À propos des aires (I)

Groupe(*) « Activités mathématiques au collège »

Le groupe « Activités mathématiques au collège » a entamé un travail sur les aires. Voici les premiers documents : un texte général sur la notion d'aire et une première activité sur la mesure d'une aire. D'autres suivront et nous comptons sur vous pour nous fournir des activités ou idées d'activités sur ce sujet, pour l'Élémentaire et le Collège.
Adressez vos propositions au secrétariat de l'APMEP qui transmettra. Merci.

Quelques activités pour construire la notion d'aire

Comme la grandeur « longueur » pour les objets longilignes, la grandeur « aire » s'introduit pour rendre compte de la comparaison, selon certains protocoles expérimentaux, de parties du plan bornées, non réduites à une ligne et de formes assez simples (en bref : des surfaces). Ces surfaces peuvent être des dessins sur une feuille de papier ou au tableau ; on peut aussi les reproduire sur un calque ou par découpe d'un matériau assez rigide et de faible épaisseur (papier, carton, lino, …, mais pas un tissu susceptible de se déformer) ; dans ce cas on ne prend pas en compte la dimension épaisseur de l'objet.

La notion d'aire se construit à l'aide de nombreuses activités à base de manipulations, d'observations, de résolution de problèmes, et ceci dès l'école primaire. Ces activités relèvent de trois catégories : celles qui ont pour but de construire le sens de la grandeur « aire » indépendamment de la mesure, celles où il s'agit de donner une mesure d'aire par dénombrement d'unités et celles où la mesure de l'aire est obtenue par calcul à partir d'informations données sur les longueurs. Les deux premières catégories de problèmes sont essentielles pour « installer » la notion d'aire.

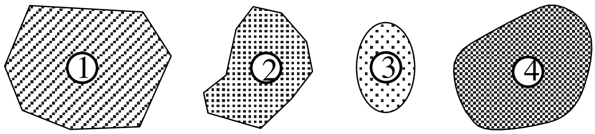
Voici quelques idées d'activités pour construire la notion d'aire.

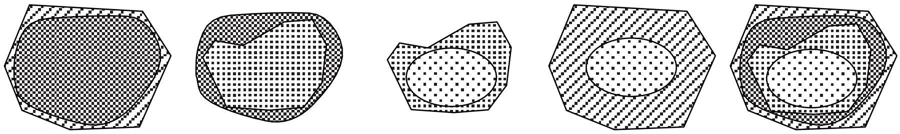
1º Comparaison directe par inclusion

On traduit le fait que la surface A est incluse dans la surface B en disant que :
« la surface A est moins étendue que la surface B »,
ou « la surface B est plus étendue que la surface A »,
ou « la surface A est d'aire inférieure à celle de la surface B »,
ou « la surface B est d'aire supérieure à celle de la surface A »,
ou « l'aire de la surface A est plus petite que l'aire de la surface B »,
ou « l'aire de la surface B est plus grande que l'aire de la surface A ».

(*) Catherine BRUNET, François COLMEZ, Jean FROMENTIN, Jacques GERMAIN, Valérie LAROSE, Michel ROUSSELET, Nicole TOUSSAINT.

Par exemple, pour les surfaces suivantes :





l'objet 1 est plus étendu que l'objet 4

l'objet 4 est plus étendu que l'objet 2

l'objet 2 est plus étendu que l'objet 3

l'objet 1 est plus étendu que l'objet 3

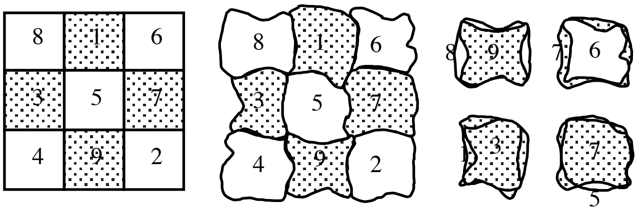
Du moins étendu au plus étendu, l'ordre est : 3, 2, 4, 1.

Cette inclusion peut parfois se voir directement sur un dessin ; sinon on utilise une réplique (calque ou papier découpé) d'une des surfaces pour la placer sur l'autre (sur un écran d'ordinateur, on peut déplacer un dessin à la souris). Bien sûr, si les deux surfaces coïncident par superposition, elles ont la même aire ; cette propriété est utilisée pour la comparaison à l'aide d'une réplique.

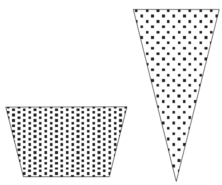
Remarque

Dans certains cas, il n'est même pas besoin de réaliser effectivement la manipulation, tant l'écart entre les aires est grand ; une comparaison « à l'œil » suffit ; mais il faut être prudent et se méfier de la perception si cet écart n'est pas suffisant.

S'il est légitime de supposer le premier quadrillage régulier et les carrés tous de même aire, pour le second, qui ressemble à un puzzle, il n'y a pas véritablement d'inclusions. Mais on peut estimer que, par compensation : 9 est inclus dans 8, 6 dans 7 et 3 dans 1. Pour 5 et 7, il y a doute.



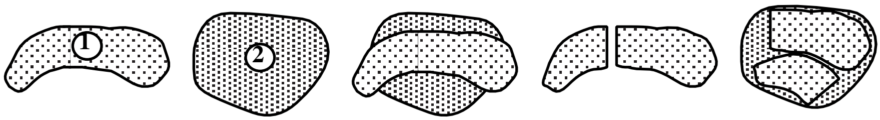
Les estimations « à l'œil » sont parfois trompeuses : dans le dessin ci-contre, le trapèze peut paraître plus étendu que le triangle ; cette impression se renforce si on voit un gobelet dans le premier dessin et une flûte dans le deuxième, auquel cas le volume du premier est près de deux fois le volume du second. En réalité les aires sont égales (aux erreurs de tracé près).



2º Comparaison par découpage et réassemblage

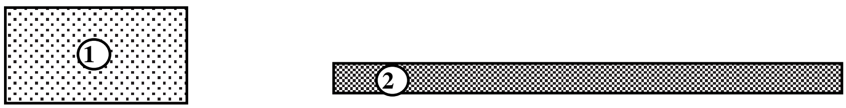
Cette technique repose sur le fait que l'aire de la réunion d'un certain nombre de surfaces est la même, quelle que soit la manière de faire, du moment qu'il n'y a pas de chevauchements. Par exemple toutes les figures faites avec un tangram ont la même aire. La prise de conscience de cette propriété par un enfant se fait généralement vers l'âge de six à huit ans ; c'est ce que les psychologues appellent la « conservation de l'aire ».

Exemple où le découpage rend possible la comparaison

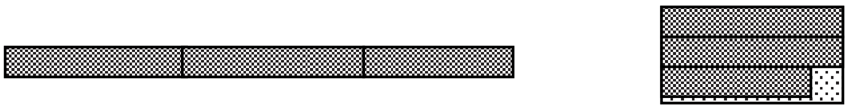


Exemples élémentaires

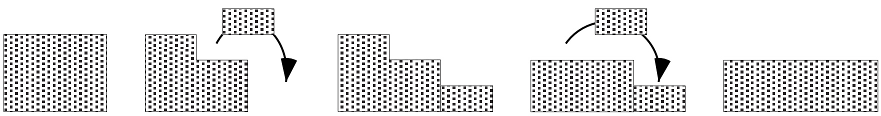
Exemple 1



Pour comparer , on découpe dans le rectangle (2) des morceaux de longueur égale à celle du rectangle (1)

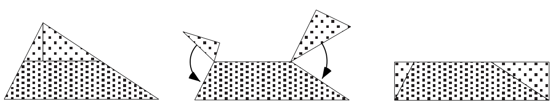


Exemple 2

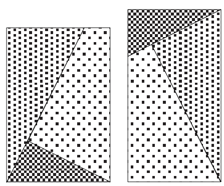


Exemples plus élaborés

Exemple 1

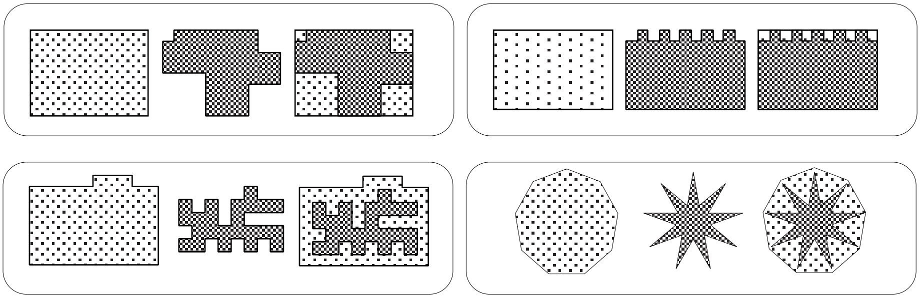


Exemple 2



3º Aire et périmètre :

Une erreur très répandue et qu'il importe de faire exprimer est l'idée que le périmètre et l'aire varient « ensemble ». Cela est vrai pour des objets de même forme (semblables), mais l'extrapolation que font les élèves est abusive. Il faut mettre les élèves au défi de trouver des contre-exemples à leur affirmation. En voici quelques-uns :

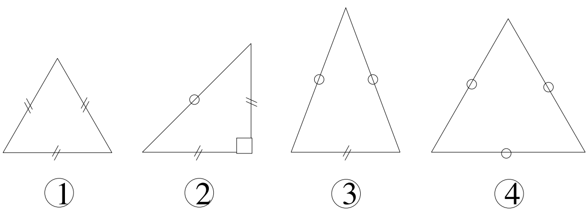


Une activité très riche à ce sujet consiste à réaliser, à partir de figures simples telles que celles décrites ci-dessous, des assemblages, de deux pièces par exemple, répondant à des conditions précises sur les aires et périmètres. Ici, un assemblage de deux pièces consiste à juxtaposer deux figures par un côté commun (de même longueur). Les figures utilisées ici (petit et grand triangles équilatéraux, triangle rectangle - isocèle et triangle isocèle ci-dessous) sont extraites d'un matériel que l'on trouve dans le commerce et qui permet de réaliser des solides polyédriques. Ce matériel comprend aussi des carrés, des losanges, des rectangles, des pentagones et des hexagones.

Les figures ci-contre sont rangées dans l'ordre croissant de leurs aires.

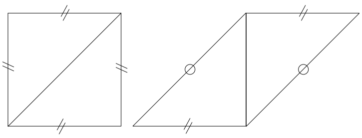
En Primaire et en Sixième, on peut ordonner ces aires par découpage, ré-assemblage et inclusion.

En Cinquième, on peut utiliser la formule de l'aire d'un triangle et, pour une même base, comparer les hauteurs.



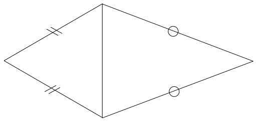
En utilisant les figures ci-dessus, on peut réaliser :

a) deux assemblages A et B ayant même aire mais des périmètres différents :

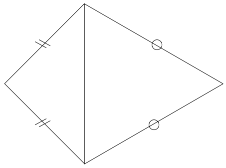


A B

b) **deux assemblages C et D ayant même périmètre, mais des aires différentes** :

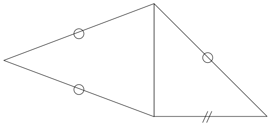


C

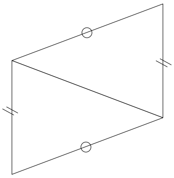


D

c) **deux assemblages E et F, E ayant un plus grand périmètre mais une plus petite aire que F** :

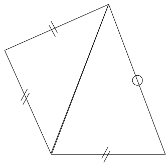


E

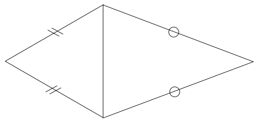


F

d) **deux assemblages G et H, G ayant une plus grande aire mais un plus petit périmètre que H** :



G



H

Signalons la publication, sur le site du Ministère de l'Éducation nationale, http://www.eduscol.education.fr, d'un dossier d'activité pédagogique : « AIRE ET PÉRIMÈTRE », réalisé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en dispositifs relais. L'ensemble du dossier est téléchargeable sous Acrobat.

L'activité qui suit : « Mesure de l'aire d'une surface », est la première d'une série sur les aires. Compte tenu des programmes actuels, cette activité s'adresse plutôt à des élèves de Sixième. Elle vient, en principe, après des activités de comparaison d'aires par inclusion et/ou découpage telles que celles décrites précédemment.

Mesure de l'aire d'une surface

Après avoir comparé des surfaces entre elles, on peut désormais s'intéresser à la mesure des surfaces étudiées. On peut faire remarquer aux élèves que la règle graduée ne permet pas ces mesures et réfléchir sur les instruments adéquats.
La présentation des différents réseaux (à maille carrée, à maille triangulaire, à maille hexagonale) sur feuilles transparentes ou calques peut intervenir après celle de gabarits.

Nous proposons d'abord des commentaires sur quatre activités, puis les feuilles correspondantes distribuées aux élèves.

Activité 1

Les réseaux à maille carrée, à maille triangulaire et à maille hexagonale, ont été photocopiés sur papier-calque ou transparent et distribués aux élèves. Tous les élèves doivent pouvoir utiliser ces réseaux. Pour ces réseaux, initialement au format A4, le carré et le triangle élémentaires ont 5 mm de côté, l'hexagone a 2,5 mm de côté. Pour des raisons de mise en page, ces réseaux, ici, ont été réduits.
La consigne écrite dans le texte doit être commentée oralement.
Les élèves devraient très vite se rendre compte que la mesure sera différente selon le réseau utilisé et remarquer qu'elle ne sera pas un nombre entier de mailles, d'où le principe d'encadrement de la mesure, cet encadrement dépendant aussi de la position du réseau sur la figure.

Les figures sont volontairement « difformes » (il n'y a pas que des aires de carrés et de rectangles). Nous avons indiqué volontairement à côté de la carte de France ce que représente approximativement l'aire en km^2 de chaque unité utilisée pour que les élèves puissent faire le lien avec la superficie réelle de la France qui est environ de 549 000 km^2. On peut utiliser ces valeurs approximatives pour obtenir un encadrement plus fin de la France et des autres figures.

Activité 2

L'importance du choix d'une unité d'aire est établie. Les figures sont désormais dessinées sur un réseau à mailles losangées et trois unités différentes sont proposées : Un losange pour U_1, deux losanges pour U_2 et quatre losanges pour U_3.

Pour la mesure avec l'unité U_1, les éventuelles erreurs seront dues à des oublis lors du comptage. Avec les autres unités, certains élèves ne vont pas compter mais utiliser un mode de calcul. Pour ceux qui auront encore besoin de compter, on peut leur suggérer de dessiner sur la figure les unités qu'il est possible de faire apparaître, donc d'effectuer des groupements de deux ou de quatre losanges. Un deuxième jeu de figures sera peut-être nécessaire pour ces élèves.

Activité 3

Avec leurs cahiers quadrillés, les élèves adopteront sans mal le carreau comme unité d'aire. Pour certains, le carreau aura 5 mm de côté, pour d'autres 8 mm de côté. Dessiner quelques surfaces et en mesurer à la fois l'aire et le périmètre ne devrait pas causer trop de soucis, et c'est une bonne entrée en matière pour la suite de l'activité. On peut utiliser les productions des élèves pour faire remarquer que deux figures ayant le même périmètre peuvent ne pas avoir la même aire et que deux figures ayant la même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre. Les élèves sont alors amenés à s'en rendre compte par eux-mêmes en trouvant des figures répondant à ces critères.

L'utilisation du papier à petits carreaux va permettre de définir le centimètre carré ainsi que le décimètre carré en visualisant ces deux unités qui, par la suite, seront très utilisées. En coloriant 1cm^2 puis 1dm^2, les élèves remarqueront qu'il faut bien plus de dix centimètres carrés pour avoir 1 dm^2 !

La réalisation sur papier millimétré de figures non superposables ayant une aire donnée par sa mesure en cm^2 ou en mm^2 oblige les élèves à prendre conscience que la mesure correspond à un dénombrement d'unités d'aire. La recherche des trois rectangles d'aire 6 cm^2 va poser problème. Les élèves mettront un certain temps pour penser à des dimensions non entières pour les côtés du rectangle. Le débat instauré dans la classe à cette occasion sera une bonne introduction à l'activité suivante.

Activité 4

Cette activité comporte trois étapes :

– La première, avec les figures A1, A2, A3 et A4, permet d'établir le calcul de l'aire du rectangle.
– La deuxième, avec les figures A5, A6, A7 et A8, permet d'établir le calcul de l'aire du triangle rectangle.
– La dernière, avec les figures A9 et A10, nécessite des mesures et fait intervenir le « découpage » d'une figure en figures simples dont on sait calculer les aires, en procédant ensuite par somme ou par différence.

Compte tenu des activités précédentes et de la présence des marques sur les figures indiquant le centimètre, les élèves peuvent dessiner les cm^2 et les dénombrer pour obtenir les mesures demandées. Mais on peut leur suggérer, si cela est nécessaire, de recourir à un calcul, ce qu'ils feront certainement étant donnée la durée que représente le pavage de ces figures avec des cm^2.

Lorsque les dimensions des figures ne sont pas entières, les façons de procéder seront diverses, et le recours au calcul sera nettement préféré.

À l'issue de cette activité, on aura mis en place l'aire du rectangle et l'aire du triangle rectangle à partir de leurs dimensions, ainsi que le procédé de décomposition d'une figure en figures simples pour permettre ensuite un calcul par somme ou différence d'aires.

Mesure de l'aire d'une surface (1)

Activité 1

À l'aide du réseau triangulaire, et en prenant un triangle élémentaire comme unité d'aire, donne un encadrement de l'aire de chacune des figures ci-dessous. Fais le même travail avec le réseau à mailles carrées puis le réseau à mailles hexagonales en complétant le tableau en bas de cette page.

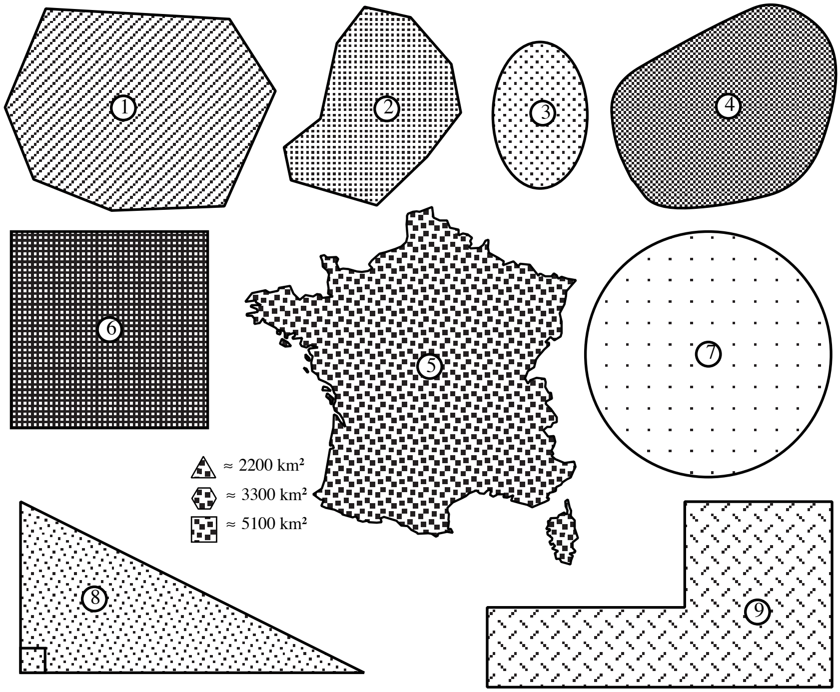
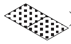
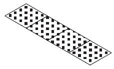


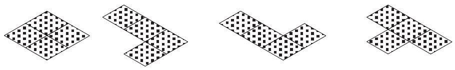
Figure	Réseau triangulaire	Réseau carré	Réseau hexagonal
(1)	< **A** <	< **A** <	< **A** <
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			
(6)			
(7)			
(8)			
(9)			

Mesure de l'aire d'une surface (2)

Activité 2

Les quatre figures ci-dessous sont dessinées sur le réseau à mailles losangées. Mesure l'aire de chacune de ces figures en utilisant successivement chacune des unités d'aires suivantes :

U_1 (aire d'un losange : ), U_2 (aire de deux losanges : ) et U_3 (aire de quatre losanges : ).

La dernière unité d'aire peut avoir d'autres formes : 

Donne tes réponses dans le tableau ci-dessous.

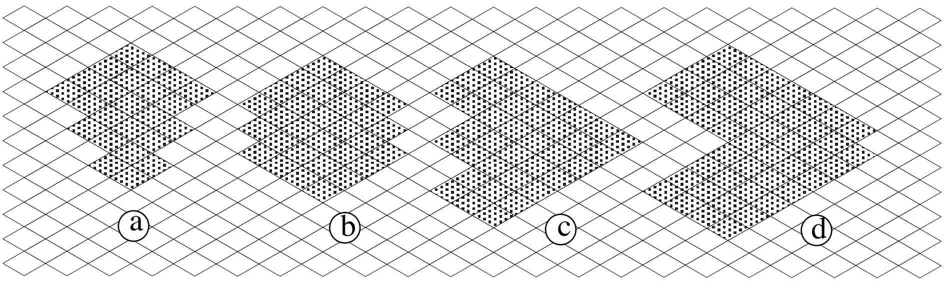


Figure	Mesure avec U_1	Mesure avec U_2	Mesure avec U_3
(a)			
(b)			
(c)			
(d)			

Activité 3

1°) Sur ton cahier, dessine deux figures en suivant les lignes du quadrillage.
Donne la mesure de l'aire de chaque figure en prenant le carreau de ton cahier comme unité d'aire.
Donne la mesure du périmètre de chaque figure en prenant le côté du carreau de ton cahier comme unité de longueur.

2°) Dessine sur ton cahier trois figures qui ont un périmètre de 26 unités de longueur, mais des aires différentes.
Dessine sur ton cahier trois figures qui ont une aire de 36 unités d'aire, mais des périmètres différents.

3°) Sur du papier à petits carreaux, colorie un carré de 1cm de côté. Colorie d'une autre couleur un carré de 1 dm de côté.
Le centimètre carré est l'aire d'un carré de 1 cm de côté.
Le décimètre carré est l'aire d'un carré de 1 dm de côté. Combien y a-t-il de cm² dans un dm² ?

4°) Sur du papier millimétré, dessine trois figures non superposables qui ont une aire de 5 cm² chacune.
Dessine trois figures non superposables qui ont une aire de 49 mm² chacune.
Dessine trois rectangles non superposables d'aire 6 cm² chacune.

Mesure de l'aire d'une surface (3)

Activité 4

Voici un certain nombre de figures. Sur certains côtés de ces figures on a indiqué par des marques les centimètres. Il y a aussi sur quelques côtés des demi centimètres.

Donne, avec la méthode de ton choix, la mesure en cm² de chacune de ces figures.

Indique sur cette feuille, d'une manière ou d'une autre, la méthode que tu as utilisée.