Mathématiques en environnement multimédia.

Michel Le Berre et Gérard Kuntz

Les deux sites mathématiques dont il est question ici sont *remarquablement dissemblables*. C'est pourquoi nous les présentons simultanément. Ils diffèrent par *l'organisation de l'information*. Le premier la délivre en vrac, l'autre l'offre rigoureusement structurée. Ils sont représentatifs de *deux types de sites très fréquents sur la toile*. Comme tous les sites présentés sous cette rubrique, ils ont une qualité mathématique avérée. Leur utilisation en classe exige une réflexion préalable que les auteurs amorcent. Leur adresse n'est pas garantie, elle peut changer sans préavis ! Un moteur de recherche permet alors de les retrouver (MSN par exemple les détecte à partir des mots-clé « nombre d'or » et « agropolis »)(1).

Le nombre d'or sur le site http://www.mygale.org/villemingerard/Geometri/NbOr.htm

À l'adresse indiquée se trouve un document complet sur le nombre d'or avec de nombreux liens vers des sites traitant de sujets connexes.

Les informations y figurent à l'état brut, sans explication et sans preuve : c'est un choix que partagent de nombreux sites. Il est surprenant pour des enseignants habitués à lire et à produire une information structurée, où les notions utilisées sont préalablement définies et où les affirmations sont démontrées. Le grand avantage de cette approche est de donner une *vision panoramique compacte* (29 pages) de l'ensemble des propriétés du nombre d'or. *L'usage de ce type de site avec des élèves est délicat et suppose une réflexion préalable et une négociation serrée*.

Un enseignant trouve ici une abondante documentation : la valeur et les formules permettant d'obtenir ce fameux nombre appelé phi comme Phidias, ses liens avec les fractions continues, sa définition par une suite de Fibonacci ou de Lucas, sa mise en évidence dans les constructions et figures géométriques (avec usage de la trigonométrie), le pentagramme, la chaîne dorée. Un court historique évoque en particulier la naissance du culte du nombre d'or vers 1930 et les recherches de Le Corbusier. Voici la page d'accueil du site.

(1) Les propositions pour cette rubrique et les critiques des textes parus peuvent être envoyées à g.kuntz@libertysurf.fr

Accueil / Dictionnaire / Rubriques / Index / Références / ***Nouveautés

⇨ TABLE DES MATIÈRES - M'écrire - *Édition du:* 31/03/01

– – Rubrique: Nombre d'OR

Sommaire de cette page

Pages voisines

Série du type Fibonacci et cousins

Constante π / Cercle / Constantes Mathématiques / Constantes de l'univers

Pour un élève de lycée, le parcours rapide des informations du site le convainc immédiatement de la richesse du nombre d’or. Puis il bute, à chaque ligne, sur des notions inconnues. En voici un exemple, *tel qu’il figure au début du document* :

Une formule étonnante :

On prend la formule qui donne x, on remplace x par sa valeur

$$x = 1 + \frac{1}{x} \qquad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

C'est le développement ou la fraction continue du nombre d'or

On simplifie l'écriture en notant : $\varphi = [1\ ;\ 1, 1, 1, 1, 1\ \dots]$

Un peu plus loin on lit (est-ce de l’humour ou de l’ironie ?) :

Autre formule ***simple*** *!*

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Quel est le statut de ces assertions ? Quel est le sens de ces écritures ? Répondre à ces questions suppose un travail important sur les fractions continues et les suites. Un lien avec un site traitant ces questions est proposé. De nombreux livres existent sur le sujet. C’est un des thèmes d’étude possibles. En voici un autre trouvé un peu plus loin :

Fractions d'approximation du nombre d'or

= quotient de deux Fibonacci consécutifs

1 1

2 2

3/2 1+1/2

5/3 1+1/(1+1/2)

8/5 1+1/(1+1/(1+1/2))

13/8 1+1/(1+1/(1+1/(1+1/2)))

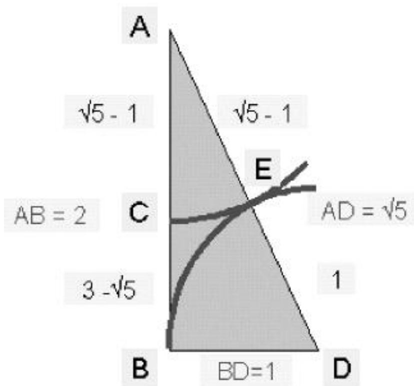
21/13 1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1+1/2))))

Là encore, l'information est minimale (hermétique ?) et renvoie à des notions hors programme. Le chemin est long du constat à la compréhension, puis à la preuve. Mêmes remarques dans la partie géométrique, dont voici un extrait :

CONSTRUCTION

Section d'or d'un segment:

• Un triangle ABD, · BD = 1 et AB = 2
· Cercle de centre D, · rayon BD = 1
· Cercle de centre A, · rayon AE = $\sqrt{5}-1$
· ACB = · section dorée



Calcul:

$$\frac{BC}{AB}=\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

On le voit, la richesse du document et le développement minimal des informations qu'il contient est un obstacle pour les élèves. ***Elle peut être pour eux un défi***. Pourvu qu'on parvienne à faire avec eux des choix et à limiter les ambitions : par exemple, ***l'étude mathématique complète d'une petite partie des informations offertes*** (découverte et apprentissage des notions en amont, démonstration de quelques assertions essentielles) est un projet réaliste. Faute de quoi, on verra fleurir l'attitude décrite dans un texte précédent à propos des fractales(2) : des élèves se contentent d'importer le fichier, de l'imprimer ou d'en faire des transparents. Le risque est alors grand d'entendre des exposés dont le contenu dépasse totalement ceux qui exposent… Font-ils encore dans ce cas des mathématiques ?

Si cette hypothèque est levée, un élève peut découvrir par le biais de ce site, à propos du nombre d'or, différents outils mathématiques mis en jeu dans un cadre attrayant : équations, fractions continues, suites, théorème de Pythagore, constructions géométriques, pentagone….
Et élargir vers la peinture et l'architecture où le nombre d'or a valeur de mythe.
Le travail sur ce site, amorcé en classe, peut conduire à bien des développements insoupçonnés des élèves qu'on aura su intéresser et qui auront acquis dans ce cadre rigueur et méthode.

La visite du site www.ifrance.com/expo/ consacré par une classe de Seconde à des travaux sur le nombre d'or est instructive à bien des égards. Il pose clairement le problème de l'évolution de l'enseignement des mathématiques sous l'influence des nouvelles technologies. Progrès, approfondissement ou poudre aux yeux, difficile de se faire une opinion(3) en l'absence d'une précision essentielle : quelle est la part respective des mathématiques traitées et comprises par les élèves et celle de « l'importer, copier, coller » dans le site ?

Un cours en ligne : http://www.cnam.agropolis.fr:aupelf

Après le site du nombre d'or, où les données sont présentées à l'état brut, voici un site tout à fait différent qui propose un véritable cours accompagné de moyens d'appropriation.

Ce cours de statistiques et de probabilités en ligne comporte six modules : statistique descriptive, calcul des probabilités, variables aléatoires, échantillonnage et estimation, tests, ajustement linéaire. Seules trois leçons du module 1 sont consultables sous forme de démonstration. Le reste du cours est accessible à la condition de régler des droits d'inscription (800 F) et des frais de dossier (550 F). Cette inscription permet de recevoir un CDROM « hybride » permettant un accès rapide à Internet avec tutorat individualisé.

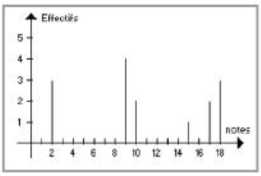
(2) cf. « De l'influence de l'utilisation d'Internet sur la manière d'appréhender les mathématiques » . Bulletin de l'APMEP nº 435, pages 522-523.
(3) Le collègue dont l'adresse figure sur le site précise : « Ce site a été réalisé à partir d'une exposition réalisée par les élèves de seconde lors des travaux dirigés de mathématiques. Les documents ont été scannés ou récrits par le professeur de mathématique, le responsable du CDI et certains élèves de Première. J'ai personnellement rajouté et recomposé de nombreuses pages. »

La conception de ce cours est la suivante : des introductions de vocabulaire dans des situations variées avec compréhension des tableaux statistiques, puis un contrôle d'acquisition sous forme de réponses à des questions via Internet. Une réponse fausse est en général commentée pour permettre à l'apprenant de mieux analyser son erreur. Afin de faciliter un travail en profondeur les cours peuvent être enregistrés et imprimés. Une correction sommaire est aussi enregistrée, permettant une auto-correction sans connexion. De façon plus générale une leçon est découpée en conseils, cours, QCMs interactifs, résumés et exercices interactifs. A la fin de chaque partie un devoir doit être rédigé et adressé par la poste ou par mél au tuteur qui le renvoie corrigé.

On le voit, l'expérience du Cnam en matière de formation à distance est remarquablement réinvestie dans les nouvelles technologies de communication et d'information. Les auteurs ne se contentent pas de mettre le cours en ligne. Ils connaissent les limites d'un apprentissage solitaire face à l'écran. Ils intègrent au travail l'indispensable interactivité au moyen du courrier électronique (l'étudiant peut interroger le tuteur et obtenir des réponses rapides ; le tuteur peut réagir à d'éventuelles erreurs). Enfin, ils ne se limitent pas à des QCMs interactifs pour tester les connaissances : la rédaction d'un devoir de synthèse reste, même sur Internet, une activité décisive pour l'étudiant. *Il rédige une solution, il argumente, il explique et démontre*. Ces démarches intellectuelles capitales ont tendance à disparaître avec les nouvelles technologies qui ne permettent pas de *contrôler automatiquement* un raisonnement complexe. On se contente alors paresseusement de QCMs ou de constructions géométriques ***sans un mot de justification***, participant ainsi à l'appauvrissement de la formation scientifique des élèves et de leur capacité d'expression (c'est le cas pour beaucoup de CDROM).

Les deux premières leçons intitulées respectivement : « Sous quelles formes se présentent les données statistiques ? » et « les paramètres de tendances » sont assez courtes et paraissent faciles à lire et à travailler. En revanche, la troisième consacrée aux paramètres de position est beaucoup plus dense, tant sur le plan de la présentation que sur celui du contenu.
Pour permettre au lecteur de mieux percevoir les démarches suivies, en voici quelques extraits.

II - Paramètres de position



Les paramètres de tendance centrale ne suffisent généralement pas pour caractériser une distribution.

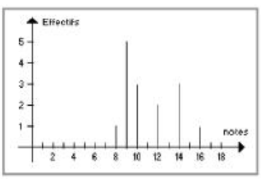
Ainsi, pour les 2 séries représentées ci-contre,

la moyenne est de :

le mode est de :

la médiane est de :

pourtant ces données sont bien différentes !



Nous allons définir de nouveaux paramètres pour prendre en compte ces différences.

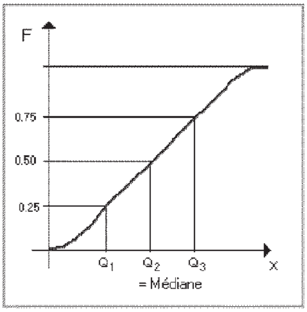
1) Les fractiles

On appelle <u>fractiles</u> d'ordre k les valeurs F_1, F_2, ... , F_{k-1} qui divisent la série en k parties d'effectifs égaux.

Par exemple les <u>quartiles</u> Q_1, Q_2, Q_3 divisent la série statistique ordonnée en 4 parties d'effectifs égaux.

Les <u>déciles</u> D_1, ... , D_9 divisent la série ordonnée en dix parties d'effectifs égaux.

Les <u>centiles</u> divisent la série ordonnée de façon croissante en 100 parties de mêmes effectifs.



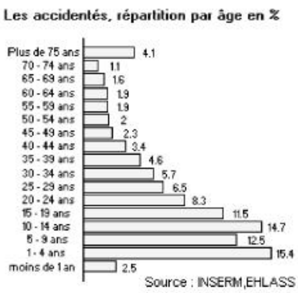
Combien y en a-t-il ?

Ces fractiles se calculent exactement comme la médiane.

Le quartile Q_2 est d'ailleurs égal à la médiane.

Les déciles, et surtout les centiles, n'ont de sens que si n est suffisamment grand (plusieurs centaines au moins pour des centiles).

Reprenons l'exemple vu en Présentation de la Leçon 2



L'âge médian des accidentés est d'environ : *ans*

25 % des accidentés ont moins de *ans*

On dira que c'est la valeur du quartile

$Q_1 =$

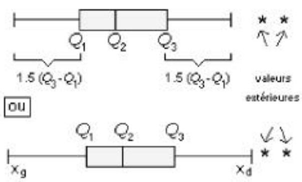
Le 3e quartile vaut : $Q_3 =$ *ans environ*

Le 1e décile est : $D_1 =$ *ans environ*

cela signifie que les 10 % plus jeunes accidentés ont moins de D_1.

De même, $D_9 =$ *ans environ*

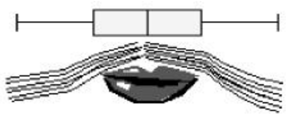
les 10 % plus âgés ont plus de D_9.



Il existe un moyen imagé de positionner les quartiles pour bien juger de l'allure de la distribution : c'est le <u>diagramme en boîte</u> (ou « <u>boîte à moustaches</u> »).

Il consiste à positionner Q_1, Q_2, Q_3 selon un axe, à tracer des rectangles de hauteur arbitraire,

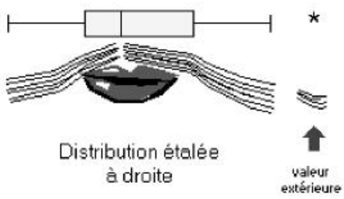
puis (dans sa version la plus courante), de prolonger ces "boîtes" par des "moustaches" de longueur $1.5\ (Q_3 - Q_1)$.



Distribution symétrique

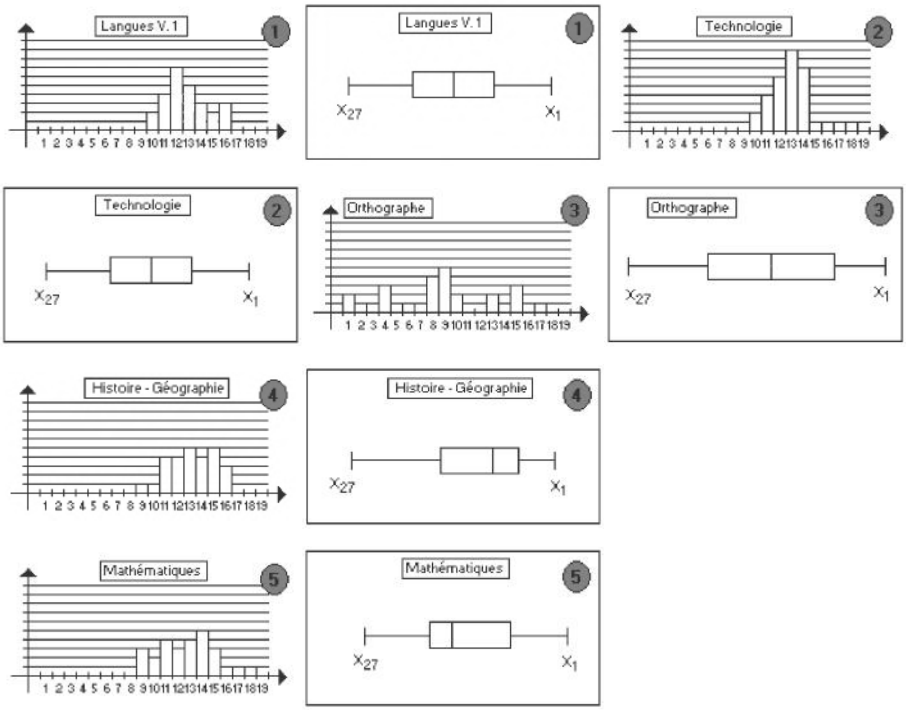
*Si la série comporte des valeurs extérieures aux moustaches, il s'agit de valeurs « aberrantes » au point de vue statistique, qu'on représente par exemple par *.*

Il convient de revoir ces valeurs qui peuvent résulter d'une erreur de mesure ou de transcription. Si aucune valeur n'arrive jusqu'aux bout des « moustaches », on les raccourcit jusqu'aux valeurs minimale et maximale.



L'intérêt de ces diagrammes en boîtes est de pouvoir comparer plusieurs distributions, par un moyen visuel plus « parlant » que la comparaison des histogrammes.

L'exemple ci-dessous concerne la répartition des moyennes des élèves d'une classe de 4ème,



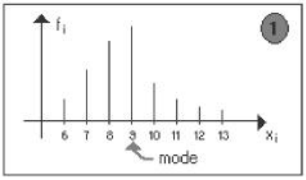
matière par matière.

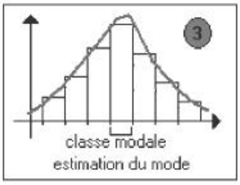
Une erreur s'est glissée dans un des diagrammes ; lequel ?

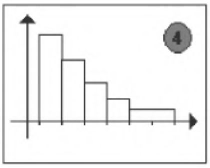
Il s'agit du diagramme n°

2) Le mode

Une distribution est <u>unimodale</u> si elle présente un maximum marqué, et pas d'autres maxima relatifs (sur le diagramme en bâtons ou l'histogramme)







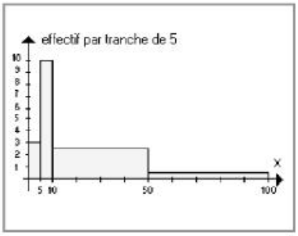
Quelles sont les distributions ci-dessus qui sont unimodales ?

Dans ce cas, l'abscisse du maximum, correspondant à la valeur la plus fréquente de la série, est appelée le <u>*mode*</u>.

Il n'est pas toujours bien défini dans le cas d'une variable continue, le découpage en classes peut être trompeur ; la <u>*classe modale*</u> *est la classe pour laquelle l'histogramme passe par un maximum.*

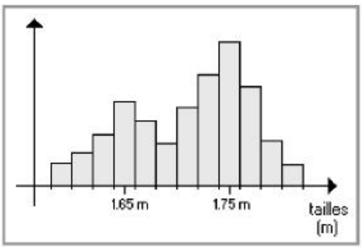
Quelle est la classe modale pour la distribution suivante ? (cliquer sur la bonne case) :

Classes	Effectifs
0-5	3
5-10	10
10-50	20
50-100	0



Si la distribution présente 2 ou plus maxima relatifs, on dit qu'elle est <u>*bimodale*</u> *ou* <u>*plurimodale*</u>. *Cela signifie que la population est hétérogène du point de vue de la variable observée.*

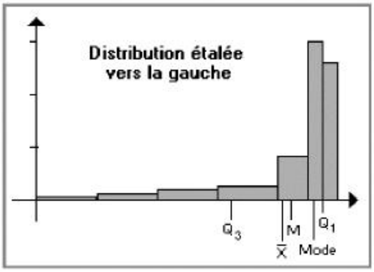
La population est composée de plusieurs sous-populations ayant des caractéristiques de tendance centrale différentes.

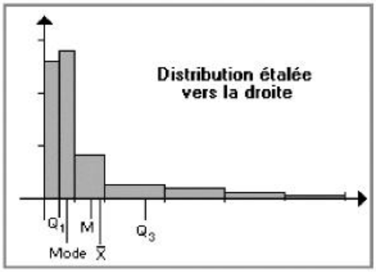


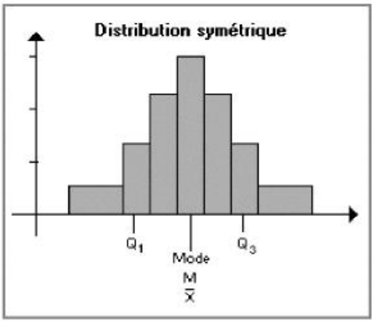
Répartition des tailles d'individus de 30 ans, dont 1/3 de femmes et 2/3 d'hommes

<u>Positions respectives du mode, de la médiane et de la moyenne pour une distribution unimodale.</u>

Lorsque la distribution est symétrique les trois paramètres sont confondus.







Lorsque la distribution est asymétrique, la médiane est généralement située entre le mode et la moyenne et plus proche de cette dernière.

III - Paramètres de dispersion

Deux distributions peuvent, tout en ayant des caractéristiques de tendance centrale voisines, être très différentes.

Ainsi la moyenne annuelle des températures dans une zone océanique peut être égale à la moyenne annuelle des températures dans une zone continentale, pourtant les distributions sont très différentes.

Dans le premier cas les variations de température autour de la moyenne sont assez faibles, dans le second cas elles sont beaucoup plus importantes.

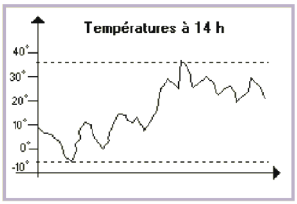
Il est donc nécessaire de mesurer la dispersion des valeurs autour des tendances centrales.

<u>L'Etendue</u> : R (range)

L'étendue (ou amplitude) d'une série statistique est la différence entre la valeur maximum et la valeur minimum de la série.

R = Maximum (X) - Minimum (X)

Facile à déterminer, l'étendue ne dépend que des 2 observations extrêmes qui sont parfois le fait de situations exceptionnelles.



X_{max} = 36° C
X_{min} = - 4° C

Il est donc difficile de considérer l'étendue comme une mesure stable de la dispersion ; ici

R = $\boxed{}$ *° C*

Ce logiciel est préparé pour des adultes en formation bac +2 (CNAM). Il pourrait cependant aider un élève de lycée comme exercice de contrôle de l'appropriation du cours . Rien de tel qu'un changement de cadre pour vérifier l'aptitude à reconnaître des outils dans des champs différents. N'ayant pu consulter l'ensemble du cours nous ne pouvons nous prononcer sur l'interêt documentaire éventuel pour un enseignant. Ce type de formation est certainement appelé à être commercialisé pour des élèves de lycée par l'industrie de l'enseignement. Certaines propositions seront sans doute de bonne qualité et accentueront l'inégalité des chances de réussite suivant l'origine sociale des élèves.

L'APMEP et les IREM devraient tenter de convaincre le ministère de l'Education de l'importance d'aides gratuites en ligne. Les équipes pédagogiques capables de les animer existent en leur sein. Il faudrait les compléter par des spécialistes en informatique et en communication. Est-il raisonnable d'abandonner ce secteur aux industriels de l'enseignement? C'est une réflexion urgente pour l'avenir proche.