À vos maths citoyens II (*) ou Grand public, bon public

Bernard Schibler

Résumé de … l'objectif

Il me paraît souhaitable que moins de « gens », à et de tous niveaux, disent « tout et n'importe quoi » à propos de certaines situations économiques à l'aide de concepts mathématiques utilisés de façon erronée. En pratique il me semble qu'il serait salutaire que tout élève sortant de terminale ait été formé aux notions « basiques » de pourcentages par tranches et de mathématiques financières car il en sera inévitablement un futur utilisateur. Autant que ce soit en connaissance de cause…

À travers trois faits qui m'ont interpellé ces derniers temps, je me suis aperçu que nombre de concitoyens avaient des convictions très approximatives d'une partie de leur environnement économique. Voici les faits qui vont étayer mon affirmation.

Premier fait

En 1999 et en 2000 les recettes fiscales de notre ministère des Finances ont tellement dépassé les prévisions que toutes les catégories socioprofessionnelles voulaient, elles aussi, profiter de cette croissance inespérée. Le plus prompt à demander une redistribution des richesses était notre Président de la République ! Or que s'était-il effectivement passé ? Au lieu de terminer l'exercice avec un déficit de l'ordre de 240 GF, il ne fut que de 200 GF !
Déficit réel − déficit prévisionnel = −200 − (−240) = +40 GF. En voilà une belle cagnotte ! La règle des signes accomplit des miracles… Et tant pis pour les « rationnels » ne trouvant pas « naturels » ces résultats « relatifs » quand le déficit « entier » (cumulé) de notre pays, bien « réel » lui, est de 4 500 GF. L'« imaginaire » est « complexe »…

Second fait

Ce billet a été écrit fin mars 2001, à l'époque des déclarations de revenus. Pas étonnant donc qu'en salle des professeurs j'aie pu entendre la réflexion suivante : « J'ai fait deux heures supplémentaires l'an dernier et, en gagnant 15 000 F, je me retrouve dans la tranche des 43 %. Cela ne vaut pas le coût de se décarcasser pour en arriver là ! ». La compassion était presque unanime quand un professeur de comptabilité tenta de rassurer notre collègue en ces termes : « Le principe de l'impôt sur le revenu est celui des pourcentages par tranches. Si tes 15 000 F sont, en totalité, dans la tranche des 43 % tu payeras effectivement 6 450 F d'impôt et tu n'auras

(*) Cet article fait suite à celui paru dans le Bulletin n° 426.

gagné que 8 550 F pour tes deux “ heures années ”. En revanche, le reste de ton impôt ne sera pas affecté ».
Qu’en est-il en réalité ?
L’impôt I est une fonction affine par intervalles, ses différentes équations sont communiquées à chaque contribuable. La variable est le revenu imposable par part (le quotient familial). Dans la tranche incriminée, $\mathrm{I}(x) = 0{,}43x - 33\,244{,}85$. Dans le cas le plus simple, le revenu imposable x est déduit du revenu brut après deux abattements successifs de 10 et 20 %, soit 28 % $(1 - 0{,}90 \times 0{,}80 = 0{,}28)$. Le revenu brut correspondant à un revenu imposable x est donc $\dfrac{x}{0{,}72}$. Si T est le taux effectif de l’impôt par rapport au revenu brut on aura alors (dans la cas d’une part) la relation : $\mathrm{T}(x) = \dfrac{\mathrm{I}(x)}{\dfrac{x}{0{,}72}} = 0{,}72 \times \dfrac{\mathrm{I}(x)}{x}$. Vous trouverez à la fin du texte un tableau donnant les différents taux d’imposition effective par rapport au revenu brut pour les taux appliqués sur les revenus de 1999.
Traitons maintenant le cas de notre collègue en admettant que la totalité du revenu net découlant des 15 000 F, et seulement elle, se retrouve dans la tranche des 43 %. L’État prendra $15\,000 \times 0{,}72 \times 0{,}43 = 4\,644$ F ce qui représente près de 31 % du revenu relatif aux heures supplémentaires, l’impôt total représentant lui 15,8 % du revenu brut total. C’est beaucoup, mais … nettement insuffisant pour combler le déficit dont on parlait plus haut.

Troisième fait.

Pour terminer, je voudrais vous entretenir d’une offre de crédit pour l’achat d’une voiture. Ce « crédit-épargne » est très prisé (du moins en Alsace), des vedettes du show-biz en vantent même les mérites ! En voici le principe : pour un crédit d’un montant V_0, sur n mois, au taux mensuel (proportionnel) t_0, il est demandé à l’emprunteur de verser les n mensualités constantes d’un montant a découlant des paramètres cités (rien de plus normal). Comme l’emprunteur est (forcément…) mauvais épargnant, il lui est demandé, en plus des mensualités, des « versements volontaires » d’un montant $\dfrac{a}{4}$ afin qu’au terme du prêt, il ait à disposition une épargne de $n \times \dfrac{a}{4}$, épargne qui aura généré … 0 F d’intérêts ! Je me suis donc amusé (avec l’aide du solveur de ma calculatrice…) à calculer certains taux réels de tels emprunts à partir de l’équation d’équivalence (à la date n) suivante :

$$\mathrm{V}_0(1+t)^n + n\frac{a}{4} = \frac{5}{4}a\frac{(1+t)^n - 1}{t} \quad \text{(E)}$$

Pour le non initié il s’agit tout simplement de comparer la prestation du prêteur à celle de l’emprunteur. La mise en équation exige la connaissance des formules des intérêts composés, $C_n = C_0(1 + t)^n$ et des annuités constantes, $V_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ et sa forme équivalente $V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}$. Pour un taux périodique proportionnel annoncé t_0, (E) devient :

$$a\frac{1-(1+t_0)^{-n}}{t_0}(1+t)^n + n\frac{a}{4} = \frac{5}{4}a\frac{(1+t)^n - 1}{t},$$

équation qui devient après simplification et introduction du taux annuel en % (si le taux t est de 6% alors t = 0,06 et T = 6 = 100 t) :

$$\frac{1-\left(1+\frac{T_0}{1200}\right)^{-n}}{\left(\frac{T_0}{1200}\right)}\left(1+\frac{T}{1200}\right)^n + \frac{n}{4} - \frac{5}{4}\frac{\left(1+\frac{T}{1200}\right)^n - 1}{\frac{T}{1200}} = 0.$$

Il suffit maintenant d'utiliser un (bon…) solveur ou, à défaut, un tableur pour déterminer le taux réel dans chaque cas particulier. À titre indicatif, les 5,9 % qu'annonce actuellement « mon » banquier représentent en réalité du 7,71 % !

Pour avoir discuté avec bon nombre de banquiers, je puis vous affirmer que cette formule (de prêt) marche du tonnerre de Dieu… Il me semble cependant que seule la locution « versements volontaires » permet de ne pas conclure à la publicité mensongère. Ces versements sont-ils d'ailleurs vraiment volontaires sachant que la banque n'accordera pas le prêt à celui qui refusera de réaliser « l'épargne parallèle » ?
Petite confidence : j'ai, il y a 4 ans, contracté un prêt pour l'achat d'une voiture (comment payer cash si l'État nous demande tellement d'impôts…). « Mon » Banquier voulait, à l'époque déjà, me vendre le produit incriminé. Comme j'avais étudié la formule au préalable, je lui fis part de mes conclusions. Et, petit miracle, après consultation des responsables du « siège », j'ai été dispensé des « versements volontaires »…
Dans les trois situations que j'ai évoquées, les Mathématiques et le bon sens (mais n'est-ce pas la même chose ?) permettent aisément explication et démystification. L'avenir leur appartient…

N.B. Ces thèmes ont tous été abordés dans des classes de lycée professionnel (tertiaire).

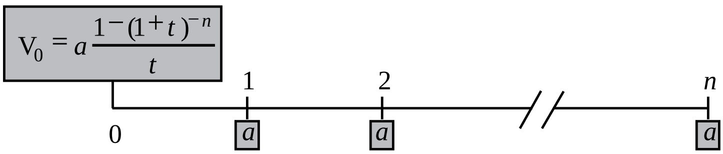
Le premier de façon fortuite lors de discussions libres.

Le second par les élèves de BEP. Après leur avoir défini le principe des pourcentages par tranches, je leur ai communiqué les tranches et les taux d'imposition tels qu'ils étaient publiés dans la presse après l'annonce, par notre Ministre des Finances, de la baisse (à venir…) de l'impôt sur le revenu. Ils ont alors calculé l'impôt relatif à chaque tranche (sauf évidemment la dernière qui est ouverte), puis cumulé les sommes obtenues. Il nous était ensuite possible de calculer les équations que vous

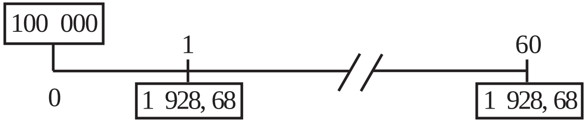
retrouvez dans le tableau. Restait à constater que le taux d'imposition pour la tranche était différent du taux que représentait l'impôt, tant par rapport au revenu imposable que par rapport au revenu brut.
Remarquons que les taux indiqués ici sont encore ceux de l'impôt sur les revenus de 1999, mais qu'évidemment le principe est toujours (et même plus car il y a une baisse des taux) en vigueur !

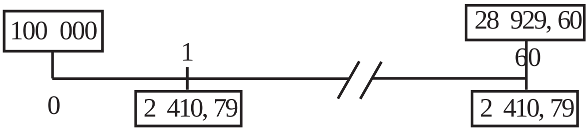
Tranches	Équations de I en fonction du revenu imposable x	Équations de T en fonction du revenu imposable x	Taux (T en %)
0---	$\mathrm{I}(x) = 0$	$\mathrm{T}(x) = 0$	0
26 330---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}095\,x - 2\,491{,}85$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}0684 - \dfrac{1794{,}13}{x}$	3,36
51 600---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}23\,x - 9\,457{,}85$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}1656 - \dfrac{6809{,}65}{x}$	9,06
90 820---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}33\,x - 18\,539{,}50$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}2376 - \dfrac{13348{,}44}{x}$	14,68
147 050---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}43\,x - 33\,224{,}85$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}3096 - \dfrac{23936{,}29}{x}$	20,96
239 270---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}48\,x - 45\,208{,}35$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}3456 - \dfrac{32550{,}01}{x}$	23,53
295 070---	$\mathrm{I}(x) = 0{,}54\,x - 62\,912{,}55$	$\mathrm{T}(x) = 0{,}3888 - \dfrac{45297{,}04}{x}$	calculable sur les cas particuliers

Le problème du crédit-auto a été abordé en classe de terminale Bac-Pro comptabilité. Les emprunts indivis étant au programme, les élèves sont sensés connaître la formule



relative aux annuités constantes (elle figure en tout cas sur le formulaire du bac…).
Je la schématise systématiquement par :
La donnée de V_0, t_0 et n leur permet de calculer facilement (ils ont un programme dans leur calculatrice…) l'annuité a. Pour fixer les idées considérons un emprunt de 100 000 F sur 60 mois au taux de 5,9 %. Il vient a = 1 928,63 F. L'équivalence, au taux de 5,9 %, est schématisée par :





Mais l'opération entière est celle qui est représentée ci-dessous.
En « ramenant » tout « en 60 », pour un taux annuel réel X (en pour cent, soit T) générant le taux mensuel proportionnel $\frac{X}{1200}$, l'équation devient :

$$100000\left(1+\frac{X}{1200}\right)^{60}+28929{,}60=2\,410{,}79\,\frac{\left(1+\frac{X}{1200}\right)^{60}-1}{\frac{X}{1200}}=0.$$

Il faut que je reconnaisse que pour atteindre cette dernière écriture un petit coup de pouce du prof. est nécessaire…

L'élève écrit ensuite dans le tableur de sa calculatrice :

$$Y_1=100000\left(1+\frac{X}{1200}\right)^{60}+28929{,}60-2\,410{,}79\,\frac{\left(1+\frac{X}{1200}\right)^{60}-1}{\frac{X}{1200}}$$

et recherche, par encadrement, la valeur (approchée avec la précision souhaitée) de X qui annule l'expression. Comme annoncé, cette valeur est comprise entre 7,71 et 7,72.