'élémentariser. Le bât blessait au niveau des programmes eux-mêmes des mathématiques dites modernes, et la méthode historique renforçait la difficulté au lieu de la diminuer. Cela a néanmoins permis une histoire professionnelle, mais elle s'est vite dégagée de son rôle auprès des enseignants. Ainsi, le retour à la géométrie dans un mouvement bienvenu contre les excès des mathématiques modernes fut le moteur d'une nouvelle histoire de la géométrie ; on s'aperçut en lisant les textes que la « géométrie élémentaire » que certains pensaient devoir reprendre au lycée, était une judicieuse invention des professeurs de mathématiques du début du XIX^{e} siècle. Ils étaient placés entre géométrie des figures et algèbre, mais dans une situation éducative n'ayant pas grand-chose à voir avec la situation des années 1980. Ces professeurs d'il

---

en Angleterre. Je crois qu'il faudrait de même qu'aujourd'hui des historiens traduisent les articles bilans de l'*American Mathematical Monthly*, au profit d'une communauté enseignante française, en fournissant plus de citations et de références historiques à ces articles, tout en maintenant le lien que ces articles constituent avec l'actualité mathématique. J'ai été frappé de voir les références que Walter Rudin faisait à de tels articles dans un livre d'enseignement par excellence, *Real and Complex Analysis* (traduction française de la troisième édition, Dunod, 1998).

y a presque deux siècles avaient ainsi réussi une remarquable création, sans évocation historique véritable, parce qu'ils avaient adopté un compromis permettant une gradation de la connaissance mathématique. Les historiens purent mieux examiner ce compromis, avec toute l'érudition voulue. Mais seule l'analyse de la nouvelle situation des élèves et des professeurs dans les années 1980, et celle concomitante des mathématiques modernes, pouvaient justifier un nouveau changement abolissant les mathématiques modernes, et par exemple une géométrisation. C'est une approche par la modélisation qui, en 2000, a le vent en poupe, la géométrie n'apparaissant que comme un cas particulier. Cette approche donne à nouveau un lieu éducatif possible pour l'histoire des mathématiques dans sa forme positiviste, car cette histoire est riche de modélisations souvent abandonnées, et qui peuvent ainsi être critiquées dans leurs limites mêmes. Critiquer n'est pourtant plus une habitude dans l'enseignement des sciences en France ! Aussi, sont peut-être plus adéquates les modélisations de la statique et de la dynamique. Car elles demeurent valides, et sont bien repérées par les historiens de mathématiques dont les travaux deviennent directement utilisables par les enseignants. Les modélisations de la statistique sont moins étudiées du point de vue historique, alors même que l'enseignement de la statistique pourrait en avoir besoin aujourd'hui jusque dans une fonction critique. Je répète que l'histoire des mathématiques doit paradoxalement jouer de l'actualité.

L'autre forme de recours à l'histoire, celle que j'ai dite subversive, se transforma en réaction, et le retour au passé fut considéré comme la bonne manière d'enseigner. Une réaction est à la fois négatrice d'histoire, et négatrice du programme. Il peut y avoir une motivation subversive dans le fait de faire de l'histoire et tant mieux ! L'histoire faite n'entretiendra pourtant pas la subversion chez les élèves. Sauf à truquer cette histoire, en faisant omission des défauts des mathématiques sanctionnées par l'histoire, en oubliant de dire les risques et les objectifs d'autrefois. On ne fait pas l'impasse intellectuelle sur le progrès. Souvent, dans cette utilisation de l'histoire, se greffent des motifs de préférence qui ont à voir avec le nationalisme et le conservatisme (Newton contre Descartes, Newton contre Leibniz, etc.) et jusqu'à la défense d'une « exception française ». Je me méfie fortement de l'idée connexe de cette réaction, selon laquelle une histoire correctement construite engagerait la bienveillance de l'enseignant à l'égard des élèves, contre la malveillance supposée des programmes. Usant de l'histoire, certains définissent l'éducation mathématique comme *caring accomplice of mathematics*, et si cette molle rhétorique de la sollicitude n'engage pas à grand chose, elle peut néanmoins déboucher sur le mot d'ordre qui fait de la mathématique une ennemie : « démystifier les règles du jeu pour le joueur novice ». Je n'apprécie pas du tout cette démagogie de l'ignorance.

Me semble instructif un exemple historique de « démystification », opérée il y a un peu moins de deux siècles par un professeur de mathématiques répondant au nom de Daniel Encontre(5). Je devrais m'expliquer sur la qualificatif « instructif » que j'ai

(5) Professeur doyen de la faculté des sciences de l'Académie de Montpellier comme l'indique sa titulature lors de la parution d'un article « d'analise élémentaire », Daniel Encontre est aujourd'hui oublié du monde mathématique, tant en France on a peu de souci d'une mémoire écrite sur les professeurs.

utilisé, car la mathématique que je vais exposer est mauvaise, irrémédiablement mauvaise.

Qu'y a-t-il d'instructif dans l'historique de la notion de fonction ?

Encontre exerçait dans des classes de mathématiques transcendantes, et avait comme élève Auguste Comte, lorsqu'il publia en 1813 dans les *Annales de Mathématiques pures et Appliquées* une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Qu'il y ait eu besoin de « démystifier » tenait à une situation, contradictoire sur deux plans au moins, l'un mathématique et l'autre culturel.

D'une part, le théorème sur la factorisation des polynômes réels en facteurs simples contraignait de sortir des nombres réels pour aborder les nombres imaginaires dont on ne facilitait pas l'acquisition élémentaire en les disant encore « impossibles ». S'il existait depuis 1795 une démonstration courte du théorème, due à Laplace et par lui présentée comme un élémentaire des classes(6), cette démonstration requérait une bonne compréhension de la théorie algébrique de l'élimination, jugée difficile et d'ailleurs qui n'est jamais passée dans l'enseignement élémentaire. D'autant que la démonstration courte de Laplace, si elle réduisait par l'algèbre polynomiale les imaginaires à ceux intervenant pour le second degré seulement, ne manquait pas la mention cruciale d'un théorème des valeurs intermédiaires dont le statut était épistémologiquement indécis. Lagrange indiquait pourtant que ce théorème relevait de l'algèbre et définissait cette branche des mathématiques en 1798 comme « l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues »(7). Le risque était d'élémentariser la notion de fonction par l'algèbre et le calcul polynomial. C'est le risque que prit Encontre, piètre lecteur de Lagrange, et qui lui fut fatal.

D'autre part, et c'est l'autre contradiction des premières années du XIXe siècle, les imaginaires étaient désignées comme une surprise, mauvaise mais nécessaire, que fait à la nature la « souveraine raison, qui a tout établi *in numero, pondere et mensura* »(8). Ainsi était-il écrit au tome III de l'*Histoire des Mathématiques* publiée chez H. Agasse en mai 1802, une entreprise culturelle importante de Jean Etienne Montucla poursuivie par Jérôme Lalande, et que les professeurs lisaient, dont on parlait dans la *Décade philosophique*, le journal des intellectuels En reprenant la phrase de la Bible sur la sagesse mathématique du Créateur, l'auteur glorifiait le seul génie humain, car il tirait de son propre fonds l'invention des imaginaires. Ces nombres paraissaient donc impliqués dans le débat sur la religion, et les mathématiques, pour la première fois devenues obligatoires pour tous dans l'enseignement secondaire des lycées depuis 1802, se voyaient associées à l'athéisme. Les démystifier était de bonne règle, par exemple pour un esprit protestant comme le professeur Encontre. Qui voudrait le critiquer ?

(6) Jean Dhombres (éd.), *L'École normale de l'an III. Leçons de Mathématiques, Laplace, Lagrange, Monge*, Dunod, 1992, annexe 6, p. 477-490.
(7) Jacques Louis Lagrange, *Traité de résolution numérique des équations de tous les degrés*, 1798, p. vij.
(8) Jean Etienne Montucla *et alii*, *Histoire des mathématiques*, tome III, H. Agasse, Paris, 1802, p. 28.

La double démystification parut pouvoir résulter d'une simple conception de l'expression des racines d'un polynôme en tant que fonction des coefficients. Pour le théorème fondamental, indique Daniel Encontre dans le langage de la sollicitude,

> je crois donc rendre un service de quelque importance aux élèves qui suivent les classes de mathématiques spéciales, en démontrant ici, d'une manière facile, sans rien supposer au-delà des connaissances qu'on a dû ou du moins pu acquérir avant de s'occuper de cette matière.

Deux lemmes sont indiqués parmi une kyrielle d'autres, dont une excellente formulation des propriétés algébriques des nombres complexes, et ces lemmes vont nouer la « preuve » du théorème fondamental. Je les énonce sans commentaire pour pouvoir passer à leur utilisation dans un théorème dont je recopie intégralement la démonstration.

> Lemme 1. Toute fonction dans laquelle entrent des quantités imaginaires $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, …, $A + B$ peut être ramenée à la forme $A + B\sqrt{-1}$.
> Lemme 2. Dans toute équation $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + T = 0$, la valeur de l'inconnue est une *fonction* des coefficiens[9] A, B, C, ...,T.
> THÉORÈME. Toute équation qui n'a point de racines réelles en a au moins deux imaginaires de la forme $A + B\sqrt{-1}$.
> Démonstration. Une équation qui n'a point de racines réelles est nécessairement de la forme[10]
> $$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots + T^2 = 0.$$
> Je désigne le dernier terme par T^2, pour mieux faire entendre qu'il est éventuellement positif. Soit fait $x^{2m} = -y^{2m}$, ou $x = y\sqrt[2m]{-1}$. Nous aurons en substituant
> $$-y^{2m} - \frac{A}{\sqrt[2m]{-1}}y^{2m-1} - \frac{B}{\left(\sqrt[2m]{-1}\right)^2}y^{2m-2} - \ldots + T^2 = 0,$$
> ou bien
> $$y^{2m} + \frac{A}{\sqrt[2m]{-1}}y^{2m-1} + \frac{B}{\left(\sqrt[2m]{-1}\right)^2}y^{2m-2} + \ldots - T^2 = 0.$$
> Soient faits $A' = \dfrac{A}{\sqrt[2m]{-1}}$, $B' = \dfrac{B}{\left(\sqrt[2m]{-1}\right)^2}$, …, nous aurons
> $$y^{2m} + A'y^{2m-1} + B'y^{2m-2} + \ldots - T^2 = 0.$$
> Or, il a été démontré ci-dessus que, si A′, B′, …, étaient des quantités réelles, il existerait une fonction de A′, B′, …, laquelle donnerait au moins deux racines réelles pour y. A′, B′, … n'étant pas réelles, les deux valeurs données par la fonction pourront n'être pas réelles ; mais, de quelque nature qu'elles soient, il suffira de les multiplier par $\sqrt[2m]{-1}$ et nous aurons pour x deux valeurs correspondantes, compliquées, à la

(9) Les coefficients A, B, C, …, T sont bien sûr réels.
(10) Encontre avait démontré, selon les standards admis à l'époque par Lagrange, qu'un polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle, et qu'un polynôme de degré pair et dont le coefficient constant est négatif, possède deux racines réelles au moins.

vérité, de différentes sortes d'imaginaires ; mais qu'on pourra toujours ramener à la forme $A \pm B\sqrt{-1}$.

Horrifié, comme devant la peste, Cauchy n'a jamais voulu citer de textes de Jean Robert Argand, textes pourtant novateurs sur les imaginaires (la représentation géométrique), justement parce qu'ils étaient parus dans les Annales où l'on tolérait des raisonnements à la manière de Daniel Encontre.

On peut pourtant expliquer que les deux lemmes responsables des dégâts font jouer deux définitions différentes d'une fonction, une définition causale (la fonction exprime la dépendance d'une variable par rapport à une autre, sans que la nature de dépendance soit déterminée), et une définition opératoire (la fonction exprime les combinaisons d'opérations autorisées et répertoriées, qui permettent de passer d'une variable à une autre)(11). S'il est possible que la mention d'un tel exemple historique aide des élèves, ce ne peut être qu'en les décontractant devant l'erreur de logique … d'un doyen de Faculté. Mais est-on sûr de bien vouloir expliquer l'erreur ? Souhaite-t-on, dans une classe d'aujourd'hui, soulever les ambiguïtés de l'étape métaphysique des fonctions, alors que l'usage « positif » des fonctions, et ce même en dehors du lycée, a banalement adopté le sens de correspondance et de liaison ? Il ne faut jamais négliger la connaissance banale et commune des élèves. On ne peut oublier que les générations n'ont pas le même bagage intellectuel et que les « vieux » ne sont pas *ipso facto* plus savants que les « jeunes ». On reconnaîtra en tout cas que le détour historique, par l'erreur sur les fonctions, n'est pas économique. Dans cet exemple, y a-t-il néanmoins quelque chose d'instructif pour l'enseignant ? Je ne veux pas échapper à cette question sur l'utilité de l'histoire.

Il apparaît que toute sollicitude éducative doit d'abord tenir compte des mathématiques et de leur difficile construction. Qu'une difficulté mathématique – la question du théorème fondamental était soulevée au moins depuis la Géométrie de Descartes de 1637 – ne peut pas être résolue d'un coup de baguette, par de simples définitions *ad hoc*. Encontre ne tenait pas compte du fait que Gauss avait donné en 1799 une longue démonstration du théorème, et qu'elle était loin d'un élémentaire. Il y a un manque de savoir-faire mathématique chez Encontre et il tient à une naïveté culturelle.

Ce n'est pas tout, me semble-t-il. Un enseignant peut encore déduire de la lecture d'un lemme comme le lemme 1 qu'il y eut une réelle difficulté à envisager des fonctions qui ne soient pas des fonctions élémentaires, ou des compositions de fonctions élémentaires. Seul ce manque d'imagination peut faire « démontrer » un tel lemme(12). En sorte que l'histoire aide l'enseignant à prendre conscience d'une sorte de défaut de l'esprit à concevoir la complication analytique qui est associée à la

(11) Jean Dhombres, « Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1987, XL/2, p. 179-202.

(12) La démonstration que donne Encontre revient à dire que les fonctions les plus générales envisageables sont les fonctions exponentielles, et du coup, il lui paraît suffisant de résoudre ce que l'on appelait le problème de d'Alembert, à savoir prouver que $\left(a + b\sqrt{-1}\right)^{c+d\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$, a, b, c, d, A, B étant des nombres réels.

notion apparemment si simple de fonction. Sans avoir à faire un long historique, l'exemple proposé interroge la connaissance pratique de ce qu'est une fonction générale vers 1800. Autrement dit, comment était-il possible d'imaginer d'autres fonctions que des fonctions composées à partir des fonctions élémentaires ? Une telle réflexion historique a l'avantage, d'une part de ne pas considérer comme évidente de tout temps la notion de fonction élémentaire (quand la fonction exponentielle devint-elle élémentaire ?), d'autre part, de poser la question de la composition des fonctions.

C'est ce dernier point que je veux maintenant évoquer, et je vais directement au calcul différentiel à ses débuts. Pourquoi s'en horrifier au nom de qui devrait être simple ?

La composition des fonctions

Je poursuis mon récit – l'historien n'est-il pas d'abord conteur ? – en faisant l'hypothèse que la composition des fonctions n'est devenue un concept que lorsque l'on disposa d'un outil pour l'analyser. Cet outil a un nom, et c'est le théorème de la chaîne(13). Car cet outil montrait effectivement que le double emploi du mot fonction dans une fonction de fonction était justifié. Je le dis ainsi pour illustrer mon propos qui pouvait paraître abstrait au début sur l'histoire dépassant toujours un programme. Aujourd'hui on estime pouvoir parler d'une manière élémentaire de fonctions et de composition de fonctions, et sans avoir besoin du calcul différentiel, ni pour expliquer la notion, ni pour la justifier. Et l'on a bien raison, du moins dans un cadre ensembliste, c'est-à-dire lorsqu'un nouvel élémentaire a été défini, et c'est en gros l'élémentaire des mathématiques modernes des années 1970, où une fonction (application) est une correspondance. La rencontre avec un enseignement de type antérieur ne peut manquer de créer un clash.

On ne peut pourtant pas s'étonner que la composition des fonctions ne soit pas née dans un cadre élémentaire, mais dans le cadre novateur du calcul différentiel, du moins si l'on juge importante la notion de fonction composée pour la compréhension de la notion de fonction elle-même. Et on ne peut s'étonner de voir une trace en 1696, dans un livre publié par l'Académie des sciences de Paris, à un niveau entendu alors comme le plus élevé possible : *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Un livre plusieurs fois réédité et commenté tout au long du XVIIIe siècle, et encore recommandé par Laplace en 1795 comme le livre par lequel on pouvait apprendre le calcul différentiel.

Je considère la proposition 2 dans la section 2 du traité d'analyse de Guillaume de l'Hôpital de 1696. Non sans provocation ! Puisque l'on dit souvent que ce livre ayant élémentarisé le calcul différentiel serait aujourd'hui aisément lisible par quiconque a fait un peu de mathématiques. Je suis sûr que l'on a tort de voir de la « sollicitude » dans le conseil donné d'une lecture directe de ce livre pour apprendre,

---

(13) La règle de la chaîne indique $\dfrac{d(f\circ g)}{dx}=\dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dx}$ et le nom de « chaîne », malheureusement peu usuel en français, signale la « simplification » par dg.

par le biais historique, le calcul différentiel[14] ou pour vérifier cet apprentissage. Nous ne sommes plus au temps de Laplace, et l’élémentaire a changé. En le disant ainsi, est-ce que je choque un enseignant ? Qu’il fasse alors sa propre analyse sur vingt ans de carrière !

Je suis sûr pourtant de la richesse du texte de l’Hôpital, et sur les deux plans au moins que je ne sépare que pour faire comprendre. L’un est l’appropriation mathématique par l’Hôpital de l’idée de Leibniz qui fonde la supériorité de son calcul sur ce qu’il connaissait des méthodes précédentes de calcul des tangentes ; l’autre est l’illustration géométrique (les courbes) choisie par l’Hôpital pour évoquer la composition des fonctions, parce qu’il s’agit d’un processus didactique, peut-être dépassé aujourd’hui.

À mon tour, si j’entends faire vivre pour aujourd’hui le texte de l’Hôpital, je dois le rendre prêt à une appropriation, donc le transcrire et l’adapter, éliminant une foule de notations particulières. Il sera temps après de lire l’original – il faut toujours lire l’original pour vérifier la cohérence de l’interprétation de l’historien, comme il faut toujours refaire par soi-même la démonstration que propose un mathématicien. Aussi cet original est-il reproduit en annexe. J’ai bien parlé d’une interprétation par le théorème de la chaîne, et j’ai aussi dit le double lieu didactique de cette interprétation, qui me fait abandonner d’autres points de vue possibles sur l’histoire de ce texte. Il importe de prendre conscience qu’un commentaire historique n’est pas une exhaustion de tous les sens possibles d’un texte. Et c’est avec ce sens d’une interprétation particulière que je transforme le texte, laissant l’énoncé sous forme de problème, et le subjonctif utilisé en rend bien compte.

> Problème : Si l’on suppose que les abscisses[15] $\overset{\frown}{AP}$ sont les portions d’une ligne courbe dont on sache mener les tangentes et qu’il faille du point donné M sur la courbe AM mener la tangente MT[16].

(14) Je refuse, on l’aura compris, la naïveté en histoire des mathématiques. Et si je plaide pour la prise au sérieux d’un discours mathématique de type historique, c’est pour rappeler qu’on ne s’improvise pas historien. Un historien des mathématiques ne peut se contenter de célébrer un texte du passé ; il lui faut le servir, le déconstruire, pour en dire l’intérêt aujourd’hui. Aussi, sans mathématique, et même sans point de vue sur les mathématiques, il n’est pas de regard historique qui soit intéressant. On a juste l’effet du dictionnaire, et on sait le peu d’usage que les mathématiciens font des dictionnaires.

(15) Exemple de mon intervention, j’ai remplacé le mot « coupée » par celui usuel aujourd’hui « abscisse ». Il aurait peut être été préférable de mettre « abscisse curviligne », au risque de rater l’effet de surprise de la démonstration qui est souhaité par L’Hôpital. J’ai quand même noté avec un arc sur $\overset{\frown}{AP}$, ce qui n’est pas dans l’original où il s’agit de faire comme s’il s’agissait d’une abscisse.

(16) L’énoncé emploie symétriquement l’expression « mener la tangente », d’abord avec un pluriel pour indiquer qu’on connaît toutes les tangentes à la courbe, ensuite avec un singulier pour indiquer qu’il s’agit de mener la tangente à la seconde courbe en un point générique.

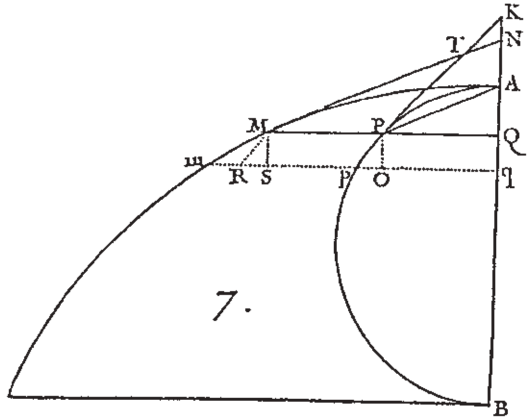


Figure 1

La figure donnée par L'Hôpital est indispensable pour comprendre l'énoncé ; il faut aussi remarquer qu'elle n'a pas la généralité affichée par cet énoncé, puisque la première ligne courbe APB est un cercle de diamètre AB, et la deuxième AMC est une cycloïde. Je ne fais aucune critique sur une éventuelle induction que pourrait avoir opérée L'Hôpital, mais je signale un « truc » de pédagogue, par l'opposition entre le particulier de la figure et le général de l'énoncé. Il s'agit précisément de faire comprendre que le particulier contient le général. Acceptons-nous aujourd'hui cette manière indirecte de faire saisir une idée ?

Mais je m'interroge aussi sur les possibilités qu'aurait eues L'Hôpital de dessiner en général, alors que les fonctions non algébriques connues n'étaient pas nombreuses. Suivons sa démonstration, que je commente en notes un peu répétitives, comme pour ne laisser aucun blanc dans l'interprétation. J'en suis un peu lassé. Il faut prendre conscience que si l'on n'a apparemment besoin d'aucune aide pour le vocabulaire de l'Hôpital, des notions sont sous-entendues, comme celle de sous-tangente. Mais une sous-tangente se voit sur la figure, avec la longueur KQ : la sous-tangente est tout simplement la longueur mesurée sur un axe entre l'abscisse d'un point et le point d'intersection de l'axe avec la tangente en ce point de la courbe. Une sous-tangente dépend donc du moyen de représentation. L'avait-on bien saisi ?

> Ayant mené l'ordonnée[17] MP avec la tangente[18] PT, et supposé que la droite qui la rencontre en T soit la tangente cherchée, on imaginera une autre ordonnée *mp* infiniment proche de la première, et un petit segment MR parallèle à PT. Et en nommant les données, AP = x, PM = y, on aura[19] P*p* = MR = dx, R*m* = dy. Les

(17) L'original porte « appliquée », mais là aussi ce n'est pas une simple ordonnée cartésienne, qui serait en l'occurrence QM, si l'on gardait les repères cartésiens de la première courbe.

(18) Le point T n'est pas encore expliqué, mais la figure est dessinée, et la tangente à trouver est aussi exhibée.

(19) Puisque MP = y, et $pm = y + dy$, on voit grâce au parallélisme de RM et *p*P que R*m* = dy. L'original ajoute « comme auparavant », pour référer à ce qui précède dans l'ouvrage, qui est la détermination de la tangente à une courbe au moyen du triangle caractéristique. Le lecteur consciencieux de L'Hôpital retrouve les triangles rectangles *m*MS et MNQ, semblables, bien

triangles[20] semblables mRM et MPT fournissent les proportions $\frac{m\mathrm{R}}{\mathrm{RM}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PT}}$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\mathrm{PT}}$, soit $\mathrm{PT} = y\frac{dx}{dy}$. On achèvera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des abscisses AP = x aux ordonnées[21] PM = y.

Arrivé à ce point, L'Hôpital ajoute : « comme on l'a vu dans les exemples qui précèdent, et comme l'on verra encore dans ceux qui suivent ». Le premier bout de phrase rattache le calcul qui doit terminer la démonstration (mener la tangente à la courbe NMC à partir de la tangente à la courbe APB) au cas d'axes cartésiens usuels et de la sous-tangente. Le dernier bout de phrase souligne que la généralisation apportée par la démonstration – car il s'agit bien d'une généralisation basée sur une analogie avec le maintien d'une même formule pour la sous-tangente – va devenir d'un usage courant dans le livre.

Quoique cet usage puisse encore être le nôtre, mais déguisé, je me dois ici de faire le lien entre ce passé et aujourd'hui. Réfléchissons ! L'Hôpital vient d'établir une stabilité de l'écriture de la sous-tangente d'une courbe à l'autre, et nous n'avons rien trouvé de contradictoire dans sa démarche. Il indique une formule qui, traduite dans notre vocabulaire, ne peut que dire comment de y, fonction de x, et de x, fonction de

---

sûr en assimilant mM à un segment. Mais il faut que ce lecteur se remémore aussi la formule que cette similitude de triangles fournit $\frac{m\mathrm{R}}{\mathrm{RM}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PT}}$, et la lise en posant AQ = z, MQ = t, selon $\mathrm{NQ} = t\frac{dz}{dt}$. Ainsi, NQ est la sous-tangente de la courbe AMC dans le repère AB, BC. De même, avec PQ = u, on aurait pour la sous-tangente de la première courbe APB dans le même repère, $\mathrm{KQ} = u\frac{dt}{du}$. Peut-être est-il utile de récapituler les notations modernes que j'utilise, AQ = z, PQ = u, MQ = t, PM = y, et x est l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$.

(20) La similitude des triangles mRM et MPT tient à d'évidents parallélismes ; le lecteur, hier et aujourd'hui, doit voir qu'il y a une analogie avec la similitude des triangles mMS et MNQ.

(21) Maintenant le lecteur comprend que les mots « abscisse » et « ordonnée » ont une signification différente de celle de la géométrie analytique cartésienne. Abscisse curviligne $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$, donc abscisse repérée sur une courbe et non sur un axe, ordonnée MP, certes un segment, mais il est repéré à partir d'une courbe, non d'une droite. L'extension du vocabulaire est justifiée par le calcul doublement fait sur la similitude des triangles. En axes cartésiens, pour la courbe AMC, repérée par une abscisse AQ = z et une ordonnée MQ = t, on a pour ce qui était appelé la sous-tangente, à savoir NQ, l'expression :

(1) $$\mathrm{NQ} = t\frac{dz}{dt}$$

Dans le nouveau repère, la courbe AMC repérée par l'abscisse AP = x et l'ordonnée MP = y, il y a également une sous-tangente, à savoir PT, et elle s'obtient exactement en remplaçant dans (1) l'abscisse z par l'abscisse x, l'ordonnée t par l'ordonnée y, soit

(2) $$\mathrm{PT} = y\frac{dx}{dy}.$$

z, et connaissant $y'(x)$ et $x'(z)$, on peut en déduire $y'(z)$. Cette formule ne peut donc être qu'une variante, compte tenu des notations utilisées et des notions privilégiées, de la règle de la chaîne, ou du théorème de dérivation des fonctions de fonction.

Cette variante est aujourd'hui oubliée. Au lieu de le regretter, il convient de comprendre la raison de cet oubli, et apparaît vite le défaut de généralité de la variante du théorème de la chaîne due à L'Hôpital. En ce sens que s'il y a indéniablement jeu d'une fonction de fonctions, les deux fonctions en cause ne sont pas également représentées.

L'une des fonctions, la liaison entre x et y, est une relation et nous pouvons lire $F(x,y) = 0$, la fonction F étant alors quelconque, quoique ce que le mot quelconque puisse signifier pour L'Hôpital ne soit pas bien clair pour nous aujourd'hui. L'autre fonction, celle qui pose x fonction de z, est une représentation géométrique particulière avec l'expression d'une abscisse curviligne d'une courbe, par ailleurs quelconque (avec la même ambiguïté sur cet adjectif). La question est pourtant moins de savoir si cette fonction est une fonction générale – L'Hôpital le pensait sans doute[22] –, mais de justifier deux modes de représentation différents pour ce qui devrait être un seul mode, comme d'ailleurs le souligne l'expression de fonction de fonction. Si elle apparaît anachronique dans ce contexte, l'est aussi bien l'utilisation du mot fonction. Je maintiens pourtant la désignation d'une variante du théorème de la chaîne. Continuons à lire L'Hôpital, car ainsi il y a justification.

Pour expliquer le premier bout de phrase qui termine la démonstration de sa proposition, L'Hôpital indique une situation. Jusqu'à présent, il n'avait rien spécifié, la première courbe étant *a priori* quelconque, et quelconque aussi bien la relation liant $MP = y$ à $\overset{\frown}{AP} = x$. Aussi L'Hôpital commence-t-il par fixer une relation entre x et y, à savoir $\dfrac{y^2}{x} = \dfrac{x\sqrt{a^2+y^2}}{a}$, a étant une constante. Et il montre comment de cette seule relation peut se déduire la sous-tangente $y\dfrac{dx}{dy}$. Le calcul, il faut bien en prendre conscience, serait analogue si cette relation était entre $z = AQ$ et $u = PQ$ et déterminait ainsi la première courbe et sa sous-tangente dans les axes cartésiens. La relation particulière a été choisie par L'Hôpital parce qu'elle mélange x et y, alors même que l'on pourrait expliciter une des variables par rapport à l'autre, $x^2 = a\dfrac{y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}$. Le lecteur peut ainsi directement vérifier que le calcul par

(22) La fonction $x(z)$ s'écrit $\psi(z) = \int\sqrt{1+\varphi^2(z)}$, où $\varphi(z) = \dfrac{du}{dt}$ avec les coordonnées z et u pour repérer la courbe APB ; la fonction n'est donc pas générale puisque en particulier croissante ; cette croissance paraît sans doute indispensable à l'Hôpital, puisqu'il va construire un repère qu'il a du mal à ne concevoir que local ou mobile. L'hypothèse de croissance va rester longtemps dans les démonstrations de manuels du changement de variable dans les intégrales.

différentielles n'a que faire d'une écriture explicite d'une variable par rapport à une autre. L'effet est voulu par l'Hôpital : c'est une pédagogie.

Et le lecteur qui suit les différentiations effectuées par l'Hôpital découvre qu'il utilise ce que nous appelons la règle de la chaîne. Au début, il est calculé $\dfrac{2xy\,dy - y^2dx}{x^2}$ comme différentielle de $\dfrac{y^2}{x}$, ce qui fait intervenir la règle de dérivation d'une fraction, qui figure chez Leibniz dans l'article déjà cité d'octobre 1684, la si bien nommée *Nova Methodus*. Pour le second membre, comme différentielle de $\dfrac{x\sqrt{a^2+y^2}}{a}$, il est écrit $\dfrac{\sqrt{a^2+y^2}\,dx}{a} + \dfrac{xy\,dx}{a\sqrt{a^2+y^2}}$. Il y a eu différentiation de la racine écrite sans différentielle, et multiplication par la différentielle de l'expression sous le radical. C'est un cas particulier de la règle de la chaîne.

Il est (pédagogiquement ?) gênant que l'Hôpital ne fasse pas remarquer que ce qu'il résout par son énoncé, ou plutôt qu'il résout par la construction liée à son énoncé, est une généralisation du calcul qu'il vient de conduire sur un exemple (pour lequel, remarquons-le, il n'a pas cherché à dessiner la courbe). Est-il possible qu'il n'ait pas conscience de cette généralisation ? Quel serait alors le but de la proposition qu'il vient d'énoncer et quelle est l'économie de ce problème dans le texte auquel j'accorde une valeur en me fiant à la tradition mathématique ?

Le second exemple choisi par l'Hôpital pour illustrer son problème peut faire comprendre la généralisation qui a été obtenue. Mais par une compréhension indirecte, en ce sens qu'elle met en cause la culture mathématique d'une époque, et non une démarche objectivée. En faisant intervenir la cycloïde, l'Hôpital prend l'exemple par excellence d'une courbe non algébrique(23) ; il choisit pour première fonction x l'abscisse curviligne d'un cercle APB, et à cette difficulté maximale aux yeux du lecteur de l'Hôpital du XVII^e^ siècle répond la simplicité maximale de la relation forcée entre x et y, puisque(24) $y = x$. Le calcul différentiel fournit $dy = dx$, ce qui ne paraît pas extraordinaire, mais l'équation a lieu sans que l'on ait besoin d'expliciter dx à partir de dz et de du ($dz^2 + du^2 = dx^2$). Car $dy = dx$ donne pour la sous-tangente $\mathrm{PT} = y\dfrac{dx}{dy}$ la valeur PT = y. Comme MP = y, le triangle MPT est isocèle (MP = PT). Un raisonnement simple de géométrie permet d'en déduire le parallélisme(25) de AP, corde du cercle, et MT, tangente à la cycloïde en M.

(23) Il est sûr que l'utilisation de l'abscisse curviligne d'un cercle pour définir la cycloïde lie dans la culture d'un temps cette courbe à la quadrature du cercle : elle est donc le type même d'une réalité géométrique non mesurable, qui devient calculable grâce aux différentielles.
(24) L'égalité $y = x$ est l'équation « cartésienne » de la cycloïde dans les coordonnées x et y du repère généralisé. Elle correspond exactement au roulement sans glissement du cercle de diamètre AB sur BC.
(25) Puisque le triangle MPT est isocèle, l'angle TPQ est le double de l'angle TMQ ; l'angle TPQ est aussi le double de l'angle APQ. Aussi les angles TMQ et APQ sont-ils égaux, donc les droites NT et PA sont parallèles.

A bien été résolue la question posée : mener une tangente. Et doit être claire pour le lecteur la façon dont a joué la tangente PT du cercle dont l'énoncé dit qu'elle doit être utilisée pour la construction de MT. La tangente PT est devenue un axe du repère mobile servant pour la seconde courbe, c'est-à-dire pour la cycloïde, axe sur lequel porter la nouvelle sous-tangente, et donc déterminer la tangente à la cycloïde.

Quelle est la part de Leibniz dans le résultat obtenu par L'Hôpital ?

Pourquoi cette question ? C'est que nous n'avons pas retrouvé l'exposé aujourd'hui classique et que l'on dit remonter à Leibniz. La règle de la chaîne se lit ici comme règle d'invariance ou de conservation : le calcul de la sous-tangente pour la deuxième courbe, la courbe composée à partir du cercle, la courbe culturelle d'une nouvelle mathématique, se fait dans les nouveaux axes comme s'il s'agissait d'axes cartésiens. Notre règle de la chaîne exprime cette invariance par un produit. L'Hôpital qui, effectivement, a la pratique du produit pour le calcul différentiel des fonctions élémentaires, l'interprète comme une suspension : on calcule les éléments différentiels de la courbe ou fonction composée comme courbe ou fonction simple dans le repère formé par la première courbe, et on passe ensuite au calcul dans le premier repère de cette première courbe. On suspend donc le jugement sur la variable effective, autrement repérée.

L'Hôpital a utilisé à la suite de Bernoulli l'indication essentielle de Leibniz dans sa *Nova Methodus* de 1684 expliquant que trouver la tangente consiste « à tracer le côté d'un polygone infinitangulaire » qui « équivaut à la courbe ». Leibniz poursuivait en exhibant la cycloïde comme exemple type de première courbe à partir duquel il manifeste explicitement la composition (seconde courbe, etc.). En quel sens L'Hôpital a-t-il interprété l'expression d'une « même façon » par laquelle Leibniz conclut ?

> Or, on peut toujours représenter cette distance infiniment petite par une différentielle connue *du*, ou par une relation qui la fait intervenir, c'est-à-dire par la tangente connue(26). En particulier, à supposer que *y* soit une grandeur transcendante, comme l'ordonnée d'une cycloïde, entrant dans un calcul qui permet de déterminer l'ordonnée *z* d'une autre courbe, et que nous cherchions *dz*, autrement dit la tangente à cette seconde courbe, il s'agit de déterminer *dz* en fonction de *dy* mais *dy* serait connue, puisque l'on connaît la tangente à la cycloïde. À supposer qu'on l'ignore, on pourrait la retrouver de la même façon par le calcul, à partir des tangentes au cercle(27).

Nous disons trop peu en exprimant que L'Hôpital a généralisé le programme de Leibniz. Certes, il prend comme « ordonnée » pour la « seconde courbe » une abscisse curviligne quelconque (et non seulement l'ordonnée d'une cycloïde comme indique Leibniz). Il y a fort à parier que Leibniz ne pensait pas à tant, et qu'il lui suffisait de reconnaître possible le calcul. Sa « même façon » désignait ce qu'il présentait comme une conquête majeure, le même traitement rendu possible pour les

(26) Leibniz, qui pense dans le cadre de la géométrie analytique cartésienne, ne fait pas de différence entre la droite qui est une tangente, et sa représentation par une relation où intervient les différentielles (sous-tangente).

(27) Les variables *u*, *x*, *y* et *z* de Leibniz ne réfèrent pas à celles utilisées dans mon commentaire. Traduction de Marc Parmentier, *Leibniz, Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1989, p. 111-112.

courbes algébriques et les courbes transcendantes, et peut-être faudrait-il plutôt parler tout simplement alors de fonctions[28].

> Lorsqu'on connaît en quelque sorte l'Algorithme de ce calcul, que je nomme différentiel, on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, celles des équations maximales et minimales, ainsi que les tangentes, sans avoir à éliminer ni fractions, ni irrationalités, ni autres signes radicaux, ce qui était inévitable dans les Méthodes en usage jusqu'à présent[29].

Leibniz insiste :

> On voit aussi que ma méthode s'étend aux courbes transcendantes, qu'on ne peut ramener à aucun calcul Algébrique, c'est-à-dire qui ne soit d'aucun degré déterminé, et cela de la manière la plus irréversible, sans revenir à des hypothèses particulières qui ne sont pas toujours vérifiées.

L'Algorithme désigné par Leibniz en 1684 comprenait certainement la règle de la chaîne, à laquelle l'Hôpital donne l'interprétation de « suspension », mais chez Leibniz cette règle ne prend pas une expression générale. Un témoignage d'un intermédiaire entre Leibniz et L'Hôpital est celui des *Lectiones de calculo differentialium* de Jean Bernoulli datant de 1691 ; il permet de parler d'une innovation chez L'Hôpital[30].

En effet, pour trouver la tangente à la cycloïde[31] Jean Bernoulli repère soigneusement de la même façon le cercle (première courbe) et la cycloïde (seconde courbe ou courbe comparée), et les repère[32] toutes les deux dans les mêmes axes orthogonaux cartésiens (AB et BC de la figure de l'Hôpital). La lettre f désigne la mesure de l'arc circulaire $\overset{\frown}{AP}$, ce que L'Hôpital note x.

$$MQ = MP + PQ,$$

$$t = f + \sqrt{(2a - z)z}.$$

(28) On trouvera quelques références pour l'histoire du concept de fonction dans Jean Dhombres, *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Paris, Nathan, 1978.

(29) Marc Parmentier, *Leibniz, op. cit.*, p. 110.

(30) Et j'emploie le mot « innovation » dans un sens précis ; un pas fait vers les mathématiques que nous connaissons et pratiquons aujourd'hui. Je maintiens que c'est cette innovation même qui justifie que l'on s'intéresse aujourd'hui au texte de L'Hôpital dans un cadre éducatif. L'historien des mathématiques qui prétend s'intéresser de manière égale à tous les textes du passé est dans une position d'imposture.

(31) Le manuscrit *De calculo differentialium* de Jean Bernoulli a été retrouvé en 1920 par l'érudit berlinois Paul Schafheitlin, et publié, « Johannis Bernoulli Lectiones de calculo differentialium », *Verh. Naturf. Ges. Basel*, 34, 1923, p. 1-22. Une traduction allemande due à l'inventeur du manuscrit fut publiée en 1924 dans les Ostwald's Klassiker. Je prépare avec Patricia Radelet–de Grave l'édition du texte latin, et une édition synoptique du texte de L'Hôpital et de la traduction française du texte de Bernoulli (à laquelle sera ajoutée le calcul intégral du même auteur, le texte cette fois ayant été publié dans les *Œuvres complètes* de Jean Bernoulli). Voir *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Bd 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 1955, Vorwort des Herausgebers, O. Spiess ; Malebranche, *Œuvres complètes*, t. XVII-2, Pierre Costabel (éd.), Mathematica, Vrin, 1979.

(32) Je garde les notations de L'Hôpital en retranscrivant le texte de Bernoulli, et la lettre a qui intervient plus loin désigne le rayon du cercle de diamètre AB.

Deux calculs différents sont alors menés[33], et l'ordre n'est pas indifférent puisque le deuxième calcul utilise de fait les résultats du premier.

Il y a calcul de $d\sqrt{(2a-z)z}$ et la règle de la chaîne intervient sans hésitation

$$d\left(\sqrt{(2a-z)z}\right)=\frac{a-z}{\sqrt{(2a-z)z}}dz.$$

Et il y a calcul de *df*, à partir du théorème de Pythagore installé au niveau différentiel, et utilisation de la différentielle précédente. C'est là que se voit la composition des fonctions.

$$df^2=dz^2+d\left(\sqrt{(2a-z)z}\right)^2,$$

$$df^2=\left\{1+\frac{(a-z)^2}{(2a-z)z}\right\}dz^2.$$

Soit

$$df=\frac{a}{\sqrt{(2a-z)z}}dz.$$

En additionnant *df* et $d\sqrt{(2a-z)z}$, on a la différentielle *dt* exprimée en fonction de *dz* ; on a donc la « tangente » de la cycloïde selon l'expression de Leibniz, ce que nous lisons comme une équation différentielle, mais qui est toujours lue comme une sous-tangente par L'Hôpital.

$$dt=\frac{2a-z}{\sqrt{(2a-z)z}}dz.$$

Pour conclure au parallélisme des droites AP et MN, et terminer la détermination de la tangente par Bernoulli, il suffit de remarquer que $z\,dt=\sqrt{(2a-z)z}\,dz$, d'interpréter la proportion géométrique de la sous-tangente et de rappeler l'expression de *u* en fonction de *z*.

$$\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{MQ}}=\frac{dz}{dt}=\frac{z}{\sqrt{(2a-z)z}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{PQ}}.$$

On est donc passé du géométrique aux différentielles puis revenu au géométrique. J'ai un peu « inventé » cette dernière démonstration de Bernoulli, en modifiant un détail qui paraît d'abord minime, puisque j'ai juste changé un axe de référence. Bernoulli adopte effectivement AB mais non CB. Il prend la parallèle à CB passant par A. Sa figure devient la suivante, et j'ai seulement

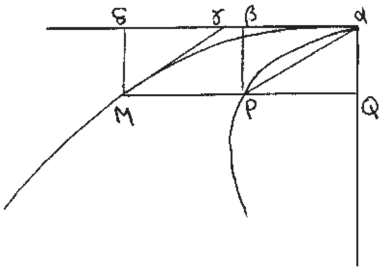


Figure 2

(33) L'Hôpital mène un seul calcul.

mis des lettres grecques pour manifester le repérage nouveau.

Il y a $\delta\gamma$, sous-tangente à la cycloïde au point M, $\beta\alpha$ sous-tangente au cercle au point P, et *mutatis mutandis* à la manière indiquée ci-dessus, Bernoulli montre que MP = $\gamma\alpha$, donc établit un parallélogramme et le parallélisme de la tangente à la cycloïde à la corde du cercle. Mais il ne distingue pas particulièrement le quotient différentiel $\frac{dz}{dt}$, contrairement à une ligne dans la reconstruction que j'ai fournie : la cohérence est maintenue avec le rôle joué par la sous-tangente.

L'avantage de la lecture de Bernoulli est de faire ressortir le lien qui existe entre la sous-tangente et le système de référence. Car se manifeste le jeu entre la courbe, notion intrinsèque, et la fonction, représentation de la courbe dès lors qu'une référence est fournie. Leibniz, avec l'avantage de parler en général et à un niveau de programme intellectuel, est remarquablement souple dans cette manipulation. Et il peut faire surgir la notion même de fonction, réglée par le calcul différentiel(34). Jean Bernoulli cadre les choses, en manifestant le rôle du repère, choisi au mieux pour que les sous-tangentes se calculent bien, mais ce repère est gardé fixe dans tout le calcul ; l'Hôpital enfin étend l'idée de repère, et à l'aide de la notion de sous-tangente, il peut réduire le calcul sur les fonctions de fonction à un calcul de fonctions.

Je reviens encore à la question posée au début de cette étude. À quoi peut servir aujourd'hui le découpage que je viens d'effectuer dans l'élaboration d'une pensée mathématique ? L'objectivité de mon regard historique n'est pas remise en cause avec cette question, et les textes sont à la disposition de chacun pour contrôler. J'estime que l'histoire ainsi faite sert à comprendre pourquoi une méthode rivale ne serait pas une aide pour l'enseignement, et serait une fausse sollicitude.

Une méthode rivale de la règle de la chaîne

Car pour les fonctions de fonction, il y eut une méthode rivale. La rivalité est déclarée en 1721 par un commentateur peu inspiré du traité de l'Hôpital dû à Crouzas(35). La méthode, usant des différentielles, consiste à se débarrasser des quantités irrationnelles dans les expressions algébriques. On trouve déjà cette méthode dans le *Tractatus de quadratura curvarum* de Isaac Newton, écrit sans doute en 1693, et au problème I qui consiste à trouver l'équation entre les fluxions de quantités elles-mêmes reliées par une équation. En fait, elle apparaît dans l'explication plus complète sur l'exemple de l'équation :

$$x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax - y^2} - b^3 = 0.$$

Si l'on calcule pour les fluxions $\dot{x}$ et $\dot{y}$, fluxions que l'on peut considérer ici comme des dérivées des fonctions x et y exprimées par rapport à un paramètre(36), on doit égaler à zéro

(34) Les termes de l'article de Leibniz sont devenus classiques pour la représentation des courbes par les fonctions, *ordinata*, *abscissa*, *coordinatae* et *functio*. Mais le terme de sous-tangente y figure aussi bien, et disparaîtra.

(35) Crouzas, *Analyse des infiniment petits*, Paris, 1721.

(36) L'équation entre x et y est celle qui résulterait de l'élimination du paramètre si x et y étaient effectivement exprimées par des fonctions.

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z},$$

expression dans laquelle on a posé $z = \sqrt{ax - y^2}$. Ce n'est pas une simple notation, utilisée pour éviter une grande parenthèse et le point par dessus. Car Newton accepte bien cette écriture qui ne dut guère plaire à son éditeur. Le choix de z comme fonction auxiliaire permet en tout cas de se débarrasser de la racine, puisque $z^2 = ax - y^2$, et cette relation fonctionnelle donne $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2z\dot{z}$ ou exprime explicitement la fluxion de z selon $\dfrac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$. Soit

$$\dot{z} = \frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}}.$$

Au final

$$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - y^2}} = 0.$$

Quelques lignes plus loin, Newton exprime que l'on peut adopter l'une des fonctions comme quantité variant uniformément, donc poser par exemple égale à 1 la fluxion de x et à 0 les fluxions d'ordre supérieur.

Il est facile de voir comment fonctionnerait cette méthode si on l'adaptait au cas de la cycloïde de Jean Bernoulli et Guillaume de l'Hôpital. Confronté à la différentiation de la racine, on ferait $Z^2 = (2a - z)\,z$ soit $2Z\,dZ = 2\,(a - z)\,dz$, et donc

$$dZ = \frac{a - z}{\sqrt{(2a - z)z}}\,dz.$$

La méthode de Newton est le succédané de la règle de la chaîne dans le cas des quantités irrationnelles ; elle manifeste à ce niveau un manque de généralisation. Mais son intervention peut quand même s'interpréter comme une rigueur car, par cette méthode, est justifiée la partie du calcul différentiel portant sur les fonctions de fonction. Du moins pour les fonctions de type élémentaire, racines et puissances.

C'est parce que cette justification ne peut en aucun cas s'étendre au cas des fonctions transcendantes que Leibniz, et Bernoulli son lecteur très fidèle, puis L'Hôpital, ne l'ont pas adoptée. Crouzas a tort de donner à voir ainsi une méthode rivale ; il n'a pas compris la généralité de la proposition de L'Hôpital. Ce dernier a mis en place l'expression géométrique qui est suspensive à la manière du produit dans la règle de la chaîne, et valable au-delà des irrationnelles.

Par le changement de repère qu'elle impose, la méthode de L'Hôpital n'en rompt pas moins le sens d'une généralisation. On peut dès lors deviner le chemin emprunté par l'histoire pour aboutir à la règle de la chaîne actuelle, et au théorème de différentiation des fonctions de fonction. Ce ne fut pas une réflexion à partir de la démonstration de L'Hôpital qui y conduisit, mais il y eut constitution d'un catalogue de fonctions et de leurs différentielles, à commencer par la fonction logarithme, les fonctions trigonométriques, et quelques autres. C'était un enrichissement des fonctions élémentaires pour lesquelles la suspension de calcul fonctionnait en composant toutes ces fonctions. L'affaire était réglée en 1748, lorsque Euler écrivait son *Introductio in analysin infinitorum*, et pouvait dériver automatiquement une expression comme sin (Log x). Donner un nom à une fonction, en l'inscrivant dans un catalogue, ce n'est pas seulement poser comme Newton $z = \sqrt{ax - y^2}$, c'est considérer que la fonction peut n'être connue que par sa différentielle et donc faire entrer l'intégrale comme opération banale de constitution de fonctions. C'est aussi comprendre que toutes les manipulations de l'intégrale, y compris celles faisant jouer la règle de la chaîne (on dit qu'il y a changement de variable), ne permettent pas toujours d'aboutir à une fonction déjà connue ou répertoriée. L'exemple fondateur est le cas du logarithme compris à la fois comme primitive de la fonction $1/x$ et comme résultat d'une table numérique dûment construite suivant un procédé algorithmique.

Je ne m'embarque pas dans ce récit – j'ai d'ailleurs prévenu que je le devinais – me contentant de remarquer combien la gradation qui fait aller du calcul différentiel au calcul intégral est peu historique, mais choix didactique jusque dans l'idée de type positiviste que le second calcul ne puisse affiner des notions vues en un premier niveau par le calcul différentiel(37).

Je termine avec Euler sur les fonctions de fonction, et il les appelle substitutions. Il rend à nouveau intéressante la question de l'élimination des irrationnelles, question dont Leibniz se faisait gloire de s'être débarrassé, et que Newton résolvait par changement de fonctions. Ce va-et-vient de la pensée mathématique est fascinant, et ne désespère que ceux qui veulent fixer une seule voie.

L'énoncé d'Euler au départ est désespérant de banalité, et fait même craindre une imposture, à la Daniel Encontre.

> Si y est une fonction quelconque de z, et que z soit exprimé par une nouvelle variable x, y pourra l'être de même par x(38).

Mais si Euler envisage la « transformation des fonctions par substitution », et c'est le titre même du chapitre III du livre I de l'*Introductio*, c'est qu'il cherche, y étant une fonction donnée en z dont l'expression renferme des radicaux, un « moyen de s'en débarrasser ». Sa sollicitude est de dire comment s'en débarrasser à coup sûr, afin que l'on ne s'embarque pas en vain dans un calcul. Il conclut :

> Voilà à peu près les cas que présente l'Analyse indéterminée, ou la Méthode de Diophante, et on emploierait inutilement une substitution rationnelle, pour ramener à une seule forme, qui le fût aussi, les autres cas, qui ne sont pas compris dans ceux que nous avons traités ici(39).

Le cas $y = \sqrt{-1 + 3z - z^2}$, qu'il résout à titre d'exemple, et que l'on retrouve dans

(37) J'ai décrit une tentative de présentation du calcul intégral sans calcul différentiel, et j'ai expliqué les raisons et d'un succès théorique et de l'absence de postérité didactique, Jean Dhombres, « Mettre la géométrie à crédit, signification du métacentre inventé par Pierre Bouguer », *Sciences et Techniques en Perspective*, 2e série, 3, fasc. 2, 1999, p. 305-363.

(38) *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, par Leonhard Euler, traduite du latin en français avec des Notes et des Éclaircissements, par J.B. Labey, Paris, Barrois, an IV (1796), livre premier, chapitre III, p. 35.

(39) *L. Euler, Introductio …, op. cit.*, Introduction, p. 38-39.

des exercices du Secondaire, résulte d'une explication préalable dont on peut s'étonner qu'elle ne soit pas reprise, et dans ces mêmes termes dans les manuels. Cette fois, je peux être catégorique sur l'utilisation directe d'un exemple historique dans une classe. Mais je me contente ici de reprendre le calcul d'Euler, pour susciter l'envie de le lire et de savoir en quoi il a raison de faire les transformations dites, et pas d'autres.

L'objectif est de trouver une expression rationnelle de z en une variable x de sorte que y, apparaissant comme fonction de fonction en x, soit alors aussi une fonction rationnelle de x. Faites $y = 1 - (1 - z)\,x$ écrit Euler, qui modifie d'abord l'expression de y :

$$y = \sqrt{-1 + 3z - z^2} = \sqrt{1 - 2 + 3z - z^2} = \sqrt{1 - (1 - z)(2 - z)}.$$

Vous aurez $-2 + z = -2x + x^2 - xxz$ et $z = \dfrac{2 - 2x + x^2}{1 + x^2}$. Ensuite $1 - z = \dfrac{-1 + 2x}{1 + x^2}$ et

$$y = 1 - (1 - z)x = \frac{1 + x - x^2}{1 + x^2}.$$

Conclusion

Je n'ai pas cherché à donner en ces quelques pages une histoire complète de la règle de la chaîne, mais j'en ai fourni quelques étapes, toutes situées avant 1700. Je n'ai certainement pas tenté une histoire de la notion de fonction de fonction, histoire qui ne peut être séparée d'une histoire des fonctions, dont j'ai dit toute la difficulté conceptuelle en prenant l'exemple d'Encontre. Je n'ai pas critiqué la présentation de L'Hôpital en la déclarant obsolète (ce que tout le monde sait) ou insuffisante par rapport à Leibniz, ou encore à Newton. J'ai voulu la mettre en valeur dans le but de comprendre la nature de l'innovation chez de l'Hôpital, alors même que la forme du résultat n'est plus de mise aujourd'hui. J'ai voulu, par mon commentaire, en référant mes choix de commentateur à l'historiographie disponible, justifier l'intérêt de la lecture aujourd'hui de ce texte d'un maître ancien en signalant que ce maître avait, à la façon d'un élève, innové sur le travail antérieur de Bernoulli et compris au-delà des indications générales de Leibniz.

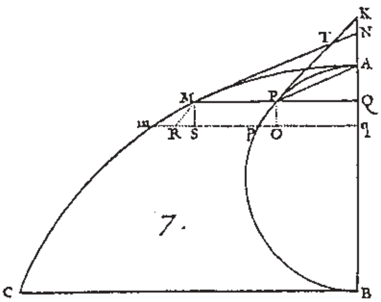
C'est l'acte d'acquisition d'un savoir qui fut mon objectif historique, et il y a certainement un souci didactique dans l'histoire que j'ai donnée. Cette histoire peut servir la culture et les interprétations d'un enseignant de mathématique. En termes d'une activité de classe, j'ai seulement aidé à la possible constitution de quelques exercices, mais cela ne me paraît pas vain. L'exercice était bien le seul lieu où une place était accordée à l'histoire des mathématiques dans les manuels anglais comme ceux de Hardy au début du XX^{e} siècle, venant ainsi conserver une mémoire et évitant le danger d'une présentation forcément unilatérale du cours. Un historien, je le répète, n'est pas un collectionneur, et n'a pas à se cacher derrière l'autorité supposée des auteurs qu'il sert.

ANNEXE

Proposition II.

Problème.

FIG. 7.



15. *Si l'on suppose dans la proposition précédente que les coupées* AP *soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sçache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *sur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & supposé que la droite MT qui la rencontre en T, soit la tangente cherchée ; on imaginera une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT : & en nommant les données AP, x ; PM, y ; on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy$, & les triangles semblables mRM & MPT donneront $mR\ (dy).\ RM\ (dx) :: MP\ (y).\ PT = \frac{ydx}{dy}$. On achevera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP\ (x)$ aux appliquées $PM\ (y)$, comme l'on a vû dans les éxemples qui précedent, & comme l'on verra encore dans ceux qui suivent.

Exemple I.

16. Soit $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence est $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduisant cette égalité à une proportion $dy.\ dx\ (MP.\ PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx}.\ \frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la soutangente cherchée PT, sera exprimé en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Exemple II.

17. Soit $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence est $dx = \frac{ady}{b}$: on aura $PT\ (\frac{ydx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on suppose que la ligne courbe APB soit un demi-cercle, & que les appliquées MP, étant prolongées en Q, soient perpendiculaires sur le diametre AB ; la courbe AMC sera une demi-roulette, ou cycloïde : simple lorsque $b = a$, allongée lorsqu'elle est plus grande, & accourcie lorsqu'elle est moindre.

Corollaire.

18. Si la roulette étant simple, l'on mene la corde AP ; je dis qu'elle sera parallele à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors isoscele, l'angle externe TPQ sera double de l'interne opposé TMQ. Or l'angle APQ est égal à l'angle APT, puisque l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc AP ; & partant il est la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ seront donc égaux entr'eux ; & par-conséquent les lignes MT, AP seront paralleles.