Construction d'un triangle connaissant deux angles (donc, aussi, le troisième) et son périmètre(*)

Henri Bareil(**)

Pour utiliser le périmètre, il est **commode et souhaitable de former un segment dont il sera la longueur**. Selon la notation traditionnelle, qui simplifie ainsi les formules, désignons ce périmètre par $2p$.

Remarques générales

1. Les angles proposés doivent, évidemment, avoir leur somme inférieure à 180°. On pourra observer les réactions des élèves qui font un choix différent…
2. Dès qu'une solution est obtenue, elle est unique : des triangles d'angles imposés sont tous « de même forme » (vocabulaire des actuelles Secondes), « à l'échelle l'un de l'autre ». Si un côté est multiplié par k, il en est de même des deux autres, donc du périmètre…
3. Les diverses méthodes montreront, on s'en doute avec les études réalisées par P. Rey, qu'aucune condition n'est imposée au périmètre.
4. Le cas particulier $\widehat{B} = \widehat{C} = 60°$ entraîne une solution immédiate.

   Avec $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$ ou $\widehat{B} = \widehat{C} = 30°$, on peut, en plus des méthodes générales pratiquées ci-après, utiliser la relation de Pythagore.

Mais voyons tout de suite le cas général, en supposant donnés (correctement !) les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ($\widehat{A}$ est alors également connu).

Méthode 1

Figure d'analyse :
pour former $2p$, « déplions » le périmètre sur (BC), comme indiqué sur la figure 1.

On en déduit : $\widehat{B'} = \widehat{A_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (théorème de l'angle extérieur…), $\widehat{C'} = \widehat{A_2} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

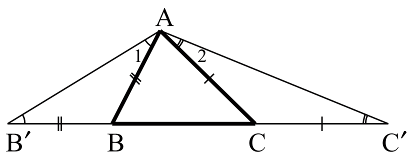

Figure 1

D'où une construction : on trace
– [B′C′], de la longueur imposée $2p$,

(*) cf. article de Pierre Rey, du précédent numéro du Bulletin, où ce triangle est « tracé » par approximations. Le présent article s'attache à un tout autre aspect de l'étude de Pierre Rey.
(**) IREM de Toulouse

– puis les demi-droites [B′x] et [C′y], formant en B′ et C′ les angles $\frac{\widehat{B}}{2}$ et $\frac{\widehat{C}}{2}$, sécantes en A,
– enfin, les médiatrices de [AB′] et [AC′], qui donnent B et C.

La justification est immédiate.

Niveau possible : à partir de la Cinquième.

Méthode 2

(Suggérée par le tracé « économique » par approximations décrit dans l'article de P. Rey).

Figure d'analyse :
à partir d'un triangle ABC remplissant les conditions angulaires.

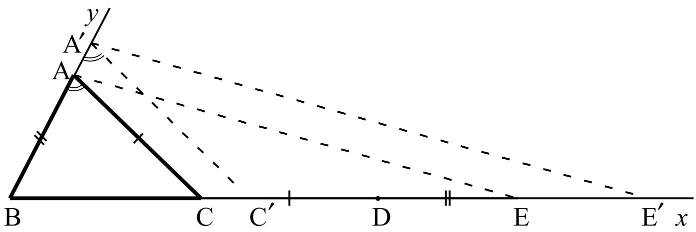

Figure 2

On forme le périmètre de ce triangle, sur [BC), en [BE].

En laissant $\widehat{B}$ inchangé en position, on peut constater, et démontrer, que (AC) et (AE) restent parallèles à elles-mêmes lorsque A varie sur [By) (avec les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ constants) :

– soit [A′C′] la nouvelle position de [AC], A′ sur [By), C′ sur [Bx). $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C'}$, donc (A′C′) // (AC).
– le théorème « Thalès-triangle » indique alors que les longueurs BA, BC, AC (et, donc, BE), sont multipliées par un même nombre. Ce multiplicateur agissant sur BA et BE, la réciproque de « Thalès-triangle » induit (A′E′) // (AE).

De là une construction :
On porte, sur [Bx), la longueur BE′ égale au périmètre imposé. On trace (E′A′) parallèle à (EA), puis (A′C′) parallèle à (AC).
D'où un triangle A′BC′ solution :
Par référence au triangle ABC, la justification est immédiate pour les angles et le théorème de « Thalès-triangle » justifiera le périmètre de A′BC′.

Niveau possible : à partir de la Quatrième.

Méthode 3

Figure d'analyse (qui remplit déjà les conditions angulaires) :

On « forme » son périmètre selon BE, et on lui associe, à partir de B, sur une demi-droite [B*z*), le périmètre imposé :

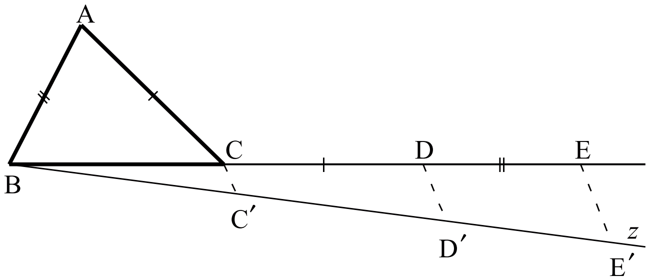

Figure 3

Soit BE′ sur [B*z*), BE′ valant le périmètre imposé.
Traçons (EE′) puis les parallèles (DD′) et (CC′).
D'après « Thalès triangle », nous formons ainsi trois longueurs proportionnelles aux côtés de ABC.
Cela peut nous fournir un triangle « à l'échelle » de ABC, donc, selon une propriété plus ou moins explicitée en Sixième et Cinquième, ayant les même angles. Il s'agit de la propriété selon laquelle un dessin « à l'échelle » conserve les angles.
Sa justific lever du troisième cas de similitude des triangles ou de la loi des sinus $\left(\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \ldots\right)$ ou de l'homothétie…
D'où une construction et sa justification plus ou moins insérée dans une théorie.

Méthode 4 (abrégée)

Cf. figure 4 : c'est plus compliqué que la figure 3, mais de justification élémentaire *(à partir de la Quatrième)*.

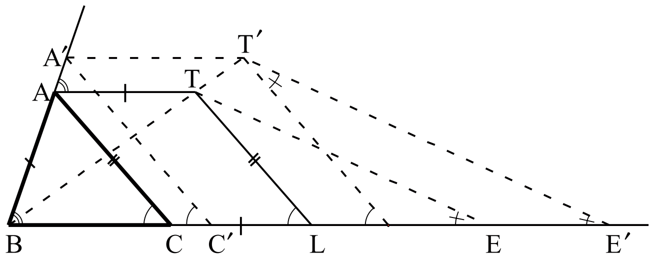

Figure 4

(BC) // (AT), (TL) // (AC), LE = LT, puis (E′T′) // (ET), (T′A′) // (TA)…

Méthode 5

Utilisons *un cercle ex-inscrit du triangle* ABC *d'analyse*.
Il permet de « matérialiser » simplement le demi-périmètre *p*. En effet, en utilisant les trois tangentes (BF), (BE), (AC) à ce cercle, AT = AF et CT = CE, cependant que BF = BE.

Dès lors BF = BE = p.

D'où une construction de ABC *remplissant les conditions requises* :

Traçons $\widehat{B}$. Le demi-périmètre permet de placer E et F, puis J centre du cercle ex-inscrit dans B.

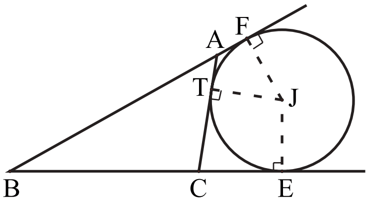

Figure 5

La donnée de $\widehat{C}$ indique la direction de (AC), donc permet le tracé de (JT), d'où T puis A et C.
La *justification* est immédiate.
Niveau possible : à partir de la Cinquième (avec usage de la symétrie).

Méthode 6 (abrégée)

Voir figure 6 :
BE étant le périmètre d'un triangle ABC qui remplit déjà les conditions angulaires, soit (B′E′) // (BE), B′ sur (AB) (non indispensable, mais cela simplifie), et B′E′ donnant le périmètre imposé.
La configuration de départ, ABC, E, et celle souhaitée A′B′C′, E′, se correspondent ici dans l'homothétie (K, KB′/KB)… (On a d'abord K, puis C′, puis A′).

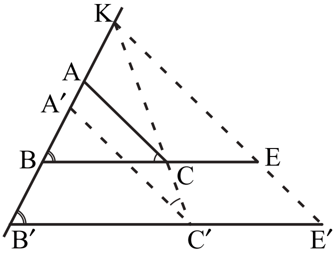

Figure 6

Niveau possible : à partir de la Troisième en utilisant le théorème de Thalès, Lycée si on parle d'homothétie.

Méthode 7 (abrégée)

Avec les notations classiques, pour un triangle ABC :

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{2p}{\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}}.$$

Cela permet la détermination de a, b, c, d'où la construction d'un triangle connaissant ses trois côtés.

Annexe

Cas $\widehat{B} = \widehat{C}$ *sans autre particularité.*
Avec les notations classiques, il n'y a plus que deux inconnues : les longueurs a et b.
Or soit (AH) la hauteur, médiane, … du triangle isocèle ABC.

On connaît $\frac{a}{2} + b$ ($= p$) et le rapport de $\frac{a}{2}$ à b ($= \cos\widehat{B}$).
Nous sommes ramenés à la détermination de deux longueurs (par construction ou calcul) connaissant leur somme et leur rapport. D'où une nouvelle approche…