De l'espace aux statistiques (et retour)

Thierry Lapouge(*)

Résumé. Ce document présente un travail proposé en classe de seconde en 2000-2001 dans le cadre des nouveaux programmes. Il s'agit de relier plusieurs chapitres (fonctions, espace, statistiques) dans une même activité qui fera le lien entre ces différentes parties du programme. Il s'agissait de bâtir une sorte de fil rouge donnant du liant à tout le travail du premier trimestre de seconde, tout en permettant aux élèves de trouver à s'employer efficacement dans une recherche collective.

But de l'activité

L'idée directrice de ce travail vient d'un constat simple : les statistiques étudiées semblent déconnectées du reste de l'activité mathématique déployée en seconde. Il semblait donc intéressant de construire une situation dans laquelle seraient mises en œuvre plusieurs compétences, puisées dans plusieurs chapitres du nouveau programme de seconde. L'activité présentée ici a donc servi de « fil rouge » pour le travail du premier trimestre, en mettant en jeu généralités sur les fonctions, étude de solides de l'espace (patrons, calculs d'aires et de volumes) et statistiques.

Description rapide de l'activité

Le travail s'est déroulé en trois grandes phases, de plusieurs séquences chacune, tantôt en classe entière, tantôt en groupe.

Espace et fonctions

La première partie du travail a été l'étude d'un solide particulier, obtenu en découpant à chaque coin d'un cube une pyramide ayant pour base un triangle équilatéral, pour obtenir un cuboctaèdre. Cette activité est présente dans la banque de données d'exercices de l'APMEP (Clasmath) et relie étude de solides et fonctions. Après étude des variations de l'aire et du volume, chaque élève a réalisé un patron du solide obtenu en ôtant la plus grande pyramide possible à chaque coin, puis a construit l'objet. Chacun disposait donc à partir de cet instant d'un cuboctaèdre, et la question suivante fut : qu'allons-nous faire de ce solide ?

La réponse est venue assez rapidement : si l'on se sert de notre cuboctaedre comme d'un dé à jouer, quelles sont les faces qui apparaissent le plus souvent ? En d'autres termes, si on lance l'objet, la face supérieure aura-t-elle plus de chances d'être un carré ou un triangle ?

(*) Lycée J.H. Fabre, Carpentras.

Étude statistique

La classe étant regroupée, chaque élève va lancer son cuboctaèdre 20 fois, et les résultats seront collectés dans une feuille de calculs. Les calculs de fréquence d'apparition des faces triangulaires ont été confiés au logiciel, puis divers regroupements ont été effectués (en regroupant les lancers par 60, voire plus). La fluctuation d'échantillonnages est alors apparue clairement.

À la recherche d'un modèle…

Une fois collectés tous les résultats, il nous a semblé intéressant de chercher si les fréquences obtenues auraient pu être « devinées », c'est-à-dire si nous pouvions dégager un mode de calcul de la fréquence d'apparition des triangles.

L'aspect géométrique

La fiche de départ permet une première exploration de l'objet, elle est tirée du classeur Clasmath :

DÉCOUPAGES DU CUBE

(C) est un cube d'arête 5 cm.

On découpe aux coins de chacune de ses faces un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent x cm, x pouvant varier de 0 à 2,5.
On enlève, à chaque sommet, la pyramide ainsi formée et on désigne par S_x le solide obtenu.

1°) On note $V(x)$ le volume de S_x en cm^3.
a) Exprimer $V(x)$ en fonction de x.
b) Étudier les variations de la fonction V sur [0 ; 2,5].
c) Tracer la courbe représentative de V.

2°) On note $A(x)$ l'aire totale de S_x en cm^2.
Reprendre pour la fonction A les questions a), b), c) du 1°).

3°) Pour quelle valeur de x, les faces de (C) sont-elles transformées en octogone régulier ?
Dessiner sur la figure 1 le solide correspondant.

4°) a) Dessiner sur la figure 2 le solide $S_{2,5}$ appelé cuboctaèdre et obtenu pour x = 2,5.
b) Décrire ce solide.

FACES :

ARÊTES :

VOLUME :

AIRE LATÉRALE :

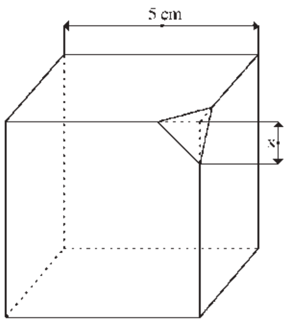


figure 1

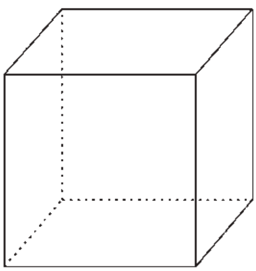


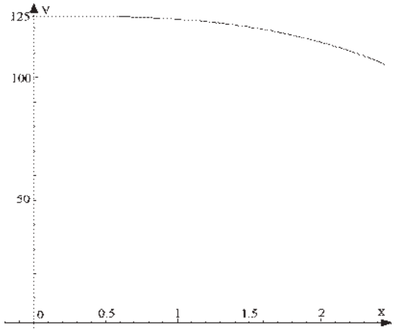
figure 2

Eléments de réponse

1°) a) $V(x) = 125 - 8 \times \dfrac{x^3}{6} = 125 - \dfrac{4}{3}x^3$.

b) V est strictement décroissante car augmenter x revient à retirer de la matière.

c) Courbe de V.

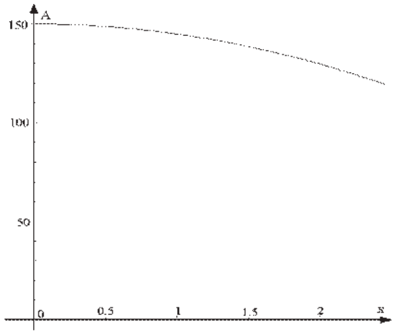


2°) a)

$$A(x) = 150 - 24 \times \frac{x^2}{2} + 8 \times \left(x\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 150 - 4x^2\left(3 - \sqrt{3}\right).$$

b) A est strictement décroissante.

c) Courbe de A.

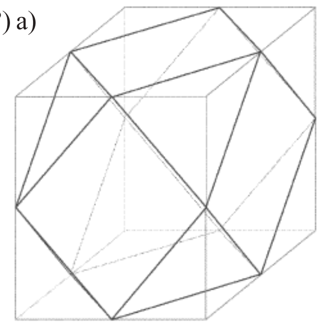


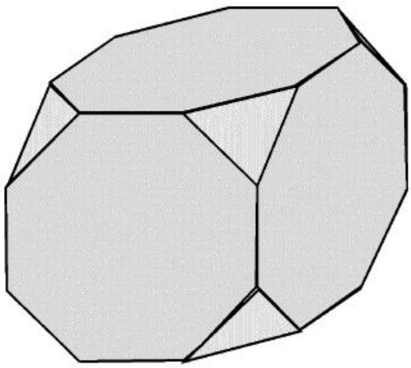
3°) $5 - 2x = x\sqrt{2}$ mène à

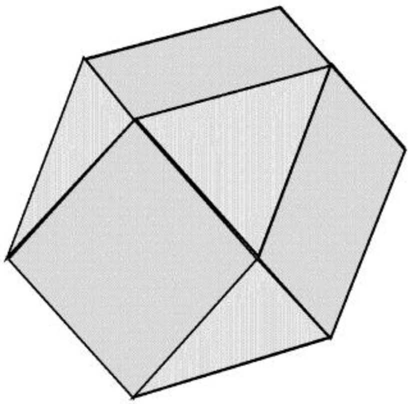
$x = \dfrac{5}{2 + \sqrt{2}} \approx 1{,}46$ (unité : cm).

$x\sqrt{2} = \dfrac{5}{\sqrt{2} + 1} = 5\left(\sqrt{2} - 1\right)$ est le côté de l'octogone.

4°) a)







Une séance en salle informatique utilisant Géospacw permet également de bien se familiariser avec le solide étudié, et en particulier de vérifier les valeurs obtenues pour les aires et volumes. Le logiciel permet en outre de visualiser un patron de l'objet. Il suffit d'ailleurs de charger une figure déjà élaborée et de donner la bonne valeur à la variable a pour retrouver la situation étudiée. La réalisation du patron nécessitera une autre heure entière, en groupes là aussi.

Les statistiques

Le travail se fait en classe entière, chaque élève disposant de son cuboctaèdre, et d'une feuille de résultats sur laquelle il collectera les informations et effectuera les calculs. On lance d'abord chacun 20 fois l'objet, et on note le nombre de fois où une face triangulaire est apparente. Les résultats obtenus sont réunis dans la feuille de calculs au format Excel ci-après :

Lancer du cuboctaèdre

Chacun effectue 20 lancers de son cuboctaèdre

Aziz		Fréq. (%)	**Séverine**		Fréq. (%)	**Angélique**		Fréq. (%)
Triangles :	5	25	Triangles :	3	15	Triangles :	3	15
Carrés :	15	75	Carrés :	17	85	Carrés :	17	85
Total des triangles :			11	Fréquence :			18,333 %	

David		Fréq. (%)	**Emilie**		Fréq. (%)	**Virginie**		Fréq. (%)
Triangles :	4	20	Triangles :	6	30	Triangles :	8	40
Carrés :	16	80	Carrés :	14	70	Carrés :	12	60
Total des triangles :			18	Fréquence :			30 %	

Roxane		Fréq. (%)	**Marion**		Fréq. (%)	**Ganaël**		Fréq. (%)
Triangles :	6	30	Triangles :	2	10	Triangles :	6	30
Carrés :	14	70	Carrés :	18	90	Carrés :	14	70
Total des triangles :			14	Fréquence :			23,333 %	

Jessica		Fréq. (%)	**Olivia**		Fréq. (%)	**Stéphanie**		Fréq. (%)
Triangles :	7	35	Triangles :	5	25	Triangles :	7	35
Carrés :	13	65	Carrés :	15	75	Carrés :	13	65
Total des triangles :			19	Fréquence :			31,667 %	

Laura		Fréq. (%)	**Olivier**		Fréq. (%)	**Julien**		Fréq. (%)
Triangles :	8	40	Triangles :	7	35	Triangles :	5	25
Carrés :	12	60	Carrés :	13	65	Carrés :	15	75
Total des triangles :			20	Fréquence :			33,333 %	

Mélanie			Alexis			Gabriel		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	5	25	Triangles :	6	30	Triangles :	8	40
Carrés :	15	75	Carrés :	14	70	Carrés :	12	60

Total des triangles : 19 Fréquence : 31,667 %

Laure			Charlotte			Caroline		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	4	25	Triangles :	3	15	Triangles :	2	10
Carrés :	16	75	Carrés :	17	85	Carrés :	18	90

Total des triangles : 9 Fréquence : 15 %

Sophie			Julie			Emilie		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	4	20	Triangles :	5	25	Triangles :	3	15
Carrés :	16	80	Carrés :	15	75	Carrés :	17	85

Total des triangles : 12 Fréquence : 20 %

Jessica			Emile			Aurore		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	5	25	Triangles :	10	50	Triangles :	6	30
Carrés :	15	75	Carrés :	10	50	Carrés :	14	70

Total des triangles : 21 Fréquence : 35 %

Virginie			Céline			Ivan		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	6	30	Triangles :	5	25	Triangles :	5	25
Carrés :	14	70	Carrés :	15	75	Carrés :	15	75

Total des triangles : 16 Fréquence : 26,667 %

Thomas			Valérie			Estelle		
		Fréq. (%)			Fréq. (%)			Fréq. (%)
Triangles :	4	20	Triangles :	4	20	Triangles :	6	30
Carrés :	16	80	Carrés :	16	80	Carrés :	14	70

Total des triangles : 14 Fréquence : 23,333 %

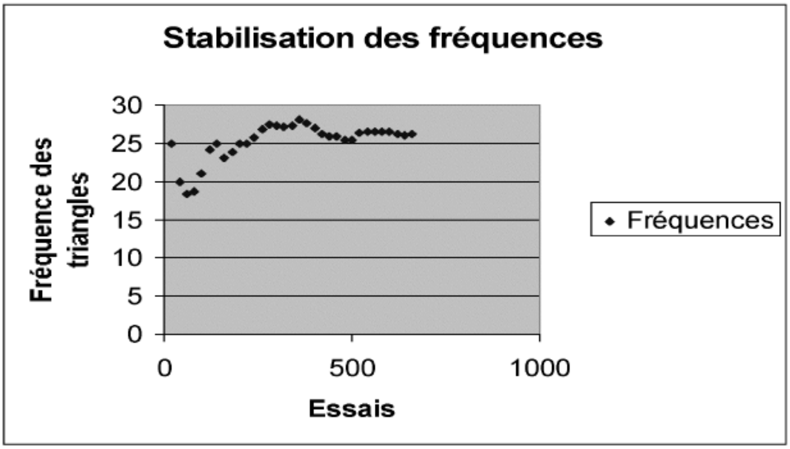
Total général : 173 Fréquence : 26,212 %

Cette feuille dont chaque élève dispose d'un exemplaire à remplir est projetée au tableau et remplie au fur et à mesure que les résultats de chacun sont donnés. Les premiers calculs de fréquence sont faits « à la main », puis on fait confiance au logiciel pour les calculs suivants. Les premières observations sont simples : les résultats sont loin d'être homogènes, et on observe des écarts importants entre les données de chacun. Les regroupements trois par trois (pour avoir des fréquences sur 60 lancers) permettent de bien constater un resserrement des résultats.

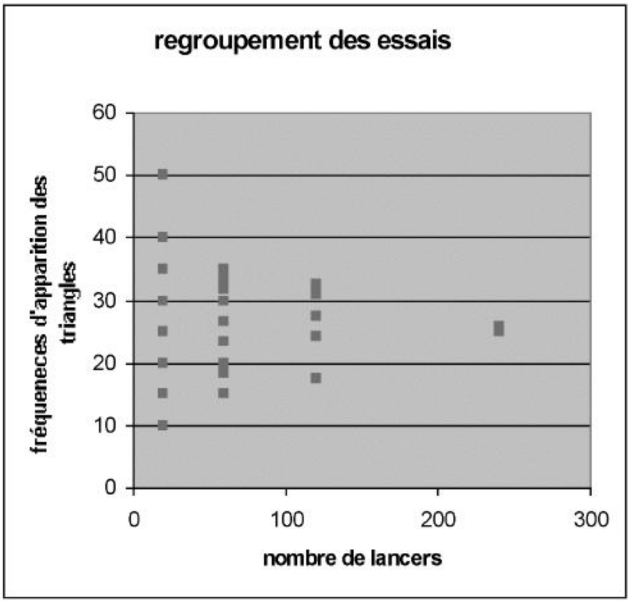
L'étape suivante, toujours grâce au tableur, va tenter de confirmer une idée simple : plus on aura d'essais, plus les résultats des fréquences seront resserrés. Pour ce faire, on rassemble les données :

Lancers	Triangles	Fréquences
20	5	25
40	8	20
60	11	18,3333333
80	15	18,75
100	21	21
120	29	24,1666667
140	35	25
160	37	23,125
180	43	23,8888889
200	50	25
220	55	25
240	62	25,8333333
260	70	26,9230769
280	77	27,5
300	82	27,3333333
320	87	27,1875
340	93	27,3529412
360	101	28,0555556
380	105	27,6315789
400	108	27
420	110	26,1904762
440	114	25,9090909
460	119	25,8695652
480	122	25,4166667
500	127	25,4
520	137	26,3461538
540	143	26,4814815
560	149	26,6071429
580	154	26,5517241
600	159	26,5
620	163	26,2903226
640	167	26,09375
660	173	26,2121212

Tous les calculs fastidieux sont effectués par Excel, et on peut rassembler les résultats sous forme de nuage de points :



Excel permet aussi de visualiser les résultats en affichant tous les résultats pour 20 essais, puis en les regroupant par 60, puis par 120 et ainsi de suite ; on obtient alors une autre visualisation de la fluctuation, en mettant en évidence l'étendue des résultats pour chaque regroupement :



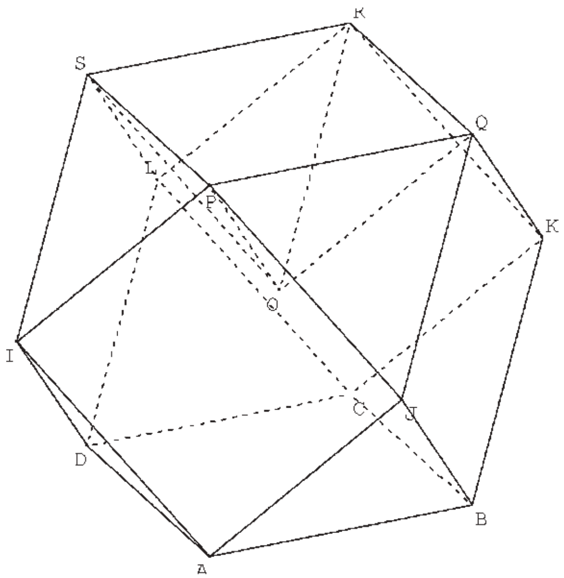
Le but recherché dans cette démarche est bien évidemment la mise en évidence de la fluctuation d'échantillonnage. Les potentialités graphiques d'Excel ont permis ici une approche visuelle, graphique de la notion.

Retour sur les calculs dans l'espace

L'étape suivante va nous permettre de revenir sur le solide construit ; les élèves sont intrigués : d'où sort cette valeur vers laquelle semble se rapprocher les fréquences ? Nous nous sommes donc mis à la recherche d'un modèle qui pourrait correspondre à la situation.

L'approche par les dénombrements (on compte les triangles, les carrés et on fait le rapport) n'a même pas été envisagée par les élèves. Sans doute ont-ils une bonne connaissance de l'objet (nous y travaillons depuis des mois !) et le fait qu'il y a plus de triangles que de carrés leur montre immédiatement que ce modèle n'est pas valable.

Il va donc falloir revenir sur l'objet et faire quelques calculs :



Première idée : Travailler sur les aires, et calculer le rapport entre l'aire des triangles et l'aire totale du cuboctaèdre :

Aire d'un carré : $\frac{25}{2}$ (le côté d'un carré est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$).

Aire d'un triangle : $\frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$.

Aire totale : $75 + 25\sqrt{3}$.

Rapport : $\frac{25\sqrt{3}}{75 + 25\sqrt{3}} \approx 0,366$.

Cette valeur ne correspond pas à celle suggérée par la recherche statistique ; nous sommes conduits à envisager une autre hypothèse

<u>Deuxième idée</u> : travailler sur les volumes, et calculer le rapport entre le volume des tétraèdres et le volume total du cuboctaèdre :

Volume du cuboctaèdre : $5\times5\times5-\dfrac{8\times\dfrac{5}{2}\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}{6}=125-\dfrac{125}{6}=\dfrac{625}{6}\approx104{,}17$.

Volume d'une pyramide à base carrée : $\dfrac{\dfrac{25}{2}\times\dfrac{5}{2}}{3}=\dfrac{125}{12}$.

Volume des 8 tétraèdres de coin :

$$\frac{625}{6}-6\times\frac{125}{12}=\frac{625-375}{6}=\frac{250}{6}=\frac{125}{3}\approx41{,}67.$$

Rapport : $\dfrac{\dfrac{125}{3}}{\dfrac{625}{6}}=\dfrac{2}{5}=0{,}4$.

Là encore, l'étude statistique nous amène à rejeter le modèle.

À ce stade du travail, nous avons été obligés de constater que les calculs (déjà bien compliqués pour une classe de seconde) ne nous ont pas permis de répondre à la question posée. Même en essayant de coefficienter les calculs précédents (par les distances au centre du solide pour les aires par exemple) on ne trouve pas de valeur se rapprochant de façon raisonnable du résultat suggéré par les statistiques. Nous n'avions donc que la réponse donnée par l'expérimentation.

En guise de conclusion

Cette activité n'était au départ que destinée à faire un lien entre les statistiques et d'autres parties du programme de seconde. Elle s'est révélée motivante pour nombre d'élèves, et surtout elle a permis de les mettre assez souvent en situation de recherche. À noter aussi que l'alternance de séquences de manipulation (construction du patron, jet du solide) et de séquences plus théoriques (construction de courbes, calculs de volume) a permis à chacun de trouver à s'employer efficacement.

Les élèves ont aussi été sensibles au fait de travailler dans la durée ; l'activité a été amorcée dès le mois d'octobre, et s'est terminée au début de janvier, tout en servant de point d'appui pour nombre de notions étudiées au cours de cette période. On a ainsi rompu avec les habitudes et les attitudes de l'élève qui travaille une notion, passe à une autre en oubliant tout ce qui a été fait un mois, voire une semaine auparavant. L'impression d'un programme de seconde nous amenant à une sorte de « saupoudrage mathématique » en est un peu atténuée. Peut-être peut-on voir aussi dans de telles activités une première initiation à ce qui fera l'objet l'année suivante d'un TPE ?

Ce travail a aussi permis une entame non triviale de la démarche statistique. En effet, nous n'avions pas de valeur attendue pour la fréquence d'apparition des triangles, contrairement à ce qui se passe pour le lancer d'une pièce (pile ou face) ou pour le jet d'un dé. Il n'y avait donc pas d'effet pervers du type « le prof attend une valeur proche de 0,5, on va lui faire plaisir… ». Il ne semble pas en effet que faire vérifier aux élèves que « la fréquence d'apparition du pile dans un jeu de pile ou face soit proche de _ » déchaîne des torrents d'enthousiasme chez nos élèves.

Reste qu'un tel travail pose aussi nombre de questions, et que certains aspects ont pu rebuter quelques uns ; en particulier, tous les calculs d'aires et de volume ont paru bien difficiles à la plupart des élèves. Une objection aurait pu aussi apparaître : jeter 33 cuboctaèdres différents a-t-il le même effet que jeter 660 fois le même ?

Et il nous restera toujours un doute : est-il possible de modéliser la situation ? En d'autre termes, peut on calculer sur un tel objet la probabilité d'apparition d'une face triangulaire ? Quels outils permettraient de le faire ?

En dernier lieu, je voudrais remercier le collègue Vincent, auteur de la fiche d'activité de Clasmath sur le cuboctaèdre, et signaler un site Internet très riche sur les polyèdres :

www.sciences.univ-nantes.fr/info/perso/permanents/pmartin/Polyforme/

La feuille de calcul sous Excel permettant de collecter les résultats d'une multitude d'expériences peut être adaptée à de nombreuses autres situations, et je peux la fournir à toute personne intéressée.