Et le calcul ?

Christiane Zehren et Henri Bareil

Après un Dossier sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques, dont la parution commence dans le présent numéro, le Bulletin publiera un Dossier sur la modélisation.

Il est ensuite prévu un DOSSIER SUR LE CALCUL dont le responsable est Daniel Vagost.

Pour les différents types de calcul (numérique, algébrique, vectoriel, analyse, probabilités et statistiques, ...), qu'il s'applique au discret ou au continu, vous avez sans doute, amis lecteurs, beaucoup à dire sur :

– *les objectifs poursuivis,*
– *les difficultés d'apprentissage,*
– *des situations d'utilisation, de réinvestissement, ...*
– *les stratégies que vous utilisez.*

Nous souhaitons de nombreuses contributions, surtout de niveau élémentaire (école, collège, lycée).
Pour vous y inciter, nous présentons ci-après (dégagées par Henri Bareil) quelques constats, analyses et suggestions du « RAPPORT D'ETAPE SUR LE CALCUL » publié en juin 2001 par la C.R.E.M (Commission de Réflexion sur l'enseignement Mathématique, présidée par J.P. KAHANE). Ce rapport est accessible sur EduSCOL.

Merci, amis lecteurs, pour vos propositions d'articles surtout s'ils sont issus de votre pratique enseignante ou si, plus théoriques, ils sont illustrés de nombreux exemples. Pour l'envoi d'articles : cf. page 2 du Bulletin.

.

Aperçus du rapport d'étape sur le calcul

1. Calcul exact/approché – Ordres de grandeur

Cela commence au primaire, notamment par **calcul mental**, avec intervention rapide des puissances de 10, puis par les propriétés opératoires agissant sur des décompositions et recompositions de nombres.
Cela se poursuit en interaction avec d'autres disciplines, par exemple les « *différences d'échelles dans le numérique, qui jouent un rôle essentiel dans la manifestation des phénomènes* », par des considérations de « *très petit* » ou de « *très grand* ».
Dès l'école élémentaire, et tout au long des études, il s'agit de prendre conscience de l'intérêt tantôt des seuls **calculs approchés** (les exacts étant souvent hors d'atteinte ou illusoires, …), tantôt des calculs exacts contrôlables par des calculs approchés.

Cela prépare aussi à **l'Analyse**, où il faut apprendre, dans une expression algébrique, à reconnaître les termes dominants, et ainsi à acquérir un nouveau point de vue pour piloter et mener le calcul.
L'Analyse confronte d'ailleurs à de vastes champs de problèmes (la plupart des équations différentielles !), où seule une résolution approchée est possible…

2. L'intelligence du Calcul

Le **calcul mental** doit être « *associé à des stratégies de calcul diverses, qu'il s'agira de valider, de comparer du point de vue des connaissances engagées, du point de vue du coût, de l'efficacité, dans des taches non stéréotypées* » : cf. le « calcul réfléchi » des programmes de l'école élémentaire.

Le rapport souligne « *l'importance de la **prise en compte des grandeurs**, pour donner un sens au calcul mathématique, dans ses rapports avec le réel et les autres disciplines scientifiques* ». Il déplore une « *réduction numérique* » prématurée qui isole les mathématiques, « *rend plus difficile la construction de la notion de dimension* », facilite les confusions (aire-périmètre) et l'application de formules sans contrôle. [NDLR : cf. article de Rémi Duvert, p. 603-609 du Bulletin APMEP n° 436, et brochure APMEP n° 46 « Grandeur-mesure », rappelée p. 609 de ce Bulletin 436].

L'intelligence du calcul suppose un choix réfléchi – c'est-à-dire adapté aux objectifs – de la **forme adoptée pour une valeur numérique** : ainsi, dans une étude où abondent les pourcentages, $\frac{72}{100}$ est sans doute préférable à la forme « simplifiée » $\frac{18}{25}$, et, si $\frac{1}{x}$ pointe à l'horizon, mieux vaut, pour x, la forme $\frac{3}{\sqrt{2}}$ que $\frac{3\sqrt{2}}{2}$! Il en ira de même pour les expressions algébriques !

Dans le calcul algébrique, la reconnaissance des formes est essentielle : « *formes factorisées, développées, formes canoniques, identités remarquables, configurations-clés, (...) chacune rapprochant ou éloignant de la solution cherchée* ». [....] « *Développer cette intelligence suppose, bien sûr, que l'on propose à l'élève des tâches de calcul qui ne soient pas complètement balisées, où il conserve une certaine autonomie, où des choix restent possibles* »… L'intelligence du calcul peut d'ailleurs être « *utilement soutenue par des visualisations, des traductions dans un autre cadre, en particulier les cadres géométriques et fonctionnels* ».

L'enseignement ne met pas « *assez en évidence la **fonction généralisatrice du calcul algébrique** et sa valeur comme **outil de preuve*** ». (Supports possibles : problèmes de dénombrement, de transformations numériques, de « patterns », de variation, d'arithmétique élémentaire).

« *Renforcer les **rapports entre raisonnement et calcul** suppose aussi que l'on ne minimise pas la spécificité des raisonnements propres à chaque type de calcul* ». Attention notamment au « *passage des calculs déterministes à des calculs statistiques ou probabilistes obligeant à gérer l'incertain* ». … « *Il y a un manque de familiarité certain avec [....] les mathématiques discrètes, le calcul statistique et probabiliste, l'algorithmique, [...], la gestion des apprentissages mathématiques et de l'enseignement dans des environnements instrumentés, ...* ».

3. Développement d'un calcul instrumenté de façon intelligente et contrôlée

Calculatrices, tableurs, ordinateurs sont trop souvent utilisés dans un « *enseignement* *papier/crayon* »… Il faudrait inventer des situations qui ne pourraient pas exister en papier/crayon … et, au moins, utiliser les nouveaux instruments de calcul pour mieux maîtriser le calcul algébrique en ses structures de pensée, ses syntaxes.

4. Investissement dans des fractures ou complémentarités

Il y a, tout au long des apprentissages successifs, des fractures.

- Ainsi pour passer des **entiers aux décimaux** (de là, si l'on introduit les décimaux comme assemblages de deux entiers, des erreurs comme $(3{,}4)^2 = 9{,}16$ ou $3.10 > 3.2$, … avec une prégnance abusive de la linéarité qui transforme $(a + b)^2$ en $a^2 + b^2$).
- Ainsi, sur un autre plan, dans un appauvrissement n'intégrant dans un « *tronc commun de calcul* » ni « *des rudiments de **calcul fonctionnel** exact* » ni des calculs liés à « *des contextes **statistiques** et **probabilistes*** ».
- Insistons sur la fracture « ***arithmétique de l'école primaire-algèbre*** » parfois vécue, à tort, comme introduction soit des « *lettres* », soit des négatifs, alors qu'elle est dans un renversement total de la démarche.
  En arithmétique, on va du connu vers l'inconnu, en produisant pas à pas des résultats intermédiaires, en un « *calcul piloté par le sens du contexte* ».
  L'algèbre, elle, va calculer sur des relations établies entre connu et inconnu, avec des transformations régies par des règles formelles, en s'affranchissant du « sens externe ». Un tel renversement de démarche ne peut être que mal accepté là où il ne s'impose pas.
  La note 24 du rapport donne un exemple éclairant : chercher x tel que $\boxed{x} \xrightarrow{\times 5} \boxed{} \xrightarrow{+ 3} \boxed{48}$ n'exige pas une démarche algébrique : il suffit d'inverser la chaîne d'opérations :
  Mais il en ira différemment si l'on exige que les deux chaînes

$$\begin{tikzcd} & \boxed{} \arrow[dr, "+ 3"] & \\ \boxed{x} \arrow[ur, "\times 5"] \arrow[dr, "\times 8"'] & & \boxed{} \\ & \boxed{} \arrow[ur, "+ 1"'] & \end{tikzcd}$$

  conduisent au même résultat.
  [N.D.L.R. On trouvera des exemples analogues dans l'article de Boris Véron, du Bulletin APMEP n° 435, p. 440 et sq.].

  Le Rapport souligne aussi que la résolution de la fracture « *arithmétique-algèbre* » ne doit pas se traduire par un refoulement des méthodes de l'arithmétique – qui peuvent, parfois, être les plus performantes –. La note 23 du rapport en est un bel exemple. [NDLR : de même un certain problème de sucettes de l'EVAPM Seconde de 1991, brochure n° 88].
- Utilisant l'approximation comme outil de production des concepts, **l'analyse** correspond à une fracture déjà évoquée au § I : « *Tout n'est plus, dans une expression algébrique, au même niveau [….] et le calcul traitera différemment ce qui est dominant et ce qui est négligeable* »… « *Dès les premiers contacts avec le monde de l'analyse, il est important de faire comprendre aux élèves le*

changement profond que cette intégration des ordres de grandeurs fait subir au calcul ».« *Ceci impose d'avoir une notion de négligeabilité relative, qui peut être introduite à partir d'explorations numériques sur des objets simples* ».

Le Rapport signale, au passage, l'intérêt des **logiciels de calcul formel** pour « *transformer rapidement des expressions* », « *séparer des termes dominants* », […], aider ainsi l'élève à mieux se consacrer à la gestion du calcul.

Sans qu'il s'agisse de fracture mais d'une tension, signalons, par ailleurs, « *la prise de conscience essentielle à amorcer dès le lycée* », et qui différencie du calcul algébrique antérieur, relative au « ***jeu du " local " et du " global "*** »

Le Rapport insiste sur la modification « *substantielle* " du rapport à la linéarité, « *perçue de façon locale et non plus seulement globale* », en évoquant corrélativement l'apport, par leurs zooms, des calculatrices graphiques, et le fait de « *travailler […] sur une succession de voisinages qui se construisent au fil du calcul, en fonction dans contraintes qu'il rencontre* ».

- Notons aussi, sans parler de fracture mais de complémentarité, la **dualité du calcul intégral** :
  - « inverse » du calcul différentiel (point de vue « **primitive** » et variation).
  - sommation infinie de contributions élémentaires (point de vue « **intégrale** »).

  Ici le Rapport insiste sur l'organisation des ces contributions et leurs liens avec les calculs d'aires et de volumes.

5. Pallier trois méconnaissances

a. De l'importance des mémorisations.

« *Dès que le calcul n'est plus routinier ou complètement balisé, son pilotage intelligent ne peut se faire sans un répertoire minimal numérique et formel* ». Parlant des « tables classiques », le Rapport suggère des « *stratégies d'apprentissage […] jouant sur les particularités, les régularités, les compositions et décompositions de nombres, mais en visant progressivement une réelle mémorisation, …* ».

b. Du rôle des formules :

« *C'est via l'usage de formules que vivra souvent le calcul algébrique* ».

Et le Rapport, tout en évoquant la nécessité du travail sur les formules vis-à-vis des autres disciplines, souligne son intérêt mathématique :

- Il permet une première entrée, sans nécessairement des renversements de pensée, dans le calcul littéral.
- il intervient comme outil de généralisation
- il permet de travailler « *sur des situations où interviennent simultanément plusieurs variables, plusieurs formes d'indépendance* » ce qui va contre une pratique traditionnelle du calcul algébrique dans le Secondaire se contentant le plus souvent d'une variable, de deux au maximum.

c. De l'intérêt des autres disciplines :

« *Il nous semble important, pour contribuer à donner sens au calcul, d'enrichir ses contextes mathématiques et de renforcer les liens avec les autres disciplines* ».